译者的话

受普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的威廉·罗韦尔·普特南数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition)，其试题由名家组成的命题委员会制订，极富独创性，为国际数学界所瞩目。1979年以来，我们陆续将散载于历年《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly)的试题及解答收集摘译，后又托周叔子同志从美国寄回月刊上没有发表的前十多届解答等材料，重新汇译成册，为读者提供了一本长达四十一年的国际著名的数学竞赛的完整资料(个别题未作解答)。

普特南数学竞赛始于1938年，每年举行一次，有来自美国和加拿大数百所高等院校的数千名学生及数百个大学代表队参加，每队三人。竞赛进行一天，分上、下午两试，每次三小时。竞赛设有团体奖与个人奖，授予奖金。团体奖五名，表彰若干名；个人一等奖五名，二等奖五名，表彰若干名，均在《美国数学月刊》上公布，以资鼓励。参加代表队的学生仍计个人成绩，可兼得个人奖。

普特南试题讲究技巧，重视基础与应用，对理工科大学生学习高等数学、准备研究生考试极有参考价值。其中部分试题现已属中学范围，可供中学生练习。至于大、中学教师从事教材编写，例证选讲，考试命题及教学法研究而钻研此书，也能得到有益的启示。

本书翻译所据原本，前二十五届系美国数学协会1980年出

版的第一个单行本(著者A.M.Greasoon, R.E.Greenwood, L.M.Kelly均为知名数学家), 后面各届取材于《美国数学月刊》各期。刘裔宏承译第5—8, 11, 38—41届, 许康承译第12—18, 26—28, 31届, 吴茂贵承译第19—25, 29—30, 32—33届, 魏力仁承译第1—4, 9—10, 34—37届。限于译者水平,错误之处盼读者指正。

译稿承业师彭攀蕃老先生校阅, 翻译过程中蒙学兄周叔子同志支持, 谨此一并致谢!

译　者

1982年11月

目　次

第一届（1938年4月16日）…………………………………（1）
第二届（1939年3月4日）…………………………………（13）
第三届（1940年3月2日）…………………………………（30）
第四届（1941年3月1日）…………………………………（47）
第五届（1942年3月7日）…………………………………（63）
第六届（1946年6月1日）…………………………………（80）
第七届（1947年5月24日）…………………………………（91）
第八届（1948年3月20日）…………………………………（104）
第九届（1949年3月26日）…………………………………（121）
第十届（1950年3月25日）…………………………………（137）
第十一届（1951年3月31日）………………………………（154）
第十二届（1952年3月22日）………………………………（170）
第十三届（1953年3月23日）………………………………（187）
第十四届（1954年3月6日）………………………………（204）
第十五届（1955年3月5日）………………………………（216）
第十六届（1956年3月3日）………………………………（228）
第十七届（1957年3月2日）………………………………（239）
第十八届（1958年2月8日）………………………………（254）
第十九届（1958年11月22日）……………………………（268）
第二十届（1959年11月21日）……………………………（282）
第二十一届（1960年12月3日）…………………………（297）
第二十二届（1961年12月2日）…………………………（313）

第二十三届（1962年12月 1 日）……………………………(325)
第二十四届（1963年12月 7 日）……………………………(335)
第二十五届（1964年12月 7 日）……………………………(349)
第二十六届（1965年11月20日）……………………………(359)
第二十七届（1966年11月19日）……………………………(368)
第二十八届（1967年12月 2 日）……………………………(375)
第二十九届（1968年12月 7 日）……………………………(384)
第 三 十 届（1969年12月 6 日）……………………………(391)
第三十一届（1970年12月 5 日）……………………………(400)
第三十二届（1971年12月 4 日）……………………………(406)
第三十三届（1972年12月 2 日）……………………………(417)
第三十四届（1973年11月 1 日）……………………………(429)
第三十五届（1974年11月 7 日）……………………………(437)
第三十六届（1975年11月 6 日）……………………………(445)
第三十七届（1976年11月 4 日）……………………………(453)
第三十八届（1977年12月 3 日）……………………………(460)
第三十九届（1978年12月 2 日）……………………………(467)
第 四 十 届（1979年12月 1 日）……………………………(476)
第四十一届（1980年12月 6 日）……………………………(483)

第一届（1938年4月16日）

上午试题

A-1. 有一个立体，两底位于水平面$z=h/2$与$z=-h/2$内，包围它的侧面是曲面．它的每一个水平截面的面积为

$$a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$$

（特殊情形系数可以为零）．证明：它的体积为

$$V=(1/6)h(B_1+B_2+4M).$$

这里B_1与B_2是底的面积，M是正中间的水平截面的面积．在$a_0=0$时，这个公式包含锥与球的体积公式．

A-2. 有一个浮标由三部分组成，一个圆筒与两个相等的圆锥．其中每一个圆锥的高等于圆筒的高，问当表面积一定时，什么样的形状会有最大的体积？

A-3. 如果一个质点在平面内运动，它的坐标x与y可以表示为时间t的函数，$x=t^3-t, y=t^4+t$．证明曲线在$t=0$处有一个拐点，并且质点运动的速度在$t=0$处有一个极大值．

A-4. 伐木工砍一棵树，树干是圆柱形，粗细均匀．它先砍出一道V形槽，槽的两边是平面，两面的交线是通过圆柱的轴的一条水平线，其二面角为θ．如果给定θ，证明平分θ的平面是水平面时，所砍去的材料的体积最小．

A-5. 求下列极限的值：(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$；

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt$.

A-6. 一个游泳者站在正方的游泳池的一角，希望达到对角线方向的对面一角. 设w是步行速度，s是游泳速度($s<w$)。求他达到目的地所需时间最短的路径.(考虑两种情形，(i) $w/s<\sqrt{2}$，(ii) $w/s>\sqrt{2}$)。

A-7. (i) 证明一个薄的均匀的球壳对一个在球外的点产生的引力，相当于这个球壳的质量全部集中于它的中心时所产生的引力。

(ii) 确定在曲面$z=xy$上的所有直线，并将结果图示。

下午试题

B-1. (i) 设A_{ik}是行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

a_{ik}的余子式，D是在d中对应地用A_{ik}代替a_{ik}所得的行列式，证明$D=d^3$。

(ii) 设$P(y)=Ay^2+By+C$是y的一个二次多项式，设二次方程$P(y)-y=0$的根是a与b($a\neq b$)，证明a与b是双二次方程$P[P(y)]-y=0$的根。据此，写出一个二次方程，使得它的根c与d是上述双二次方程的另外两根，并应用以上结果解下面的双二次方程

$$(y^2-3y+2)^2-3(y^2-3y+2)+2-y=0.$$

B-2. 求方程$yy''-2(y')^2=0$通过点$x=1$ $y=1$的所有的解。

B-3. 有一个直径3吋水平放置的圆盘，正在按每分钟四周

旋转。离圆盘较远但在同一平面上有一个点在发光。一个昆虫放在圆盘的边上离光源最远处，头对光源。这时它立即惊起按每秒1吋爬行，而且总是头对着光源。试建立运动的微分方程，并求出昆虫再次达到圆盘的边上的点。

B-4. 已知抛物线$y^2=2mx$，试从它的那些与曲线的法线重合的所有弦中，求一条长度最短的弦。

B-5. 从等轴双曲线的中心向曲线的各条切线作垂线，求垂足的轨迹。用极坐标写出轨迹的方程，并作草图。

B-6. 求平面$Ax+By+Cz+1=0$与椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

之间的最短距离

（令$h=1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ $m=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}$）。试用代数式表示并讨论平面在椭球外面的条件。

解答

A-1. 问题中的体积由

$$V=\int_{-h/2}^{h/2}(a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3)\ dz=\frac{a_1h^3}{12}+a_3h$$

得出。而两底的面积与M的面积由

$$B_1=\frac{a_0h^3}{8}+\frac{a_1h^2}{4}+\frac{a_2h}{2}+a_3、$$

$$B_2=-\frac{a_0h^3}{8}+\frac{a_1h^2}{4}-\frac{a_2h}{2}+a_3、$$

$$M=a_3$$

得出。代入公式$(1/6)h(B_1+B_2+4M)$，得

$$\frac{1}{6}h\left(\frac{a_1h^2}{2}+6a_3\right)=\frac{a_1h^3}{12}+a_3h=V.$$

关于锥和球的情形：对于锥，将顶点放在平面$z=h/2$上，底放在平面$z=-h/2$上。则坐标轴z处水平截面面积为

$$A=(B/h^2)(z-(h/2))^2,$$

这里B是底的面积。因为A是二次多项式，故

$$V=(h/6)(B+4(B/4)+0)=(1/3)Bh$$

是熟知的结果。

对于半径为$r=h/2$，夹于两平面$z=-h/2$和$z=h/2$之间的球。在z的水平截面面积为 $A=\pi(r^2-z^2)$。式中A是二次多项式，得

$$V=(h/6)(4\pi r^2)=(4/3)\pi r^3.$$

在球与锥的截面面积公式中，z^3的系数a_0等于0。

A-2。令r是圆筒的半径，h是它的高，已知条件是

$$S=2\pi rh+2(\pi r\sqrt{h^2+r^2})=\text{常数}, \tag{1}$$

浮标的体积是

$$V=\pi r^2h+(2\pi r^2h/3)=5\pi r^2h/3. \tag{2}$$

问题是求满足条件(1) 的V的最大值．它可以用拉格朗日乘数法。但在这里容易由(1) 中解出h，使得V成为 r 的函数。由(1)

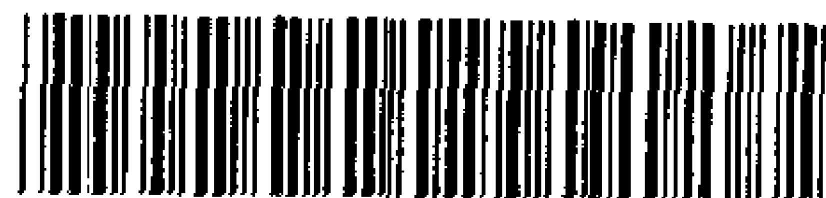
$$(S-2\pi rh)^2=2\pi r^2(h^2+r^2),$$

得 $$h=\frac{S^2-4\pi^2r^4}{4\pi rS}, \tag{3}$$

V的表达式为

$$V=\frac{5r}{12S}(S-4\pi^2r^4). \tag{4}$$

因为r与V一定是正的，涉及的范围为$0<r<\sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$.



求导数并令它等于零，

$$\frac{dV}{dr}=\frac{5S}{12}-\frac{100\pi^2r^4}{12S}=0.$$

其唯一临界值是$r_0=\sqrt[4]{S^2/20\pi^2}$. 因为当$r\to 0$或者$r\to\sqrt[4]{S^2/4\pi^2}$时$V\to 0$，并且在它们之间是正的，故在临界值$r_0$处$V$有最大值.

由(3) 求出对应h的值$h_0=(2/5)\sqrt{5}\,r_0$。浮标的式样完全由比值$h_0/r_0=(2/5)\sqrt{5}$确定.

A-3. 因为当$t=0$时，dx/dt不为零. 在$t=0$的邻域y作为x的函数，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3-1}{3t^3-1}=-1-3t^2-\cdots.$$

因此dy/dx在$t=0$处有一个(局部)极大值，所以曲线在$t=0$处有一个拐点.

速度的大小V如下

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2$$

$$=2-6t^2+\cdots.$$

因此V在$t=0$处有一个(局部)极大值.

A-4. 假设$0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_2+\theta<\pi/2$，则角$\alpha_1$与$\alpha_1+\theta$的平面之间楔形体小于$\alpha_2$与$\alpha_2+\theta$之间的楔. 因为作角为$\alpha_2-\alpha_1$的一个简单的旋转，看出它是后者的一个真子集.

现在考察任何一个具有截面AOB的角θ的非对称楔，如果A与B是在通过O的水平线的同一侧，则由上面的论证，没有最小的体积.

假设A在水平线下面，B在它的上面. 设AOB在角θ的对称楔SOT的下面(如图)。它的余楔AOS与楔$A'OT$是对称的(如前所证)。它大于楔BOT。因此，

楔AOB＝楔AOS＋楔SOB＞楔SOB＋楔BOT＝楔SOT，

故对称楔最小。

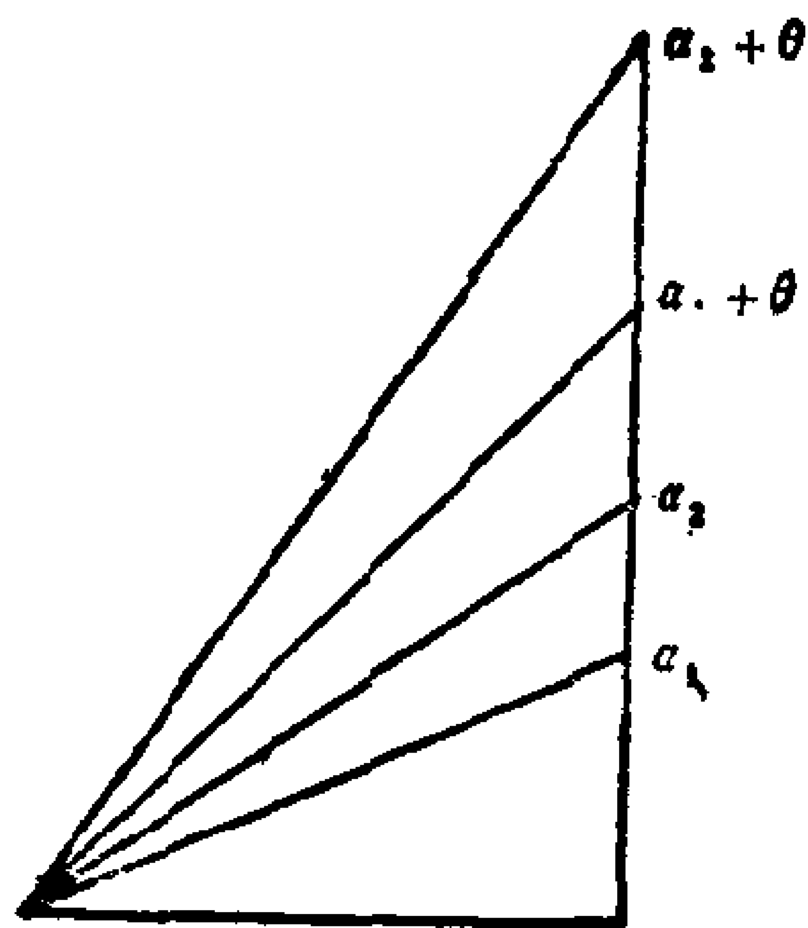


图1

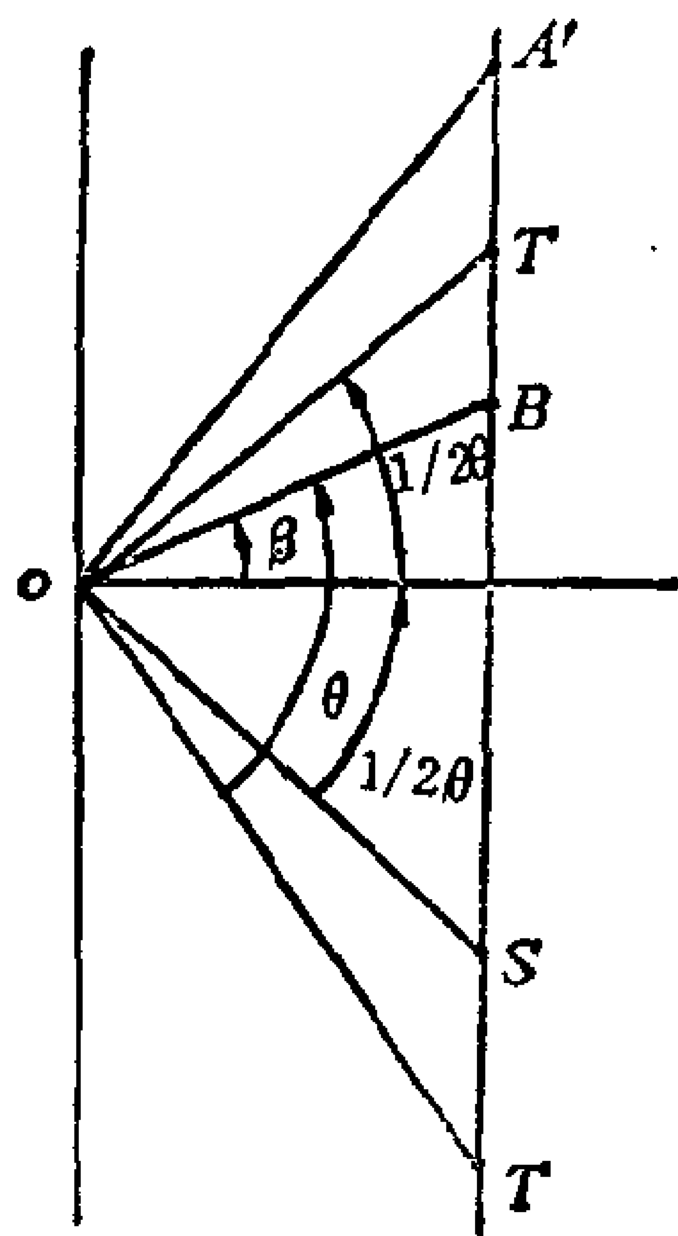


图2

A-5. (i) 由洛必达法则所求极限为零。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0,$$

或由$x>0$时$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>\frac{x^3}{6}$，

即$0<x^2/e^x<6/x$。当$x\to\infty$时$6/x$趋向于零。故所求极限为零。

(ii) 由洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin2t)^{1/t}\,dt=\lim_{x\to0}(1+\sin2x)^{1/x}$$.假定最

后的极限存在。令$\phi(x)=(1+\sin2x)^{1/x}$则，

$$\log\phi(x)=[\log(1+\sin2x)]/x,$$

再用洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\log\phi(x)=2$$

由指数函数连续性，$\lim_{x\to0}\phi(x)=e^2$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}dt=e^2.$$

A-6. 设正方池$ABCD$. 游泳者最初在A处希望达到C. 时间最少的路线可以用下面的方式表达.游泳者从A步行到E(AB边上的一点),接着从E游到BC上的F,然后从F步行到C. 注意取路线$AGHC$所需时间等于取$F=C$的路线所需的时间.

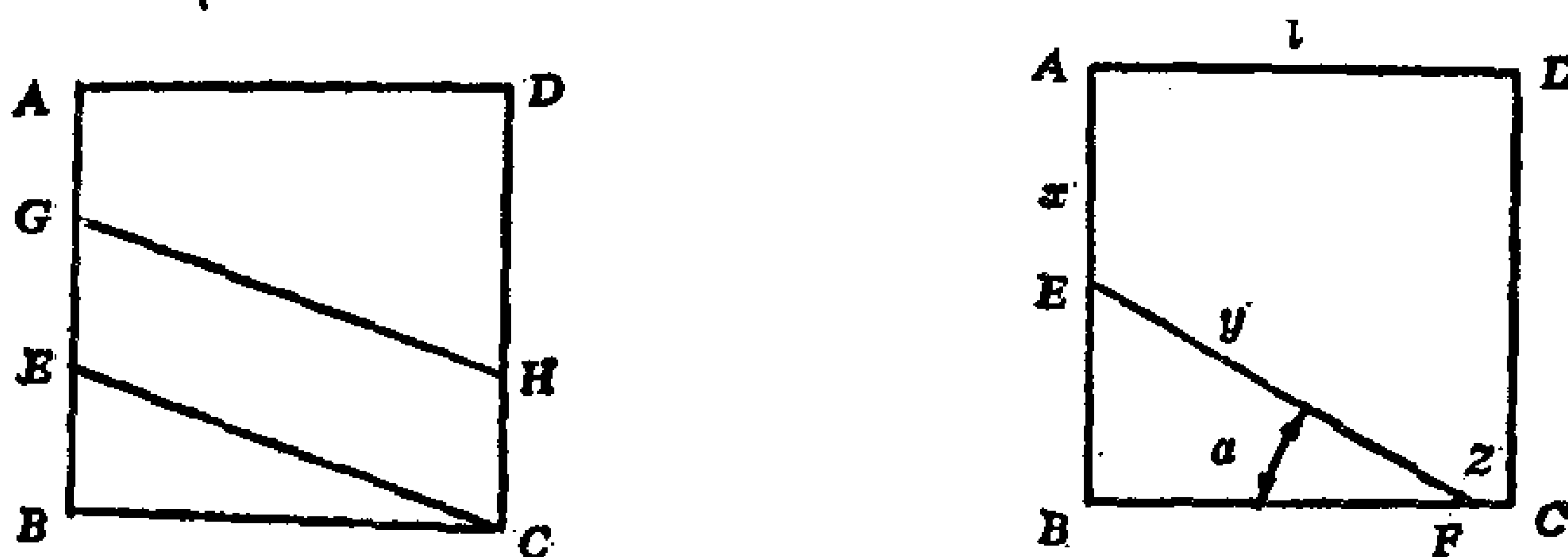


图3

设$AE=x$ $EF=y$ $FC=z$, 则时间$T=(x+z)/w+(y/s)$.设和$x+z$是不变的,则和$y\cos a+y\sin a$也是不变的. 当$\sin a+\cos a$是最大值时y是最小值. 此最大值在$a=45°$时达到。

所以作为一个时间最少的路线,$x=z$及$y=\sqrt{2}\ (l-x)$, l是池的边长. 当$0\leqslant x\leqslant l$, $T=(2x/w)+\sqrt{2}\ (l-x)/s$有最小值.

T是x的线性函数,它的最大值出现在区间的端点. 当$x=0$时$T=\sqrt{2}l/s$. 当$x=l$时$T=2l/w$.

如果$\sqrt{2}l/s<2l/w$,则$w/s<\sqrt{2}$或者相反. 因此,当$w/s<\sqrt{2}$最小路程是唯一的.游泳者必须从对角线通过水池,由A到C.如果$w/s>\sqrt{2}$,他必须从A到B到C的步行. 最后,当$w/s=\sqrt{2}$, T不依赖x,有无穷多条最短路线,即$a=45°$的任何路线$AEFC$.

A-7. (i) 由高斯定理,如果闭曲面S在它的内部包含质

量M，并且$\vec{F}$是质量M生成的引力场，则通过S的全流量

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=-4G\pi M,$$

$\vec{n}$是对于S向外的单位法向量，dA是曲面元。

设S是一个半径为R的球，外面的壳与它同心．由对称性在S上$\vec{F}=-F(R)\,\vec{n}$，其中$F=F(R)$是常量．故由

$$-4G\pi M=\iint_S -F(R)\,\vec{n}\,\vec{n}\,dA=-F(R)\iint_S dA$$

$$=-4\pi R^2F(R),$$

得$F(R)=GM/R^2$，作为向量$\vec{F}$

$$=-(GM/R^2)\,\vec{n}.$$

(ii) 设L是通过$(x_0y_0z_0)$的一条直线，它在曲面$z=xy$上．L的参数方程为：

$$x=x_0+\alpha t\quad y=y_0+\beta t\quad z=z_0+\gamma t.$$

这里α,β,γ不全为零．L在已知曲面上的充要条件是，对于所有的t

$$z_0+\gamma t=(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t)=x_0y_0+(\alpha y_0+\beta x_0)\,t+\alpha\beta t^2,$$

t^2的系数$\alpha\beta$为零，故或者$\alpha=0$或者$\beta=0$。

当$\alpha=0$则$\gamma=\beta x_0$，当$\beta=0$则$\gamma=\alpha y_0$。α,β，不能同时为零，否则$\gamma=0$。不妨设参数为1。L的方程或者为

$$x=x_0,\ y=y_0+t,\ z=z_0+x_0t,$$

或者为 $x=x_0+t,\ y=y_0,\ z=z_0+y_0t.$

对应的非参数形式为 $x=x_0,\ z=x_0y,$

或者 $y=y_0,\ z=y_0x.$

反之，这样的直线都在曲面上．

B-1. (i)设α是元素为a_{ik}的已给的行列式的矩阵，β是余因子A_{ik}的矩阵，γ是β的转置，则矩阵的积$\alpha\gamma$是主对角线等于d的

对角矩阵。于是

$$det(\alpha\gamma)=d^4=(det\alpha)(det\gamma)=(det\alpha)(det\beta)=dD.$$

方程 $dD=d^4$ (1)

是无关的、未定的16个矩阵元素的多项式之间的恒等关系。这样确定的4×4矩阵的行列式不为零，所以在多项式环里 d 不为零。多项式环是一个整域，由(1)得 $D=d^3$。

(ii) 因为 a 是多项式 $P(y)-y=0$ 的一个根，有 $P(a)=a$。则 $P[P(a)]=P(a)=a$。所以 a 是 $P[P(y)]-y=0$ 的一个根。同样 b 也是这个双二次方程的根。

令 $Q(y)=P[P(y)]-y$，求 Q 的另外的零点。注意到 $P(y)-y=Ay^2+(B-1)y+C=A(y-a)(y-b)$，即 $A(a+b)=1-B$。所以

$$\begin{aligned}Q(y)&=P[P(y)]-P(y)+P(y)-y\\&=A\{P(y)-a\}\{P(y)-b\}+A(y-a)(y-b)\\&=A\{A(y-a)(y-b)+y-a\}\{A(y-a)(y-b)\\&\quad+(y-b)\}+A(y-a)(y-b)\\&=A(y-a)(y-b)R(y),\end{aligned}$$

这里
$$\begin{aligned}R(y)&=\{A(y-b)+1\}\{A(y-a)+1\}+1\\&=AP(y)+Ay-A(a+b)+2\\&=A^2y^2+A(B+1)y+AC+B+1.\end{aligned}$$

根 c 与 d 是 R 的零点，所以 c 与 d 为根的所求的二次方程是

$$A^2y^2+A(B+1)y+AC+B+1=0.$$

特别是当 $A=1$，$B=-3$，$C=2$ 与 $R(y)=y^2-2y$ 的情形。$P(y)-y$ 的零点是 $2\pm\sqrt{2}$，所以 Q 的零点是 $2\pm\sqrt{2}$，0与2。

B-2。$1/y^3$ 是一个积分因子，因为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y^2}\right)=\frac{yy''-2(y')^2}{y^3}=0.$$

所以$y'/y=C$。从而$-1/y=Cx+D$对于适当的常数C与D成立。为了求通过(1, 1)的解，要求$C+D=-1$，故

$$y=1/[1+C(1-x)]. \tag{1}$$

反之，这种形式的任何函数满足已知方程及其初始条件。若$C=0$，函数是常数，定义域可取$(-\infty, +\infty)$。若$C\neq 0$，当$x=(1+C)/C$时(1)的右边为无限，所以(1)的区域要受限制：当$C>0$时为$(-\infty, (1+C)/C)$，当$C<0$为$((1+C)/C, \infty)$。

B-3. 选择直角坐标系与极坐标系，取圆盘的中心为原点。昆虫开始在(3/2, 0)，光源$(-\infty, 0)$。圆盘按反时针方向旋转。假设在时间t昆虫位于(x,y)即(γ, θ)。它的速度的水平与垂直方向的分量分别是

$$V_x=dx/dt=-1-(2\pi r/15)\sin\theta$$

$$=-1-(2\pi/15)y, \tag{1}$$

$$V_y=dy/dt=(2\pi r/15)\cos\theta=(2\pi/15)x. \tag{2}$$

对(1)微分并用(2)代入得

$$d^2x/dt^2=-(2\pi/15)dy/dt=-(2\pi/15)^2x. \tag{3}$$

确定x的微分方程

$$d^2x/dt^2+(2\pi/15)^2x=0,$$

它的解为$x=A\cos[(2\pi/15)t-\phi]$。

由(1)，$y=A\sin[(2\pi/15)t-\phi]-(15/2\pi)$。因此昆虫的运动是沿着圆周

$$x^2+\left(y+\frac{15}{2\pi}\right)^2=A^2$$

的等速圆周运动。圆的中心在$(0, -(15/2\pi))$，半径为A，这里A由初始条件$t=0$，$x=3/2$，$y=0$算得$A^2=(3/2)^2+(15/2\pi)^2$。

这个圆周与圆盘的边界交于(−3/2, 0)。所以昆虫从这一

点离开圆盘。

B-4. 在抛物线上任何一点有形如$(2mt^2, 2mt)$的坐标。设AB是抛物线在A点的法线弦，$A=(2mt^2, 2mt)$，$B=(2ms^2, 2ms)$。AB的斜率是$1/(s+t)$。在A的切线的斜率为$1/(2t)$，因此$s+t=-1/(2t)$。AB的长L由

$$L^2=4m^2[(s^2-t^2)^2+(s-t)^2]$$
$$=4m^2(s-t)^2[(s+t)^2+1]$$

给出。用$s=-t-1/(2t)$ 代入，得

$$L^2=4m^2\left(\frac{4t^2+1}{2t}\right)^2\frac{1+4t^2}{4t^2}=\frac{m^2}{4}\frac{(4t^2+1)^3}{t^4} \tag{1}$$

求使L最小的t的值。即使

$$\frac{4t^2+1}{t^{4/3}}=4t^{2/3}+t^{-4/3}.$$

最小。由导数等于零得两个临界点$t=\pm\sqrt{2}/2$。因为当$t\to0$，$\pm\infty$时 $L\to\infty$。两个临界点都是最小值。(1) 中两条最短的弦的任一条长为 $3\sqrt{3}|m|$。

B-5. 设以坐标轴为渐近线，已给双曲线方程为 $xy=a^2$，设点 (h,k) 在双曲线上，则$hk=a^2$，并且在 (h,k) 处的切线方程为$hy+kx-2hk=0$。切线的x与y的截距分别为$2h$与$2k$。令(r, θ) 为从原点到切线的垂线的垂足的极坐标，则 $2h\cos\theta=r$ $2k\sin\theta=r$。因此，$r^2=4hk\sin\theta\cos\theta$ 即

$$r^2=2a^2\sin2\theta. \tag{1}$$

这是所求轨迹的极坐标方程。证得每一个垂足在(1)上。

反之，满足 (1) 的每一个点(除开极点)，是某个垂足。已知这样的点$P=(r,\theta)$，它一定或者在第一或者在第三象限内。

方程

$$2h\cos\theta = r \text{ 与 } 2k\sin\theta = r$$

确定一个在双曲线上的点(h,k)，并且P是在(h, k)处的切线上的垂足。

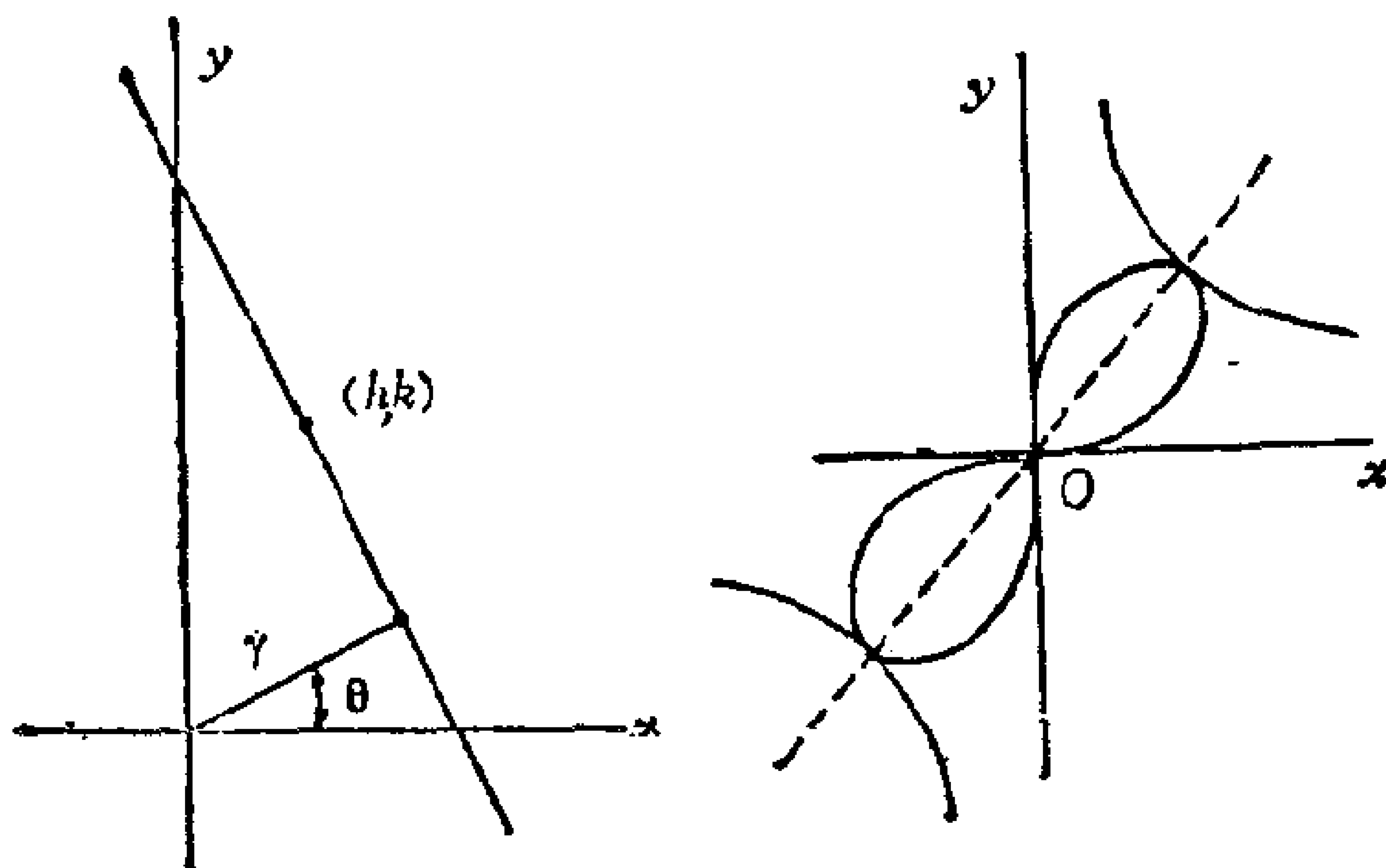


图4

轨迹是有名的伯努利双纽线.

B-6. 如果已知平面与椭球相交，则最短距离是零。不交则最短矩离是已知平面与平行于已知平面的椭球的两个切平面中较近的一个之间的距离。椭球在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面是

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

如果这个平面平行于 $Ax + By + Cz + 1 = 0$，则

$$\frac{x_0}{a^2} = kA \quad \frac{y_0}{b^2} = kB \quad \frac{z_0}{c^2} = kC,$$

这里k是常数。因为

$$1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = k^2[a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2],$$

得 $|k| = 1/m$。

从原点到已知平面的距离是

$$1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=h。$$

平行于已知平面的切平面是

$$k(Ax+By+Cz)=1。$$

从原点到任一个平行切平面的距离为

$$\frac{1}{|k|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=hm。$$

因此，如果 $m<1$，已知平面离原点比切平面远，它不与椭球相割，这时椭球到已知平面的距离是 $h(1-m)$。如果 $m\geqslant 1$，已知平面或在两切平面之间，与椭球相割；或与它们之一重合，距离皆为零。

第二届（1939年3月4日）

上午试题

A-1. 求从原点到曲线 $y^2=x^3$ 上一点的弧长，已知这一点处的切线与 x 轴成45°角。

A-2. 在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P，在 P 处的切线又再与曲线交于 Q。证明在 Q 点曲线的斜率是在 P 的斜率的四倍。

A-3. 求三次方程使它的根是

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

的根的立方。

A-4. 求两条直线方程，它们每一条都与四条直线

$$x=1,\ y=0;\qquad y=1,z=0;$$

$$z=1,\ x=0;\qquad x=y=-6z。$$

全部相交。

A-5. (i) 解微分方程组

$$dx/dt = x + y - z, \qquad dy/dt = -2x + 3y + 1.$$

当 $t = 0$，满足条件$x = y = 0$.

(ii) 一个重质点缚在一条轻的竿AB的一端A上。竿长 a，竿的B 端有绞链使它能在一个垂直平面上自由转动。竿在绞链上面竖直的位置处于平衡，然后轻微的扰动它。证竿从通过水平位置降到最低位置的时间是

$$\sqrt{a/g}\log_e(1+\sqrt{2}).$$

A-6. (i) 半径为a的圆在内半径为$3a$的一个园环的内侧滚动。求在动圆圆周上一点生成的闭曲线所包含的面积。

(ii) 炮弹击中距地面高度为h的正在飞行的飞机。已知炮弹在地面上发射时，有初速V。大炮位置及其仰角都是未知的。试推断大炮位于一圆内，其圆心在飞机的正下方，半径是

$$(V/g)\sqrt{V^2-2gh} \text{（忽略大气阻力）}.$$

A-7. (i) 求与曲线族

$$(y-k^2)^2 = x^2(k^2-x^2)$$

的所有曲线切触的曲线。作这条曲线及族中两条曲线的草图。

(ii) 如果函数 $1/(1-ax)(1-bx)$

展开为x的幂级数 $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$.

证明函数 $(1+abx)/(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$

可展开为x的幂级数 $c_0^2 + c_1^2x + c_2^2x^2 + c_3^2x^3 + \cdots$.

下午试题

B-1. 从悬链线 $y = c\cosh(x/c)$的顶点$(0,c)$，作悬链线在P点的切线的垂线L. 证明L被两坐标轴所截的长度等于P点的纵坐标y.

B-2. 求定积分

(i) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$. (ii) $\int_1^\infty \frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}$.

B-3. 已知幂级数 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$
中的 $a_n=(n^2+1)3^n$。证明存在关系式

$$a_n+p\,a_{n+1}+q\,a_{n+2}+r\,a_{n+3}=0.$$

这里p，q，r是与n无关的常数。求这些常数及幂级数的和。

B-4. 求抛物线方程，它切x轴于点$(1,0)$，y 轴于点$(0,2)$。求抛物线的轴与它的顶点的坐标。

B-5. (i) 证明：

$$\int_1^a [x]f'(x)dx=[a]f(a)-\{f(1)+\cdots+f([a])\}$$

这里a大于1，$[x]$表示不超过x的最大整数。并求出

$$\int_1^a [x^2]f'(x)dx$$

与上式相当的表达式。

(ii) 一个质点在直线上运动，仅有与速度成反比的力作用于其上。如果初速为每秒1,000呎，当它经过1,200呎后，速度为每秒900呎。试计算运行这段距离的时间，误差不超过百分之一秒。

B-6. (i) 设 $f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义，并且连续，可微。证明在 $a<x<b$上有

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

这里ξ是a与b之间的某数。

(ii) 两条均匀的竿子，每条的质量为m，长度为$2a$，相互平行，相距为b，并且其中心联线与它们垂直。试计算相互吸引

力。并考虑a为零的情形。

B-7。(i) 设

$$u=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

$$v=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$w=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots,$$

证明 $u^3+v^3+w^3-3uvw=1$。

(ii) 设中心锥

$$(ax^2+by^2)+2(px+qy)+c=0,$$

$$(ax^2+by^2)+2\lambda(px+qy)+\lambda^2 c=0,$$

λ是已知正的常数。证明：如果从原点到第一个锥的所有射线段按λ比1改变，新的射线段的端点生成第二个锥。

设P点坐标为

$$x=\frac{p}{a}\ \frac{2\lambda}{1+\lambda},\qquad y=-\frac{q}{b}\ \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

证明：如果从P到第一个锥的所有射线段按λ比1呈反向改变，新的射线段的端点生成第二个锥。注意$\lambda=1$的情形。

解答

A-1。在第一象限的弧用方程 $y=x^{3/2}$ 表示，它的斜率是$(3/2)x^{1/2}$。点 $P(x_0,y_0)$处切线成45°角，有关系 $(3/2)x_0{}^{1/2}=1$。得 $x_0=4/9$。因此所求长度为

$$\int_0^{4/9}\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{4/9}$$

$$=\frac{8}{29}(2\sqrt{2}-1).$$

A-2. 设P的坐标为(x_0,y_0)，在P处斜率为 $3x_0^2$，在P处的切线方程是

$$y=3x_0^2(x-x_0)+x_0^3.$$

切线与原来的曲线的交点有关系

$$x^3=3x_0^2(x-x_0)+x_0^3,$$

即 $(x-x_0)^2(x+2x_0)=0$。因此第二个交点是$(-2x_0,-8x_0^3)$。在这个点的斜率是$12x_0^2$，它四倍于在P处的斜率。得证。

当$x_0=0$，切线不与曲线再相交。然而，在这情形中，切线不是与曲线如通常所说的交于二重点。而是交于三重点。故有理由说这切线与这曲线"再"交相交于$(0,0)$。

A-3. 设给出的三次方程的根是 x_1，x_2，x_3。则所求方程的根是x_1^3，x_2^3，x_3^3。由

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

得 $x_1+x_2+x_3=-a$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$，

$x_1x_2x_3=-c$。

设所求方程为：

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x-x_1^3)(x-x_2^3)(x-x_3^3)=0,$$

则由 $(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$

$$+3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-3x_1x_2x_3,$$

得 $A=-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=a^3-3ab+3c$。又由

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3$$

$$=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+3abc-3c^2$$

得 $B=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3=b^3-3abc+3c^2$。最后有 $C=-x_1^3x_2^3x_3^3$。所求三次方程为

$$x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0.$$

A-4. 设所求直线L与已知的四条直线分别交于点 A、B、C、D。则有某些数a、b、c、d使得 $A=(1,0,a)$，$B=(b,1,0)$，

$C=(0,c,1)$，$D=(6d,6d,-d)$。它们共线的条件是向量

$$B-A=(b-1,\ 1,\ -a)\quad C-A=(-1,\ c,\ 1-a)$$

$$D-A=(6d-1,\ 6d,\ -d-a)$$

成比例.由前面两个的比得 $c=1/(1-b)=(a-1)/a$。(1)
由一、三两个的比得$6d=(1-6d)/(1-b)=(a+d)/a$。
(1)代入得

$$6d=(1-6d)\frac{a-1}{a}=\frac{a+d}{a}$$

去分母　$6ad=a+d$，$a+6d-1-6ad=a+d$。
相加得 $4d=a+1$。故

$$6a(a+1)=24ad=4(a+d)=5a+1。$$

二次方程$6a(a+1)=5a+1$有根$a=1/3$，$-1/2$。其他未知量对应的值为：$b=3/2$，$2/3$。$c=-2$，3。$d=1/3$，$1/8$.各直线的方向向量(与$B-A$，$C-A$,及$D-A$成比例）在这两种情形分别为$(3,6,-2)(-2,6,3)$。得两直线的参数表示

$$L_1:\ s\longrightarrow(1,0,1/3)+s(3,6,-2)$$

$$L_2:\ t\longrightarrow(1,0,-1/2)+t(-2,6,3)。$$

当 $s=0$，$1/6$，$-1/3$，$1/3$。$t=0$，$1/6$，$1/2$，$1/8$。它们依次交已知四直线。L_1与L_2的非参数形式分别为

$$y=2(x-1)=1-3z\quad 与\quad y=3(1-x)=2z+1。$$

A-5. (i) 由线性微分方程的一般存在定理,知所给方程组有满足初始条件的唯一解，并且这个解是无穷可微的。

由第一个方程解出y并微分：

$$y=dx/dt-x+3, \tag{1}$$

$$dy/dt=d^2x/dt^2-dx/dt。 \tag{2}$$

从原来的第二个方程中消去y得

$$d^2x/dt^2-dx/dt=-2x+3(dx/dt-x+3)+1, \tag{3}$$

从而 $d^2x/dt^2 - 4dx/dt + 5x = 10$。 (4)

方程有明显的特解$x=2$与通解

$$x = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + 2. \quad (5)$$

常数A与B能由初始条件$x=0$与$dx/dt=-3$算出(从已知条件及原来的第一个方程)。当 $t=0$ 得$A=-2$，$B=+1$。因此.

$$x = e^{2t}(-2\cos t + \sin t) + 2. \quad (6)$$

由(1)得 $y = e^{2t}(-\cos t + 3\sin t) + 1$。 (7)

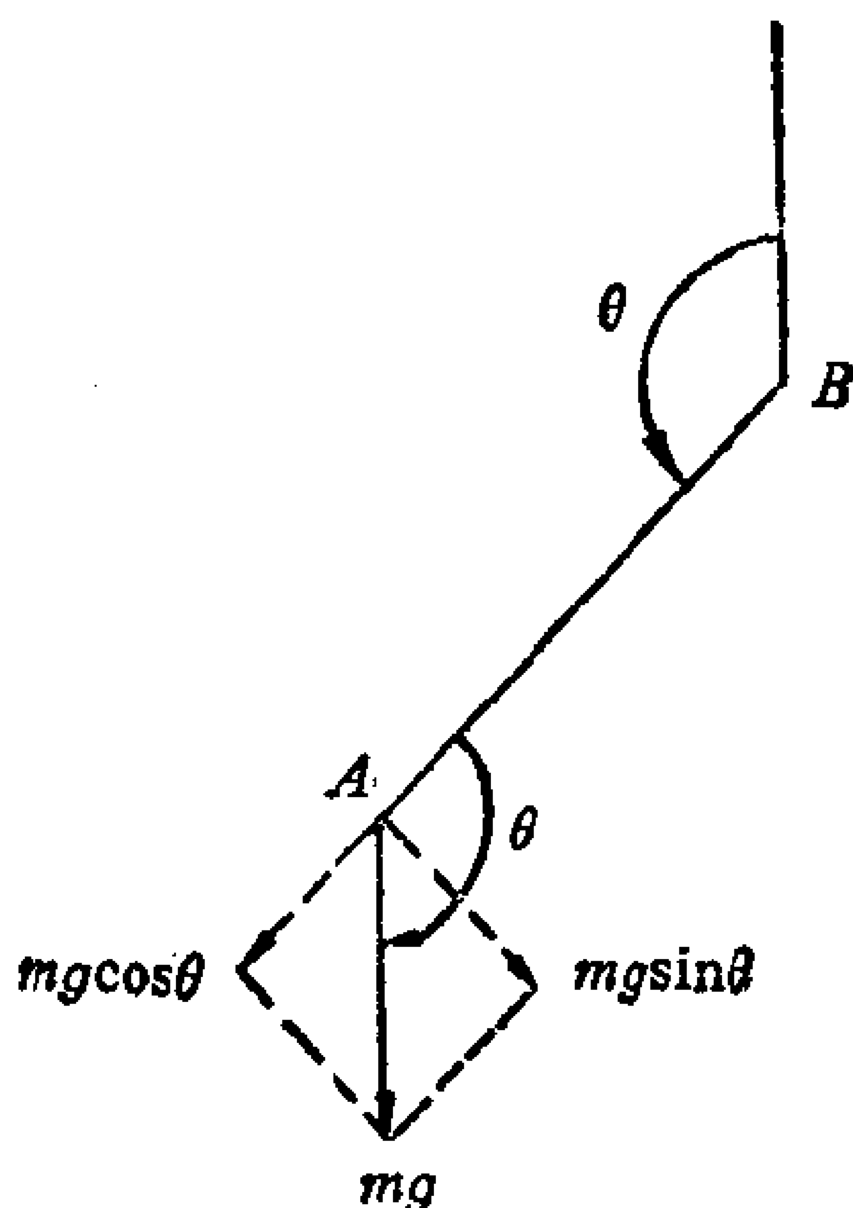


图5

容易验证方程(6)及(7)为已知方程组的解。

(ii) 设m是质点的质量。在时间t竿与竖直线交角为θ。重力mg分解为两个分量，$mg\cos\theta$沿竿作用，$mg\sin\theta$作用方向与竿垂直。前者被竿的张力（压缩力）所平衡，后者使质点沿半径a的圆周作加速运动。由牛顿第三定律有 $mg\sin\theta = mad^2\theta/dt^2$。两边乘以$(2/m)d\theta/dt$ 得

$$2g\sin\theta \; d\theta/dt = 2a(d\theta/dt)(d^2\theta/dt^2).$$

积分后得 $-2g\cos\theta + k = a(d\theta/dt)^2$。 (1)

由初始条件，当 $t=0$时 $\theta = d\theta/dt = 0$，得 $k=2g$。

故有$a(d\theta/dt)^2 = 2g(1-\cos\theta) = 4g\sin^2(\theta/2)$， (2)

得$d\theta/dt = 2\sqrt{g/a}\sin(\theta/2)$。当$0<\theta\leqslant\pi$，$d\theta/dt$ 是正的。所以选择正的平方根。

从$\theta=\pi/2$到$\theta=\pi$经过的时间为

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{d\theta}d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\csc(\theta/2)d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{a}{g}}[-\log(\csc(\theta/2)+\cot(\theta/2))]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{g}}\log(\sqrt{2}+1).$$

A-6. (i) 取直角坐标，原点在大圆的中心，P点生成的曲线与大圆接触于 $A=(3a,0)$。从图上看到，当小圆滚动，直到中心联线与OA成角θ时，P点的坐标是

$$x=2a\cos\theta+a\cos2\theta,$$

$$y=2a\sin\theta-a\sin2\theta.$$

这就是P的轨迹的参数方程。则面积为

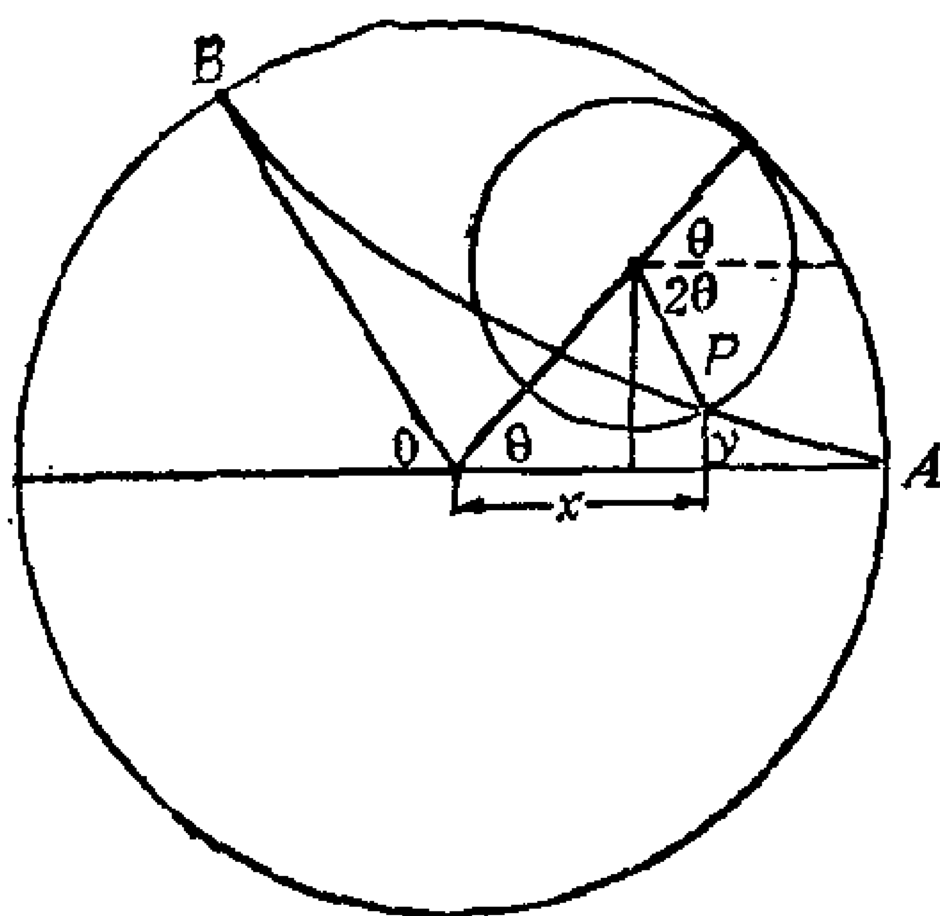


图6

$$A=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\{[2\cos\theta+\cos2\theta][2\cos\theta-2\cos2\theta]$$

$$-[2\sin\theta-\sin2\theta][-2\sin\theta-2\sin2\theta]\}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-2\cos3\theta)d\theta=2\pi a^2.$$

(ii) 选择直角坐标系使y轴垂直于地面，大炮位于原点。飞机坐标为(u,h)，$u\geqslant0$。当大炮在 $t=0$时发射，炮弹初速V，仰角α。炮弹在t时的位置是

$$x=Vt\cos\alpha,\quad y=Vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

因为炮弹击中飞机，对某个t与α有

$$u=Vt\cos\alpha,\quad h=Vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

因此 $u^2+[h+(1/2)gt^2]^2=V^2t^2$。所以 (1)

$$\frac{1}{4}g^2t^4+(gh-V^2)t^2+h^2+u^2=0. \tag{2}$$

为了(2)有实根t，一定 $(gh-V^2)^2\geqslant g^2(h^2+u^2)$。
因此 $g^2u^2\leqslant V^2(V^2-2gh)$。必有$V^2\geqslant 2gh$与

$$u\leqslant\frac{V}{g}\sqrt{V^2-2gh}. \tag{3}$$

这就证明了，当飞机被击中时大炮与飞机水平距离不超过$(V/g)\sqrt{V^2-2gh}$.

A-7. (i) 利用$y=x^2(k^2-x^2)$ 与 $y^2=x^2(k^2-x^2)$的图形的辅助，作出曲线族的草图。

当$x^2=k^2-x^2$，即当$x=\pm k\sqrt{2}$，函数有极大值.因此曲线

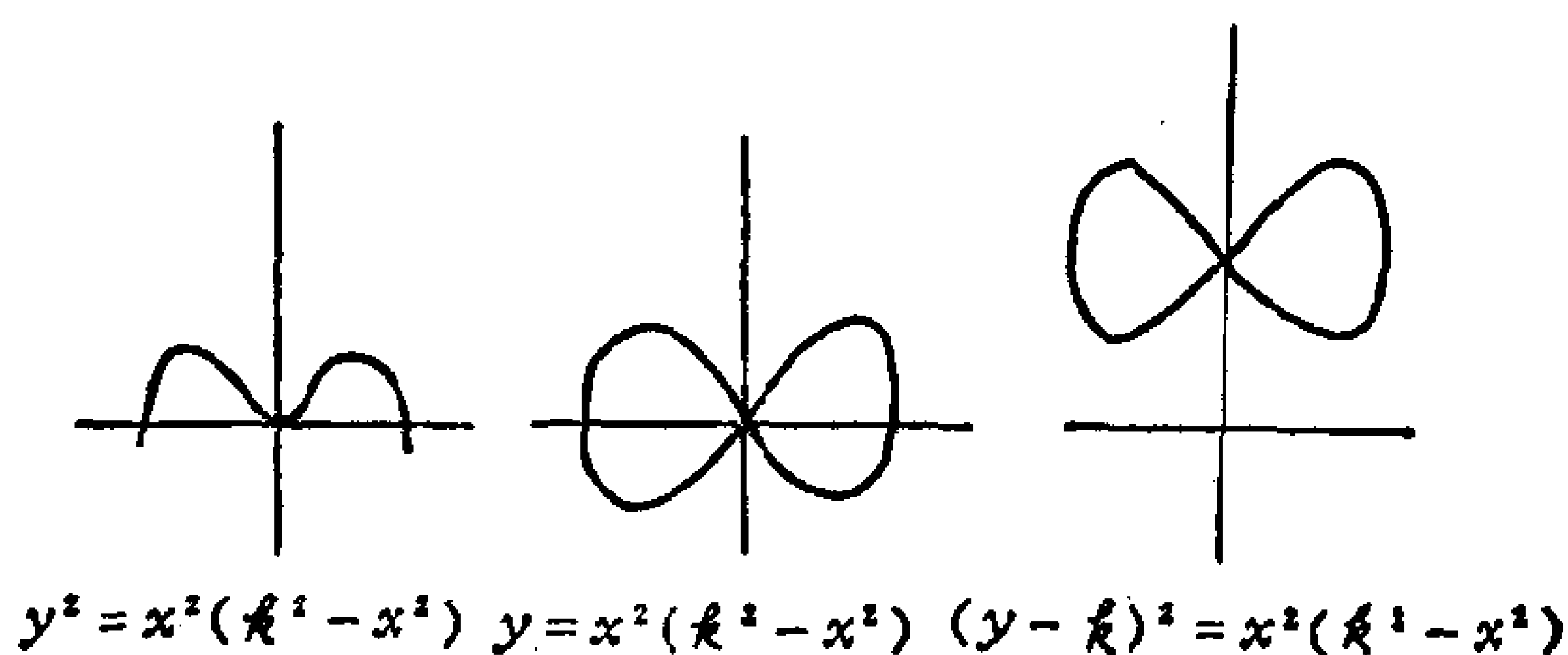


图7

$$f(x,y,k)=(y-k^2)^2-x^2(k^2-x^2)=0$$

的图在 $(\pm k/\sqrt{2},\ k^2/2)$ 有下水平切线。在$(\pm k\sqrt{2},\ 3k^2/2)$ 有上水平切线。因为f依赖于k^2，仅需考虑 $k\geqslant 0$。当$k=0$，曲线退化到一点，所以假定k是正的。显然曲线包含在带形$-k\leqslant x\leqslant k$内。在 $(\pm k,k^2)$ 有垂直的切线，这是因为这里的$\partial f/\partial y$为零而$\partial f/\partial x$不为零。在$(0,k^2)$，$\partial f/\partial x$与$\partial f/\partial y$都为零。故曲线在此有重点，并且在这个点的曲线类似一对直线。因为略去高次项后得

$$(y-k^2)^2-k^2x^2=0.$$

它的图形是两条直线 $y-k^2=\pm kx$ 合成的。

为了求包络方程，从两个方程

$$f=(y-k^2)^2-x^2(k^2-x^2)=0$$

与
$$\frac{\partial f}{\partial k}=-4k(y-k^2)-2kx^2=0$$

消去k。由第二个方程解出k，得$k=0$或$k^2=y+(1/2)x^2$。用前者代入原方程有$y^2=-x^4$，即原点。用后者代入原方程有$x^2(3x^2-4y)=0$，它是直线$x=0$与抛物线$4y=3x^2$的合成。

虽y轴与每条曲线交于一个二重点，但不与任何曲线相切，所以它不是包络的一部分。抛物线$4y=3x^2$与曲线$f(x, y, k)=0$在点$(\pm(2/\sqrt{5})k,(3/5)k^2)$处相切。设将对应于$k=0$的一点"曲线"作为相切看待，则此抛物线即为包络；或者说除去原点的抛物线是包络。

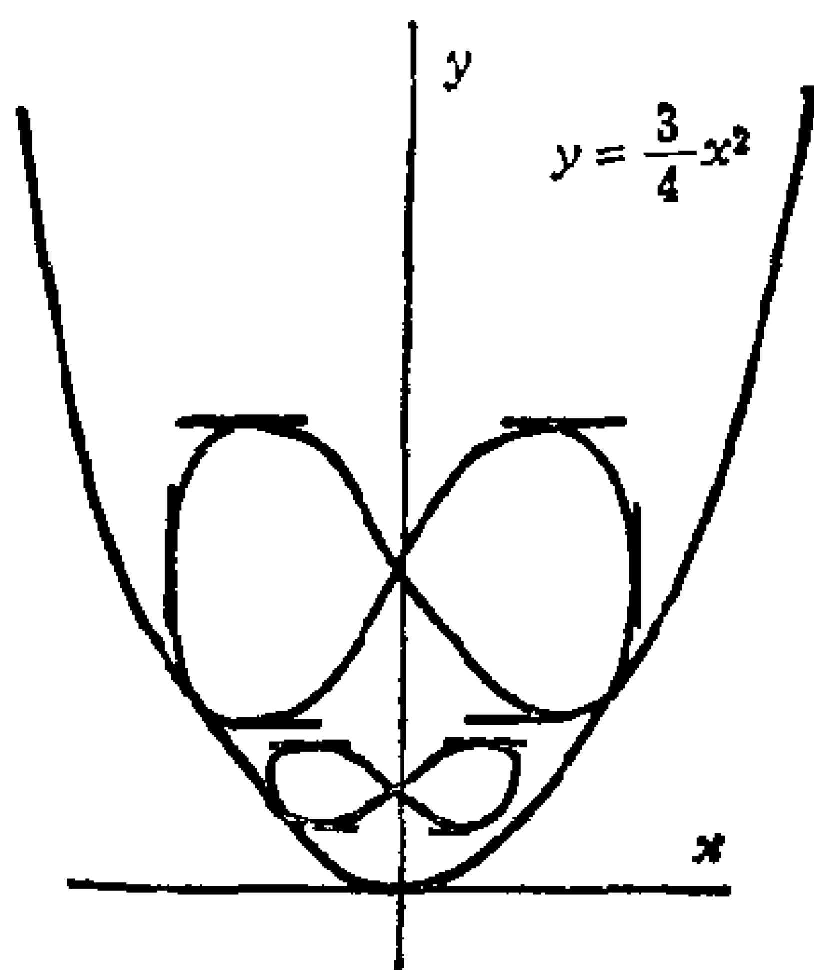


图8

(ii) 首先求系数$\{c_i\}$的显式。利用部分分式，并假设$a\neq b$，有

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{-a}{1-ax}+\frac{b}{1-bx}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(-a\sum_0^{\infty}a^nx^n+b\sum_0^{\infty}b^nx^n\right)$$

因此$c_n=(b^{n+1}-a^{n+1})/(b-a)$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n{}^2x^n=\frac{1}{(b-a)^2}\left[a^2\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n}x^n-2ab\sum_{n=0}^{\infty}a^nb^nx^n+b^2\sum_{n=0}^{\infty}b^{2n}x^n\right]$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{a^2}{1-a^2x}-\frac{2ab}{1-abx}+\frac{b^2}{1-b^2x}\right]$$

$$=\frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}$$

特别当$a=b$，则

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{1}{(1-ax)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^nx^n.$$

这时$c_n=(n+1)a^n$，对此有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n{}^2x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+1)a^{2n}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a^{2n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^{2n}x^n$$

$$=\frac{2}{(1-a^2x)^3}-\frac{1}{(1-a^2x)^2}=\frac{1+a^2x}{(1-a^2x)^3}.$$

这是当$a=b$时所求的结果。

B–1. 已知悬链线在点（$x_1, c\cosh(x_1/c)$）处的斜率是$\sinh(x_1/c)$。因此直线L的方程为

$$y-c=\frac{-x}{\sinh(x_1/c)}.$$

并且这条直线交x轴于$(c\sin(x_1/c),0)$。因此两坐标轴之间L线段的长度是$\sqrt{c^2\sinh^2(x_1/c)+c^2}=c\cosh(x_1/c)$。它正是$P$点的纵坐标。

B–2. (i)因为

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{1+\varepsilon}^{3-\delta}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\int_{1+\varepsilon}^{3-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to 0^+}}\arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^{3-\delta}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} [\arcsin(1-\delta) - \arcsin(\varepsilon - 1)]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(iii)这是无限区间的积分，令$y = x - 1$则

$$\int \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \frac{1}{e^2} \int \frac{dx}{e^{x-1} + e^{1-x}} = \frac{1}{e^2} \int \frac{dy}{e^y + e^{-y}}$$

$$= \int \frac{e^y dy}{e^{2y} + 1} = \frac{1}{e^2} \operatorname{arctg} e^y + c.$$

因此 $$\int_1^\infty \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{e^2} [\operatorname{arctg} e^{N-1} - \operatorname{arctg} e^0]$$

$$= \frac{1}{e^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4e^2}.$$

B-3．所求关系是

$$(n^2+1)3^n + p((n+1)^2+1)3^{n+1} + q((n+2)^2+1)3^{n+2} + r((n+3)^2+1)3^{n+3} = 0.$$

等价于 $$n^2(1+3p+9q+27r) + n(6p+36q+162r) + (1+6p+45q+270r) = 0. \quad (1)$$

方程(1)对所有的n成立，当且仅当

$$1+3p+9q+27r=0, \qquad p+6q+27r=0,$$

$$1+6p+45q+270r=0,$$

这些线性方程有解$p=-1$，$q=1/3$，$r=1/27$。所以

$$a_n - a_{n+1} + (1/3)a_{n+2} - (1/27)a_{n+3} = 0$$

令 $S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$，那么

$$x^3S(x)= \qquad a_0x^3+a_1x^4+\cdots+a_{n-3}x^n+\cdots,$$
$$px^2S(x)= \qquad pa_0x^2+pa_1x^3+pa_2x^4+\cdots+pa_{n-1}x^n+\cdots,$$
$$qxS(x)= \qquad qa_0x+qa_1x^2+qa_2x^3+qa_3x^4+\cdots+qa_{n-1}x^n+\cdots,$$
$$rS(x)= \qquad ra_0+ra_1x+ra_2x^2+ra_3x^3+ra_4x^4+\cdots+ra_nx^n+\cdots,$$

由它们的和，得

$$S(x)[x^3+px^2+qx+r]$$
$$=(pa_0+qa_1+ra_2)x^2+(qa_0+ra_1)x+ra_0$$

乘以 -27 得 $S(x)[1-9x+27x^2-27x^3]=1-3x+18x^2$，

所以 $$S(x)=\frac{1-3x+18x^2}{(1-3x)^3}.$$

由比值判别法知，级数在 $|x|<1/3$ 收敛。因此满足此式的 x 的值使上面推导有效。

B-4. 显然所求抛物线不通过原点。不通过原点的任何一条圆锥曲线有方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+1=0.$$

为了它在$(0,1)$与x轴相切，置$y=0$且使方程有$x=1$的重根，得 $A=1$，$D=2$。又因为它切y轴于$(0,2)$，得 $C=1/4$，$D=-1$。又因它是抛物线，故$B^2=4AC$，因而得出两方程：

$$x^2+xy+(1/4)y^2-2x-y+1=0, \qquad (1)$$
$$x^2-xy+(1/4)y^2-2x-y+1=0. \qquad (2)$$

因为 (1)能写为 $(x+(1/2)y-1)^2=0$。它是一条退化的圆锥曲线：通过已知两点的重合直线。所以(2)为所求。

(2)乘以4消去分母得

$$4x^2-4xy+y^2-8x-4y+4=0. \qquad (2)$$

因为(3)的二次项可以写成$(2x-y)^2$。经过正交变换(但不保持标度)：

$$u=2x-y \qquad v=x+2y.$$

逆变换为　$x=(1/5)(2u+v)$　　$y=(1/5)(-u+2v)$

(3)化为 $u^2-(12/5)u-(16/5)v+4=0$。　　(4)

得标准形$(u-6/5)^2-(16/5)(v-4/5)=0$。

这是以直线$u=6/5$为轴的抛物线，顶点的uv坐标$(6/5,4/5)$.对于原坐标系此轴的方程为$2x-y=6/5$,顶点坐标$(16/25,2/25)$。

B-5。(i)第一部分有

$$\int_1^a [x]f'(x)\,dx=\int_1^2 1\cdot f'(x)dx+\int_2^3 2\cdot f'(x)dx+\cdots+\int_{[a]}^a [a]f'(x)dx$$

$$=f(2)-f(1)+2[f(3)-f(2)]+\cdots+[a][f(a)-f[a]]$$

$$=[a]f(a)-\{f(1)+f(2)+\cdots+f([a])\}.$$

第二部分有

$$\int_1^a [x^2]f'(x)dx=\int_1^{\sqrt{2}} 1\cdot f'(x)dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\cdot f'(x)dx+\cdots+\int_{\sqrt{[a^2]}}^a [a^2]f'(x)dx$$

$$=(f(\sqrt{2})-f(1))+2(f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2}))+\cdots+[a^2](f(a)-f(\sqrt{[a^2]})).$$

$$=[a^2]f(a)-\{f(1)+f(\sqrt{2})+\cdots+f(\sqrt{[a^2]})\}.$$

(ii)　运动的微分方程是$md^2x/dt^2=-kdx/dt$。边界条件是$x=0$　$dx/dt=1000$，当$t=0$；$x=1200$，$dx/dt=900$,当$t=T$。T是所求时间。

令$b=k/m$，则$d^2x/dt^2=(-b)dx/dt$。即

$$dx/dt=-bx+c。\qquad(1)$$

由边界条件得$1000=c$，$900=-1200b+c$。即$b=1/12$。由这些值与(1)，得

$$T=\int_0^{1200}\frac{dt}{dx}=\int_0^{1200}\frac{dx}{1000-(x/12)}=12\log\frac{10}{9}.$$

即 $T=-12\log(9/10)$。利用$\log(1-x)$的级数展开

$$-\log(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots.$$

取$x=1/10$，有

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}<-\log\frac{9}{10}<\frac{1}{10}+\frac{1}{200}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{1}{10}\right|^n.$$

下界为$.1+.005+.0003=.1053$，上界为$.1+.005+1/2700<.1054$。故$1.2636<-12\log(9/10)<1.2648$。$T\approx1.26$秒，误差不差过百分之一秒。

B-6. (i) 设f在$[a,b]$上连续，并且在(a,b)上每一点有二阶导数。对于$a<x<b$的一个固定的x，置

$$g(t)=\begin{vmatrix} f(t) & t^2 & t & 1\\ f(x) & x^2 & x & 1\\ f(a) & a^2 & a & 1\\ f(b) & b^2 & b & 1\end{vmatrix}\tag{1}$$

则$g(a)=g(x)=g(b)=0$。由中值定理有数α与β，使得$a<\alpha<x<\beta<b$，$g'(\alpha)=g'(\beta)=0$。再用一次中值定理，有ξ使得$\alpha<\xi<\beta$ $g''(\xi)=0$。结合(1)再按第一行展开得所求

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{[f(x)-f(a)]/(x-a)-[f(a)-f(b)]/(a-b)}{x-b}.$$

(ii) 首先求质点P与一条均匀的竿子之间的吸引力。设

质点P的质量μ，位于点(h, b)，均匀竿子质量m。沿x轴置于$(0,0)$到$(0,2a)$处。

考察竿子上一短线段S，它的中心$Q=(x,0)$，长度为Δx。令α,β,θ是如图所标记的角度．S的质量为$m\Delta x/2a$。如果S的质量集中于Q，S与P之间的吸引力是

$$G\mu\cdot\frac{m}{2a}\Delta x\cdot\frac{1}{b^2\operatorname{cosec}^2\theta}.$$

它的垂直分量是

$$G\mu\cdot\frac{m}{2a}\Delta x\frac{1}{b^2\operatorname{cosec}^2\theta}\sin\theta.$$

这里G是引力常数．因此P与竿子之间总吸引力的垂直分量为

$$f_y=\frac{G\mu m}{2ab^2}\int_0^{2a}\sin^3\theta dx.$$

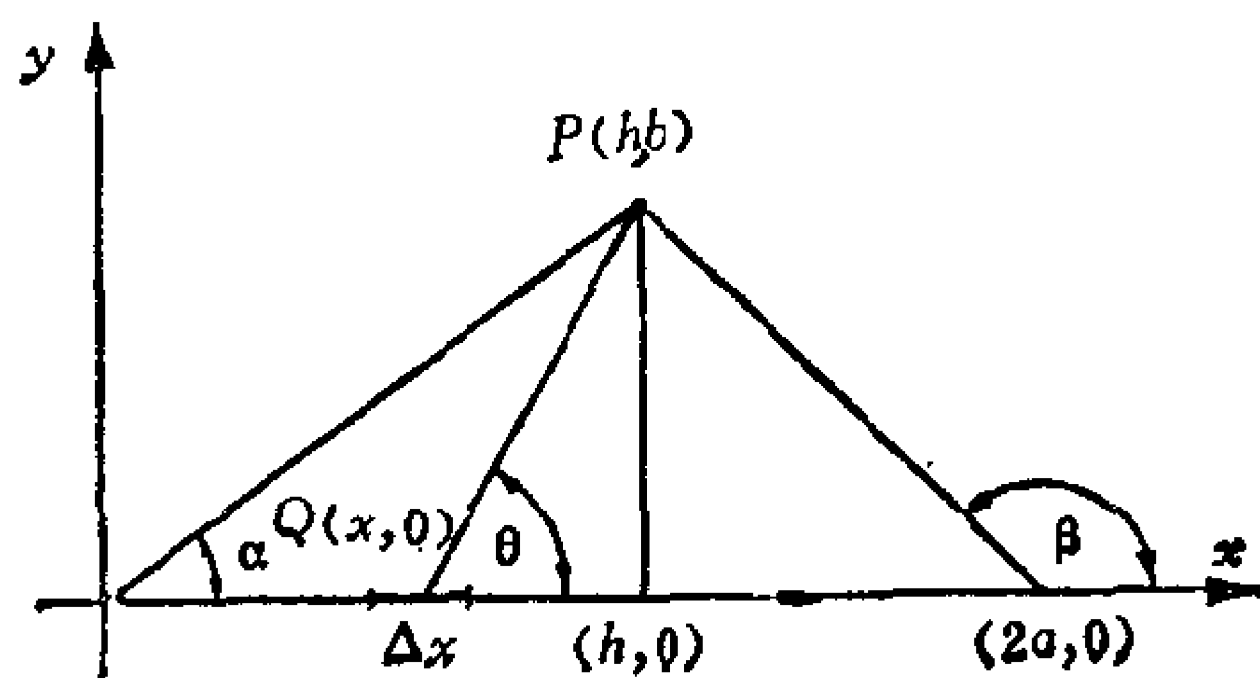


图9

现在x与θ有关系$x+b\cos\theta=h$。如果将积分变量换为θ，有

$$f_y=\frac{G\mu m}{2ab}\int_\alpha^\beta\sin\theta\, d\theta=\frac{G\mu m}{2ab}(\cos\alpha-\cos\beta)$$

$$=\frac{G\mu m}{2ab}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}-\frac{h-2a}{\sqrt{(h-2a)^2+b^2}}\right).$$

现在考察两平行的竿子。第二条放在从$(0,b)$到$(2a,b)$处。

可将上面这条竿子长度为Δh的短线段作为一个有质量 $m\Delta h/2a$ 的质点。如前法，两竿之间的引力的垂直分量为

$$F_y=\frac{Gm^2}{4a^2b}\int_0^{2a}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}-\frac{h-2a}{\sqrt{(h-2a)^2+b^2}}\right)dh$$

$$=\frac{Gm^2}{4a^2b}\left[\sqrt{h^2+b^2}-\sqrt{(h-2a)^2+b^2}\right]_0^{2a}.$$

$$=\frac{Gm^2}{2a^2b}\left(\sqrt{4a^2+b^2}-b\right).$$

显然由对称性，全部的力沿着中心联线作用，于是这个力即垂直分力。

B-7. (i)令$\lambda=\exp(2\pi i/3)$是单位立方根，则$1+\lambda+\lambda^2=0$。故

$$u^3+v^3+w^3+3uvw=(u+v+w)(u+\lambda v+\lambda^2 w)$$

$$\cdot(u+\lambda^2 v+\lambda w)$$

$$=(\exp x)(\exp\lambda x)(\exp\lambda^2 x)$$

$$=\exp 0=1.$$

(ii) 设两个锥C与D分别为

C: $(ax^2+by^2)+2(px+qy)+c=0$,

D: $(ax^2+by^2)+2\lambda(px+qy)+\lambda^2 c=0$.

假设点(x_0,y_0)在C上，并且它变换到(x_1,y_1)，这里$(x_1,y_1)=(\lambda x_0,\lambda y_0)$。则在方程$D$中用$(x_1,y_1)$代入，得

$$ax_1^2+by_1^2+2\lambda(px_1+qy_1)+\lambda^2 c$$

$$=\lambda^2[ax_0^2+by_0^2+2(px_0+qy_0)+c]=0.$$

因为(x_0,y_0)是在C上，所以(x_1,y_1)在D上。反之亦然[这时需要除以λ^2，用上面假设$\lambda\neq 0$]。

在第二个变换下，点(x_0,y_0)变成点(x_2,y_2)：

$$x_2=-\lambda\left(x_0+\frac{p}{a}\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)-\frac{p}{a}\frac{2\lambda}{1+\lambda}=-\lambda\left(x_0+\frac{2p}{a}\right)$$

$$y_2=-\lambda\left(y_0+\frac{q}{b}\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)-\frac{q}{b}\frac{2\lambda}{1+\lambda}=-\lambda\left(y_0+\frac{2q}{b}\right).$$

则当(x_0,y_0)在C上，有

$$\begin{aligned}&ax_2^2+by_2^2+2\lambda(px_2+qy_2)+\lambda^2c\\&=\lambda^2\Big[ax_0^2+4px_0+\frac{4p^2}{a}+by_0^2+4qy_0+\frac{4q^2}{b}-2\Big(px_0\\&\quad+\frac{2p^2}{a}+qy_0+\frac{2q^2}{b}\Big)+c\Big]\\&=\lambda^2[ax_0^2+by_0^2+2(px_0+qy_0)+c]=0.\end{aligned}$$

因此(x_2,y_2)在D上。如前同样证明(x_2,y_2)在D上，则(x_0,y_0)在C上。

如果$\lambda=1$，两个锥相同。这个锥对于$(-p/a,-q/b)$呈中心对称。方程为

$$a\left(x+\frac{p}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{q}{b}\right)^2+c'=0.$$

在这种情形，第一个变换是恒等变换而第二个变换是关于锥的中心变换。

第三届(1940年3月2日)

上午试题

A-1. 证明：如果$f(x)$是具有整系数的多项式，并且存在一个整数k，使得整数$f(1)$，$f(2)$，$\cdots f(k)$均不被k除尽，则$f(x)$没有整根。

A-2. 设A与B是在连续且有连续导数的曲线$y=f(x)$上的

两个固定点。设弧AB对于弦AB是凹的。如果P是弧AB上的一个点，使得$AP+PB$最大。求证PA与PB与曲线$y=f(x)$在P点的切线有相同的交角。

A-3. 求$f(x)$，当适当选择积分常数时，使得

$$\int[f(x)]^n dx=\left|\int f(x)dx\right|^n.$$

A-4. 抛物线$y^2=-4px$沿着抛物线$y^2=4px$作不带滑动的滚动。求滚动着的抛物线顶点的轨迹方程。

A-5. 证明：有四条直线上与六个椭圆上的点满足联立方程

$$x^4-x^2=y^4-y^2=z^4-z^2,$$

且没有另外的点满足它。

A-6. $f(x)$是n次多项式，使得$f(x)$的一个幂次能被它的导数$f'(x)$的一个幂次所除尽，即$[f(x)]^p$被$[f'(x)]^q$除尽，p，q是正整数。求证：$f(x)$被$f'(x)$除尽并且$f(x)$有一个n重的单根。

A-7. 如果$u_1^2+u_2^2+\cdots$与$v_1^2+v_2^2+\cdots$是收敛的实常数级数。证明$(u_1-v_1)^p+(u_2-v_2)^p+\cdots$是收敛的，$p$是$\geqslant 2$的整数。

A-8. 有一个以直线

$A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_3x+B_3y+C_3=0$，

为边界的三角形。证明它的面积(不计较符号)是：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 \Bigg/ 2\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

下午试题

B-1。有一颗子弹用初速v_0与水平线成角α射出。除重力外没有其他的力作用于其上。求始点起直到它落在水平面上所经路径之长。并证明当$\sin\alpha\log(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=1$
时，弹道最长。

B-2。在半径为R的圆柱体上，镗上一个半径为$r(r\leqslant R)$的圆柱形的孔，两轴成直角。

(i) 证明小圆柱套上大圆柱的表面的面积为

$$S=8r^2\int_0^1\frac{1-v^2}{\sqrt{(1+v^2)(1-m^2v^2)}}dv$$

这里$m=r/R$。

(ii) 如果

$$K=\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}},$$

$$E=\int_0^1\sqrt{\frac{1-m^2v^2}{1-v^2}}dv.$$

证明$S=8[k^2E-(R^2-r^2)K]$。

B-3。从笛卡儿平面内任一点(a,b)，证明

(i) 能对抛物线$y^2=4px$作三条实的或虚的法线；(ii) 如果$4(2p-a)^2+27pb^2<0$，这些法线是实的并且互不相同；(iii) 如果(a,b)在曲线$27py^2=4(x-2p)^2$上，则它们中的两个重合；(iv)仅当(a,b)是点$(2p,0)$，三个全重合。

B-4。证明与曲面

$$ax^2+by^2+cz^2=1\qquad(abc\neq0)\tag{1}$$

相切的三个互相垂直的平面的交点在球面

$$x^2+y^2+z^2=(1/a)+(1/b)+(1/c) \qquad (2)$$

上。

B-5. 设a,b,c是

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

的根，试确定所有这样的有理值a,b,c。

B-6. 证明

$$\begin{vmatrix} a_1^2+k & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+k & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2+k \end{vmatrix}$$

被k^{n-1}除尽，并求其他因子。

B-7. 比较$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$与$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$的大小，这里$n>8$。

解答

A-1. 假设f有一个整数根r，则$f(x)=(x-r)g(x)$。这里$g(x)$也是整系数多项式。存在整数p与q使得$r=p+kq$，$1\leqslant p\leqslant k$。而

$$f(p)=(p-r)g(p)=-kqg(p)$$

因此$f(p)$被k除尽，与假设矛盾。命题得证。

A-2. 本题是下面引理的推论。

引理 假设S是平面π的子集，A与B是π上的两点，P是S的一个点，使得$AP+PB\geqslant AX+XB$，对所有在S上的X成立。则通过P垂直于$\angle APB$的角平分线的直线t是s的支撑线(即s是包含在以t为边的闭半平面内)。并且如果P不在线段AB上，则P是$S\cap t$上的唯一点。

证明 假设P不在线段AB上，则A与B是在直线t的同一边。令B'是B对t的反射点，则A,P,B'共线。

令Q是在包含B'的开半平面内的任一点，则$QB>QB'$。并且有

$AQ+QB>AQ+QB'\geqslant AB'=AP+PB'=AP+PB$。于是$Q\notin S$，如果$Q$是$t$上除$P$外的另一点，有

$$AQ+QB=AQ+QB'>AB'=AP+PB,$$

也有$Q\notin S$。所以除开P点本身外，S在另一个开半平面内。

如果P是在线段AB上，显然S在AB上，并且因此同时在以t为边的两个闭的半平面内。

应用这个结果于本问题。知道PA与PB与可微曲线$y=f(x)$的弧AB的支撑线有相同的交角。但是，当可微的弧除在一端外有在P点(P不是A也不是B)的支撑线。则这条线就是在P点的切线。详细说来，如果支撑线方程为$y=mx+b$(不能是竖直线)，且$P=(x_0,y_0)$则可微方程

$$g(x)=f(x)-mx-b$$

在x_0处或者有最大值或者有最小值。所以$g'(x_0)=0$。因此$f'(x_0)=m$，即曲线的切线是$y=mx+b$。

图10

A-3. 假设实连续函数f定义在所考虑的区间上。置$g(x)=\int f(x)^n dx$与$h(x)=\int f(x)dx$.问题是求定义在区间上C^1类函数所有的配对g与h，使得

$$g(x)=h(x)^n, \qquad (1)$$

$$g'(x)=h'(x)^n. \qquad (2)$$

如果$n=1$，显然任何连续函数与对应函数g与h都是问题的解。现在设$n\neq 1$，由(1)，微分之，得

$$g'(x)=nh(x)^{n-1}h'(x), \tag{3}$$

由此得

$$h'(x)^n=nh(x)^{n-1}h'(x), \tag{4}$$

$$h'(x)^{n-1}=nh(x)^{n-1}, \tag{5}$$

$$h'(x)=Ah(x). \tag{6}$$

其中$A=n^{1/(n-1)}$。因此对某个常数C有

$$h(x)=ce^{Ax}. \tag{7}$$

最后得

$$f(x)=h'(x)=cAe^{Ax}. \tag{8}$$

现在回过头来检查上面的论述。因为从(4)到(5)要$h'(x)\neq 0$。暂时限制在开集I上,h与h'都不为零。关于指数的意义还得讨论几种情形：

情形1。假设n不能表示为两个整数的商$n=p/q$，这里q是奇数。即n或者是无理数或者是有偶数分母的有理数。在这种情形，如果$b<0$，b^n没有意义。因此h与h'一定是正的，并且当$n<0$ (4)显然不可能。所以一定有$n>0$。其解必附有积分常数c一定是正的这个条件。

情形2。$n=p/q$这里p与q是整数，q是奇数.则$b^n=(\sqrt[q]{b})^p$对于正的与负的b均有定义。由(1)，(2)得出方程(3)，(4)与(5)。为了得出(6)，再分情形讨论：

情形2a。p是奇数。则$n-1=(p-q)/q$有偶数的分子，所以$h(x)^{n-1}$与$h'(x)^{n-1}$是正的。并且由(5)得$n>0$。因为我们已排除$n-1=0$的可能性，即可推得(6)，除开可由代换

$$h'(x)=-Ah(x) \tag{6'}$$

而导出

$$h(x)=ce^{-Ax} \tag{7'}$$

$$f(x)=-cAe^{-Ax} \tag{8'}$$

在(7)与(7')中c可以是负的，仅需$c\neq 0$。

情形2b p是偶数则$h(x)^{n-1}$与$h'(x)^{n-1}$分别与$h(x)$及$h'(x)$同符号，所以n可以或者都是正的或者都是负的（在题中对h与h'的假设下它不能是零）。则公式的解正确，$n^{1/(n-1)}$有定义，常数c可以成为正或为负。

现在检查对于h与h'的假设．如果定义在区间J上的一个解h，使得或者h或者h'在J的某点上为零，但不在整个J上如此。则将在J的开子区间I，h与h'均不为零，但在I的一个端点处或者h或者h'为零．在I上h和h'已证明知为指数函数（一直假定$n\neq1$），并且这个函数在I的端点不以零为极限．因此不能有这样的解，并且不包含在上面的那些解中的唯有在区间恒等于零的解。显然当$n>0$时这些函数是解。

注意到当$n=0$，因为在(1)和(2)中，$g(x)=1$，$g'(x)=1$，永远不会有解。

总之，所求全部的解如下：当$n=1$，任何连续函数f是解。当$n>0$，$n\neq1$，由(8)得的解以$c\geqslant0$．并且，当$n=p/q$，q是奇数，常数c可以取负值．而当p也是奇数，可得以c为任何数的附加解(8′)。当$n=0$没有解。当$n<0$，除非$n=p/q$，p是偶数而q是奇数，在此情形下，(8)为对$c\neq0$的一解，否则无解。

A-4. 如果滚动的抛物线与固定的抛物线相切于Q，显然由于对称性滚动的抛物线的顶点V是关于在Q点的切线的原点的（固定抛物线的顶点）反射。

在草图内，默认$p>0$．假设Q是点$(4pt^2, 4pt)$［在固定抛物线上的任何一点对于某个t有这样的形式］．在Q点的切线的斜率是$1/(2t)$并且切线方程是

$$y=(1/2t)x+2pt.$$

通过原点在这条直线上的垂线，有方程

$$y=2tx.$$

两线交于$\left(\frac{-4pt^2}{1+4t^2}, \frac{8pt^3}{1+4t^2}\right)$。

所以顶点V在

$$\left(\frac{-8pt^2}{1+4t^2}, \frac{16pt^3}{1+4t^2}\right).$$

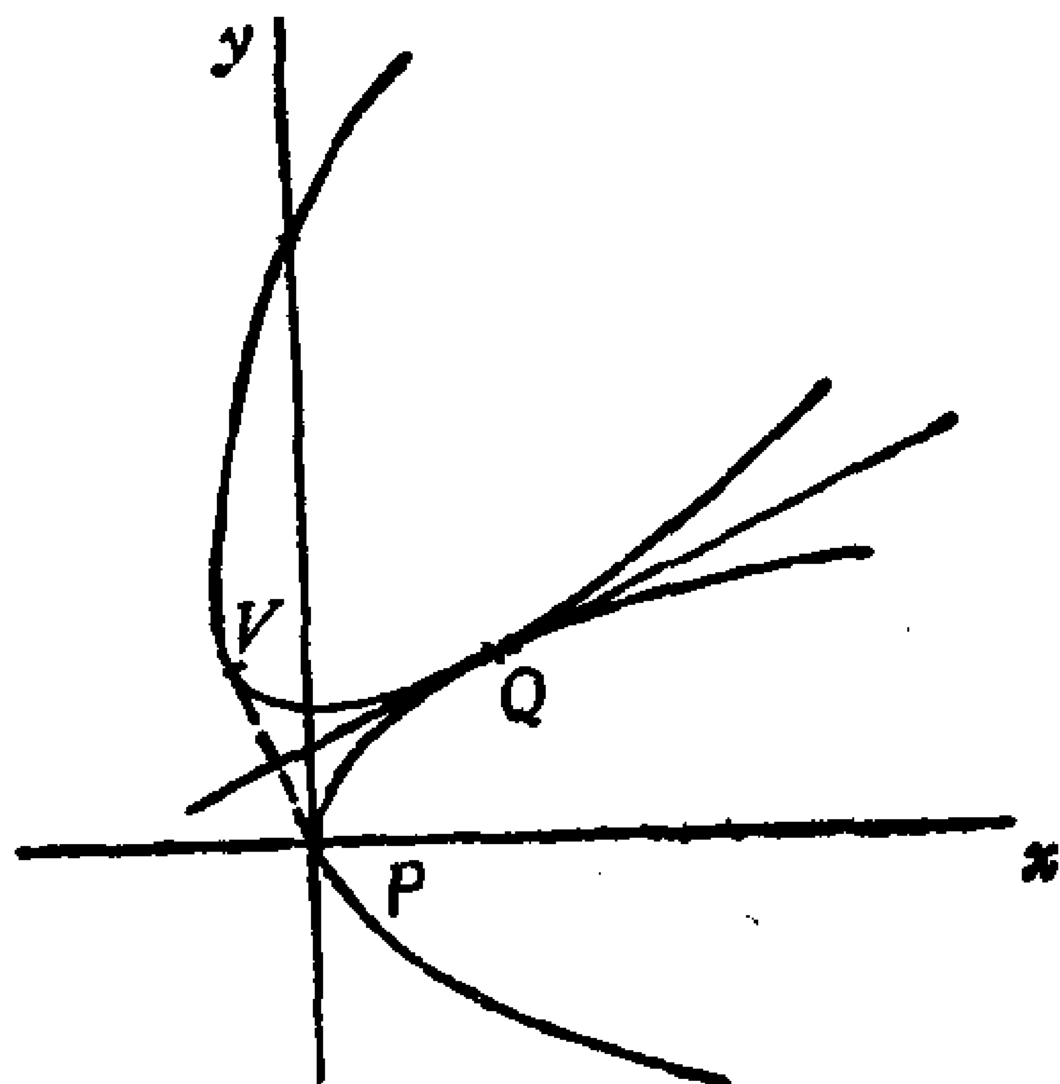


图11

得点V轨迹的参数方程

$$x=\frac{-8pt^2}{1+4t^2},\quad y=\frac{16pt^3}{1+4t^2}.$$

因为$-2t=y/x$（当$x\neq 0$），消去t得

$$x=\frac{-2p(y/x)^2}{1+(y/x)^2}.$$

即 $$(x^2+y^2)x+2py^2=0. \qquad (1)$$

它是满足轨迹的所有的点（包括$(0,0)$）的方程。

反之，满足(1)的任何其他的一点(x,y)除原点外导出的值$t(=y/2x)$是在轨迹上。所以(1)为所求的轨迹。

A-5。令L表示已给方程的轨迹。一个点在L上当仅当它的坐标(x,y,z)满足

$$(x^2+y^2-1)(x^2-y^2)=0, \qquad (1)$$

$$(y^2+z^2-1)(y^2-z^2)=0, \qquad (2)$$

$$(z^2+x^2-1)(z^2-x^2)=0. \qquad (3)$$

轨迹A,B,C,D定义如下

$A\ \begin{cases}x^2+y^2-1=0\\ y^2-z^2=0,\end{cases}$ $\quad B\ \begin{cases}y^2-z^2-1=0\\ z^2-x^2=0,\end{cases}$

$C\ \begin{cases}z^2+x^2-1=0\\ x^2-y^2=0,\end{cases}$ $\quad D\ \ x^2=y^2=z^2.$

A是一个直圆柱与两个平面$z=y$与$z=-y$的并的交。因此A是两个椭圆的并。同样B与C也各是两椭圆的并。此外D是

四条直线的并，即

$$x=y=z,\ x=y=-z,\ x=-y=z,\ x=-y=-z.$$

事实上，A与D的任何公共点也在D上，故A与B是不同的椭圆。对于B与C以及对于C与A有相似的结论。因此，$A\cup B\cup C\cup D$构成6个（不同的）椭圆，四条不同直线的并。

现在证明$L=A\cup B\cup C\cup D$。如果$(x,y,z)\in A$则显然(x,y,z)满足(1)(2)与(3)，后者是由于

$$z^2+x^2-1=(x^2+y^2-1)+(z^2-y^2)=0,$$

所以$A\subseteq L$。同理$B\subseteq L, C\subseteq L$。立即得$D\subseteq L$。故$A\cup B\cup C\cup D\subseteq L$。

现在考虑不在D上的L的点(x,y,z)。所以假设$x^2\neq y^2$，$x^2\neq z^2$。因为p满足(1)与(3)有

$$x^2+y^2-1=0,\ x^2+z^2-1=0.$$

故$y^2=z^2$，于是$p\in A$。对其他不等式的情形，用同样的论证导出$p\in B$或$p\in C$。因此$L\subseteq A\cup B\cup C\cup D$。的确$L=A\cup B\cup C\cup D$是四条直线与六个椭圆的并。

A-6. 令f的因式分解为

$$f=ap_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}.$$

这里a是纯量，$p_1,p_2,\cdots,p_k$是不同的不可约首1多项式，并且$e_1,e_2,\cdots,e_k$是正整数。利用对于乘积的微分规则

$$f'=a\sum_{i=1}^{k}e_ip_1^{e_1}\cdots p_{i-1}^{e_{i-1}}p_i^{e_i-1}p_{i+1}^{e_{i+1}}\cdots p_k^{e_k}\cdot p_i'$$

因为$p_i^{e_i-1}$除尽和的每一项而$p_i^{e_i}$除尽除一项外的所有的项，显然

$$f'=p_1^{e_1-1}p_2^{e_2-1}\cdots p_k^{e_k-1}\cdot g. \tag{1}$$

这里g是不被任何p_i除尽的多项式。因为f的某次幂能被f'的某次幂除尽，g的任何不可约因子除尽f的某次幂。由多项式的因

式分解唯一性定理这是不可能的。所以g没有不可约因子；故

g的次数为0。 (2)

现在f的次数$n=\sum_{i=1}^{k}e_id_i$，这里d_i是p_i的次数。由(1)与(2)，f'的次数是$n-1=\sum_{i=1}^{k}(e_i-1)d_i$，相减得 $1=\sum_{i=1}^{k}d_i$。

因为那些d是整数，所以$k=1$，$d_1=1$。因此

$$f=ap_1^{e_1}=ap_1^n。$$

其中p_1是线性多项式。因此f有n重根，并且确能被$f'=nap^{n-1}$除尽。

A-7。令$A=u_1^2+u_2^2+\cdots$与$B=v_1^2+v_2^2+\cdots$

因为 $(u_i+v_i)^2+(u_i-v_i)^2=2u_i^2+2v_i^2$，

对于任何整数n，有

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}u_i^2+2\sum_{i=1}^{n}v_i^2\leqslant 2A+2B。$$

因为所有的项非负，因此$\sum_{i=1}^{\infty}(u_i-v_i)^2$是收敛的。因此这些项以零为极限。即有一整数$k$使得对所有的$i\geqslant k$，$(u_i-v_i)^2<1$。如果$p$是一个整数，并且$p\geqslant 2$，则$|u_i-v_i|^p\leqslant(u_i-v_i)^2$，对所有的整数$i\geqslant k$成立。故级数$\sum_{i=1}^{\infty}(u_i-v_i)^p$绝对收敛，所以收敛。

A-8。令L_i是方程为$A_ix+B_iy+C_i=0$的直线。(x_i,y_i)是三角形的与L_i相对的顶点。设

$$M=\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则三角形面积是$(1/2)|detX|$。

因为点(x_i,y_i)在边L_j上而$i\neq j$。得

$$MX=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

这里对角线上的元是待定的。

如果我们用克莱姆法解方程组

$$M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则得 $z\det M=d_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$.

由(1)知解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

因此 $d_1=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$.

同理 $d_2=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ $d_3=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

所以由(1)

$$(\det M)(\det X)=\frac{(\det M)^3}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

现在$\det M\neq 0$，由已知直线构成的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}|\det X|=\pm\frac{(\det M)^2}{2\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

B-1. 运动的微分方程（用 x表示水平坐标，y表示竖直坐标，取初始点为原点）

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

g是重力加速度．利用初始条件解得

$$x=v_0t\cos\alpha \qquad y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

射程持续从$t=0$到$t=T=(2v_0\sin\alpha)/g$．弹道的长度为

$$S(\alpha)=\int_0^T\cdot\sqrt{(v_0\sin\alpha-gt)^2+(v_0\cos\alpha)^2}dt.$$

置$w=v_0\sin\alpha-gt$与$u=v_0\cos\alpha$得

$$S(\alpha)=-\frac{1}{g}\int_{v_0\sin\alpha}^{-v_0\sin\alpha}\sqrt{w^2+u^2}dw$$

$$=\frac{2}{g}\int_0^{v_0\sin\alpha}\sqrt{w^2+u^2}dw.$$

注意到u依赖于α，将上式对α微分得

$$S'(\alpha)=\frac{2}{g}\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+u^2}\ \ v_0\cos\alpha+\frac{2}{g}\int_0^{v_0\sin\alpha}\frac{udw}{\sqrt{w^2+u^2}}\frac{du}{d\alpha}$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}\left(1-\sin\alpha\int_0^{v_0\sin\alpha}\frac{dw}{\sqrt{w^2+u^2}}\right)$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}(1-\sin\alpha[\log(w+\sqrt{w^2+u^2}]_0^{v_0\sin\alpha})$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g}(1-\sin\alpha\log(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)).$$

现在$\sin\alpha$从0增加到1，α同时由0变到$\pi/2$，并且$\log(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)$从0增加到$+\infty$．这时$\cos\alpha$除$\alpha=\pi/2$外是正的．因此$\sin\alpha\log(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=1$有唯一的值$\alpha=\alpha_0\in(0,\pi/2)$．并且当$0<\alpha<\alpha_0$，$S'(\alpha)>0$；当$\alpha_0<\alpha<\pi/2$，$S'(\alpha)<0$．因为$S$显然在$[0,\pi/2]$上是连续函数，在区间上$\alpha_0$处有唯一的最大值．即

$\alpha = d_0$时弹道最长。计算得近似值$\alpha_0 = 56°28'$。

B-2。作草图。

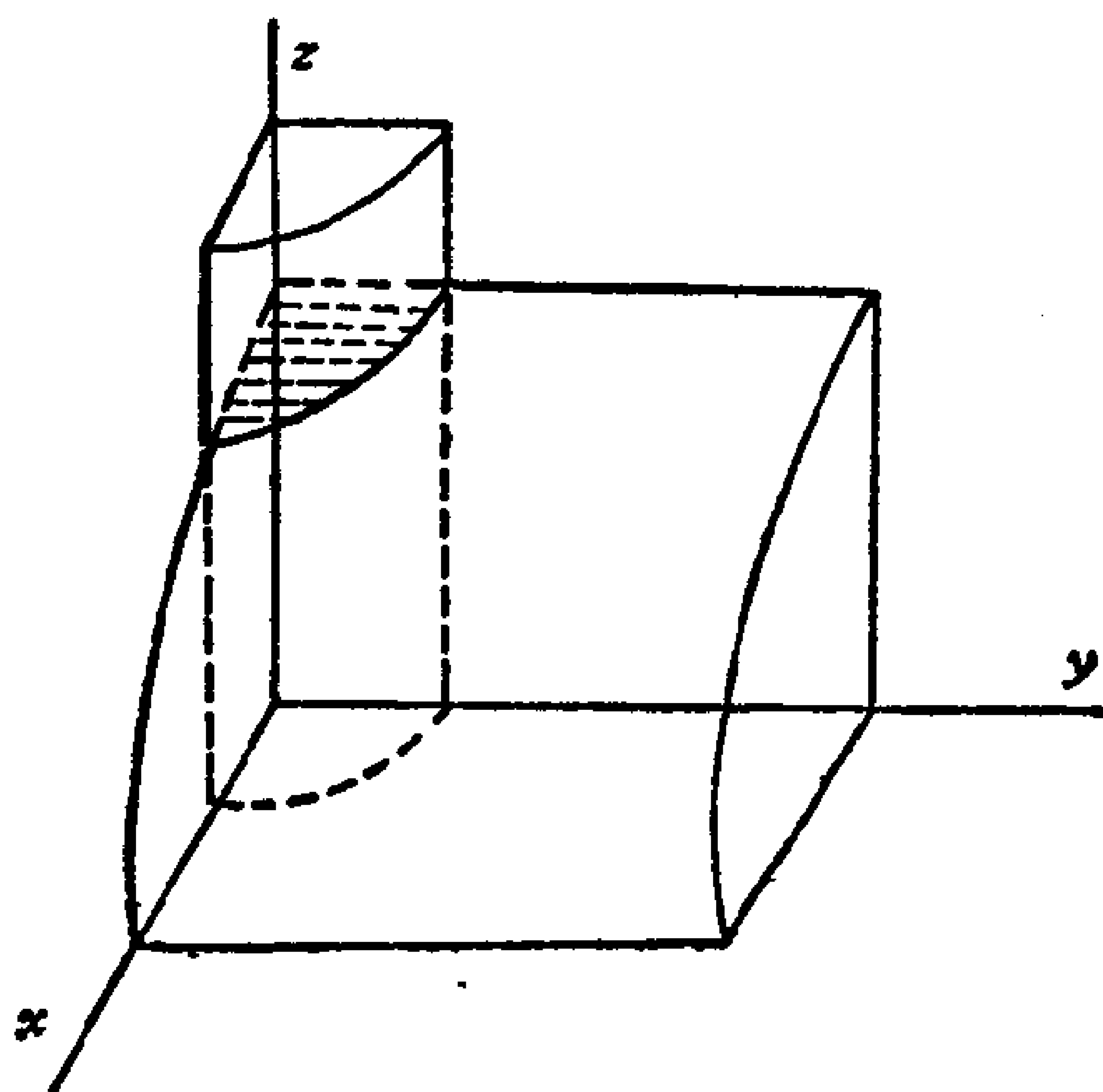


图12

令两个圆柱曲面是$x^2 + z^2 = R^2$与$x^2 + y^2 = r^2$，这里$r \leqslant R$。图中阴影标记的面积是在一个卦限内所求的面积的部分。这个曲面的方程是

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}。$$

故面积为$S = 8\iint\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dydx$。

这里重积分的区域是

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2 \quad x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0。$$

化为二次积分

$$S = 8\int_0^r\left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dy\right)dx$$

$$= 8R\int_0^r\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{R^2 - x^2}}dx。$$

令$x/r=v$，$r/R=m$，结果简化为

$$S=8r^2\int_0^1\frac{1-v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}dv.$$

得(i)。

为了得(ii)，记$r^2(1-v^2)=R^2(1-m^2v^2)-(R^2-r^2)$，代入得

$$S=8\int_0^1\frac{R^2(1-m^2v^2)}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}dv$$

$$-8\int_0^1\frac{(R^2-r^2)}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}dv$$

$$=8[R^2E-(R^2-r^2)K].$$

B-3. 抛物线在点(x,y)的斜率为$2p/y$，因此联结(a,b)与(x,y)的直线是抛物线在(x,y)的法线，当且仅当

$$(y-b)=(-y/2p)(x-a)=(-y/2p)[(y^2/4p)-a]$$

($y=0$的情形也包含在这个方程内)。由此得到(1)

$$y^3+4p(2p-a)y-8p^2b=0.$$

如果计算重根，这三次方程有三个根，可以是实的或复的。因为y的（实的或复的）值与在抛物线上（实的或虚的）的点一一对应，问题的部分(i)已作出。

实三次方程$y^3+Ay+B=0$，当且仅当$\Delta=27B^2+4A^3\leqslant 0$根全为实；当且仅当$\Delta=0$两根重合；当且仅当$A=B=0$三根重合。

现在$A=4p(2p-a)$，$B=-8p^2b$，所以

$$\Delta=64p^3[4(2p-a)^3+27pb^2].$$

由题容易看出应取$p>0$(如同通常抛物线的标准形式)。在此假设下，Δ的符号与

$$\Delta'=4(2p-a)+27pb^3$$

的符号相同。

因此(1)的根即抛物线的点是相异的及实的当且仅当 $\Delta'<0$。两条法线重合当且仅当$\Delta'=0$，即(a,b)在曲线 $27py^2=4(x-2p)^3$上。最后，当且仅当$4p(2p-a)=0$，$8p^2b=0$，即当且仅当$(a,b)=(2p,0)$，三条法线重合。

B-4. 首先求平面

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \tag{3}$$

与已知二次曲面Q

$$ax^2+by^2+cz^2=1 \qquad (abc\neq 0) \tag{1}$$

相切时系数的条件。

在点(x_1,y_1,z_1)处Q的切平面方程为

$$ax_1x+by_1y+cz_1z=1. \tag{4}$$

假设(3)与(4)是相同的平面，则$\delta\neq 0$. 并且

$$x_1=\alpha/a\delta,\ \ y_1=\beta/b\delta,\ \ z_1=\gamma/c\delta. \tag{5}$$

因为(x_1,y_1,z_1)是Q上的一点，一定有

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}\right)=1.$$

因此
$$\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}=\delta^2 \tag{6}$$

$\delta\neq 0$是平面(3) 与 Q 相切的必要条件. 反之，当 (6) 成立并且$\delta\neq 0$，则(5)确定Q的一个点$P=(x_1,y_1,z_1)$及点Q 的切线，且P的方程(4)与(3)等价。所以条件是充分且必要的.

后面将知当(6)成立而$\delta=0$时会出现什么情况. (自然假设α,β,γ全非零)，则平面(3) 是Q的渐近面. 在投影几何里，(6)是(3)投影地切于Q的充要条件。切点的齐次坐标是$(\alpha/a,\ \beta/b,\ \gamma/c,\delta)$。当$\delta\neq 0$,这是由(5)给出的笛氏坐标的通常点。当$\delta=0$,这个点在$Q$上无穷远处。(有齐次坐标 (x,y,z,t) 的投影点在Q上，当且仅当$ax^2+by^2+cz^2=t^2$。这个方程由Q的方程的每一

项乘以t使其次数增至z而得）。渐近平面就是“切Q于无穷远处”的平面，也可以看作切点趋向于无穷远处的某一点时，切平面序列的极限。

假设$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$，$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$与$(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$是彼此正交的单位向量，则矩阵

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix} \tag{7}$$

是正交的。故它的列也是彼此正交的单位向量。因此

$$\sum\alpha_i^2=\sum\beta_i^2=\sum\gamma_i^2=1.$$

设 Q 的一些切平面以这些向量为法线时这些平面彼此垂直，方程是

$$\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i z=\delta_i \quad i=1,2,3. \tag{8}$$

这里 $$\frac{\alpha_i^2}{a}+\frac{\beta_i^2}{b}+\frac{\gamma_i^2}{c}=\delta_i^2.$$

因为$|\delta_i|$是原点到第i个平面的距离，毕氏定理证明从原点O到这些平面的交点P的距离为

$$OP^2=\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2=\frac{1}{a}\sum\alpha_i^2+\frac{1}{b}\sum\beta_i^2+\frac{1}{c}\sum\gamma_i^2$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

B-5. 根的条件等价于

$$a+b+c=-a, \tag{1}$$

$$ab+bc+cd=b, \tag{2}$$

$$abc=-c. \tag{3}$$

当$c=0$，则$ab=b$与$2a+b=0$，即或者$b=0$ $a=0$或者$a=1$ $b=-2$。如果$c\neq0$，则$ab=-1$。如果$a+b=0$则(2) 成为 $ab=b$得

$a=1$，$b=-1$，$c=-1$。如果$a+b\neq 0$则

$$c=\frac{b+1}{a+b}=\frac{a(b+1)}{a(a+b)}=\frac{-1+a}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}.$$

由(1) $\quad 2a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=0$，得 $\quad 3a^3+2a^2-1=0$。

这个方程没有有理根。因为有的话只可能是± 1或者$\pm\frac{1}{2}$，而这些都不是它的根。因此有三个解答

a	b	c	对应于
0	0	0	$x^3=0$
+1	−2	0	$x^3+x^2-2x=0$
+1	−1	−1	$x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+1)=0$

B–6。设B为矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}.$$

B的秩至多为1。因为任何两行(或两列)显然相关。所以在B的特征值中有$n-1$个零。故B的特征多项式能被x^{n-1}除尽。因此

$$\begin{aligned}\det(xI-B)&=x^n-(B\text{的迹})x^{n-1}\\&=x^{n-1}(x-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2).\end{aligned}$$

所以 $\quad$ $$\begin{aligned}\det(B+kI)&=(-1)^n\det(-kI-B)\\&=k^{n-1}(k+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).\end{aligned}$$

另一因子就是$k+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$。

B–7。当$n>8$时

$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}.$$

对于$x>0$，考察函数$f(x)=(\log x)/x$，它的导数是$(1-\log x)/x^2$，

当$x>e$它是负的。

因此，当$e\leqslant x<y$，有$f(x)>f(y)$与

$$xy\left(\frac{\log x}{x}\right)>xy\left(\frac{\log y}{y}\right).$$

取指数得$e^{y\log x}>e^{x\log y}$。

即当$e\leqslant x<y$，有$x^y>y^x$。当$n\geqslant 8$，则$e<\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$。

所以

$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}.$$

第四届（1941年3月1日）

上午试题

A-1. 试证明当$0<x<a$时，多项式

$$(a-x)^6-3a(a-x)^5+\frac{5}{2}a^2(a-x)^4-\frac{1}{2}a^4(a-x)^2$$

仅取负值。

A-2. 求

$$\int_0^x\left[1+\frac{(x-t)}{1!}+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{nt}dt$$

的关于x的n次导数。

A-3. 半径为a的圆在它所在的平面上沿x轴滚动。证明直径的包络是一条摆线。就是同样沿x轴在这个平面上滚动的直径为a的圆的圆周上一点画出的摆线。

A-4. 设$f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$

的根a,b,c是实的。并且$a\leqslant b\leqslant c$。试证当区间(a,c)分成六个相等的部分，$f'(x)=0$的根将落在以端点b算起的第四个部分。如

果在问题中$f'(x)=0$的根落在第四个部分的某一个端点上，那么$f(x)$将会是什么形式?

A-5. 证明平行于平面 $y=z$ 并且与两个抛物线 $y^2=2x$, $z=0$及$z^2=3x$, $y=0$相交的直线，运动时所生成的曲面为

$$x=(y-z)\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{3}\right).$$

A-6. 如果x轴，曲线$y=f(x)$($f(x)>0$)，直线$x=0$与$x=a$所包围的面积的质量中心的x坐标$\tilde{x}$是由$\tilde{x}=g(a)$给定的。证明

$$f(x)=A\frac{g'(x)}{[x-g(x)]^2}e^{\int dx/[x-g(x)]}.$$

这里A是正的常数。

A-7. (i) 证明

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b) \\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a) \\ 2(ca+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$
$$=(1+a^2+b^2+c^2)^3.$$

(ii) 回转半椭球是由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在第一象限部分绕x轴旋转构成的。证明当且仅当$b\sqrt{8}\geqslant a\sqrt{5}$时，用它的顶点放在水平面上，这个半椭球成稳定的平衡。

下午试题

B-1. 有一运动质点(x,y)，对$(1,0)$与$(-1,0)$的角速度相等而符号相反。证明

$$y(x^2+y^2+1)dx=x(x^2+y^2-1)dy.$$

并且验证这是通过$(1,0)$与$(-1,0)$且以原点为中心的等轴（直角）双曲线族的微分方程。

B–2. 计算下面的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

B–3. 求方程$y''+y'p(x)+yQ(x)=0$

的任何两个线性无关的积分的乘积z所满足的微分方程。

B–4. 已知椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的两条垂直的直径，作出与它们共轭的两条直径。证明通过这些直径的端点的等轴双曲线，也通过椭圆的两焦点。

B–5. 一辆卡车，它的车轮的半径均为a呎，以每秒ω 弧度的角速度行驶。一个质点从车轮中的轮胎脱出，这里假设$a\omega^2>g$，不计空气阻力。证明质点能够达到的距路面最大高度是 $(a\omega+g\omega^{-1})^2/2g$.

B–6. 假设$f(x)$ 在区间（0，1）连续，证明

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1}\int_{z=x}^{z=y}f(x)f(y)f(z)dxdydz$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\int_{t=0}^{t=1}f(t)dt\right)^3.$$

B–7. (i) 证明函数方程

$$f(x+y)f(x-y)=f(x)f(x)+f(y)f(y)-1$$

(x, y是实数）的任何解$f(t)$有

$$f''(t)=\pm m^2 f(t) \qquad (m\geqslant 0\text{常数})。$$

假设$f(t)$的二次异数存在且连续，则$f(t)$是函数 $\pm\cos mt$, $\pm\cosh mt$中的一个。

(ii) 设有n个常数值$b_1, b_2, \cdots, b_n$, n个彼此不同的常数值$a_1, a_2, \cdots, a_n$以及由x的恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2\cdots x^{n-1} & p(x) \\ 1 & a_1 & a_1^2\cdots a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2\cdots a_2^{n-1} & b_2 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2\cdots a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix}\equiv 0$$

定义的一个多项式$p(x)$。对于一个已知多项式$\phi(t)$，定义另一个多项式$Q(x)$，它为上面的恒等式中将$p(x)$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$代之以$Q(x), \phi(b_1), \phi(b_2), \cdots, \phi(b_n)$所得的$x$的恒等式所确定。证明用$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$除$\phi(p(x))$所得余式为$Q(x)$。

解答

A-1. 作替换$x=a(1-y)$，则所给多项式化为$a^6y^2(y^4-3y^3+(5/2)y^2-(1/2))$。因为$a^6y^2$总是正的，就足以证明

$$g(y)=y^4-3y^3+(5/2)y^2-(1/2)<0,$$

对于$0<y<1$。因为

$$g'(y)=4y^3-9y^2+5y=y(y-1)(4y-5).$$

g的临界点是 0, 1, 5/4。在相邻的临界点之间g是严格单调的。所以，因$g(0)=(-1/2)$, $g(1)=0$, 故对$0<y<1$有

$(-1/2)<g(y)<0$.

A-2. 设

$$\phi_k(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}e^{nt}dt,$$

则对于$k>0$，$\phi_k'(x)=\phi_{k-1}(x)$。同时

$$\phi_0(x)=\int_0^x e^{nt}dt=\frac{e^{nx}-1}{n}.$$

所以对于$n>k$，

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\phi_k(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\phi_0(x)=n^{n-k-1}e^{nx}.$$

据此，此已给函数的n次导数是

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\phi_0(x)+\phi_1(x)+\cdots+\phi_{n-1}(x)\right]$$

$$=[n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+1]e^{nx}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n^n-1}{n-1}e^{nx} & 当n\neq 1\\ e^x & 当n=1\end{cases}.$$

A-3. 设这两个圆沿着x轴的上边滚动。在时间t它们都在点$(at, 0)$与轴相切。令P与Q各是两圆上在滚动前与原点接触的点，而D与E分别为大小两圆的中心。又设P'是P在大圆上的对立点。因为可以沿x轴适当地选择原点，故可假定PP'是问题中所指的运动的直径。

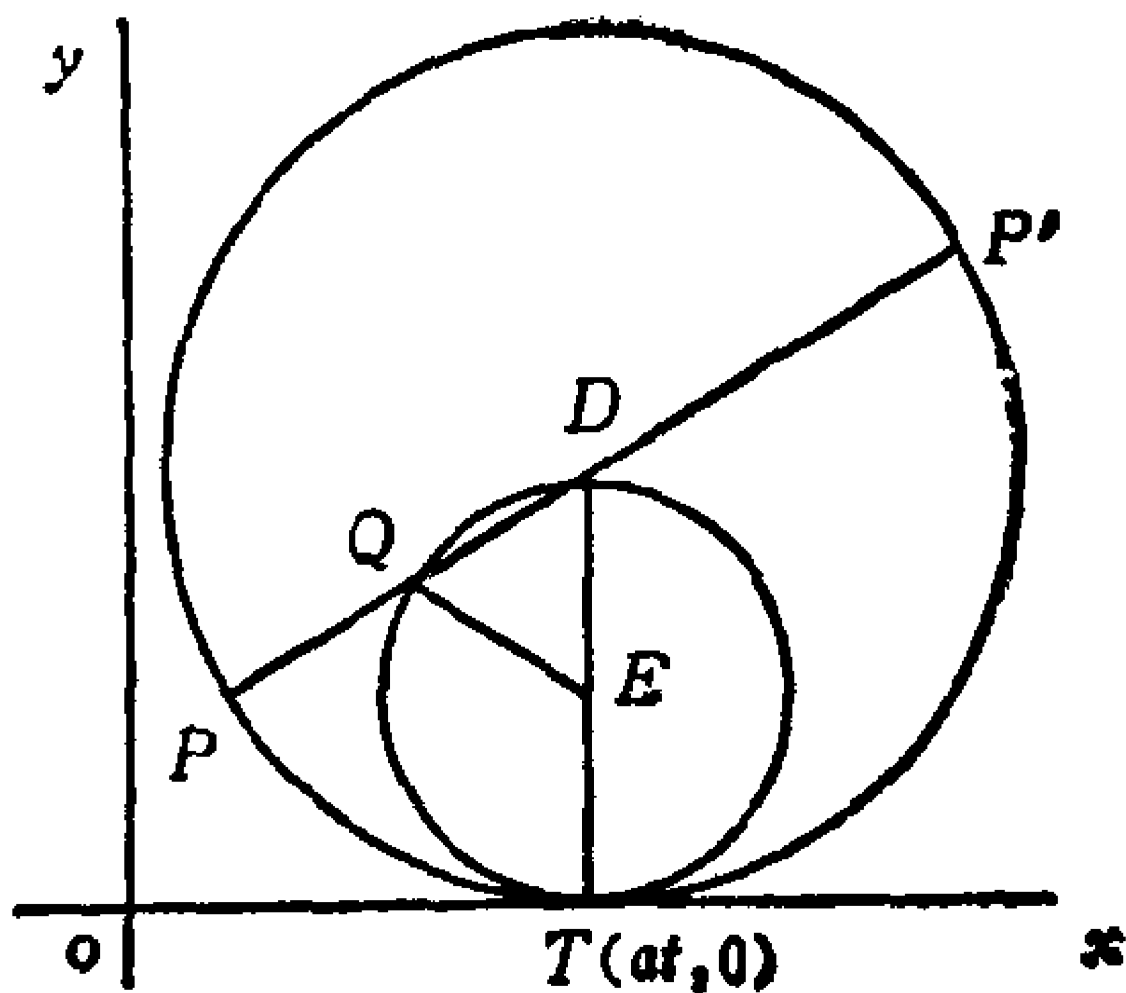


图13

当Q画一条摆线C，下面要

证PP'总切C于Q。这样PP'的包络是C。

因为弧PT=弧$QT=OT=at$。对于半径为a与$(1/2)$ a的圆有$\angle PDT=t$，$\angle QET=2t$。因此在时间t，P在 $(at-a\sin t$，$a-a\cos t)$，P'在 $(at+a\sin t$，$a+a\cos t)$。并且Q的坐标是

$$x=at-(a/2)\sin 2t \quad y=(a/2)-(a/2)\cos 2t.$$

对于Q运动的参数方程即摆线C，当t不是π的倍数，参数化是非奇异的，否则为奇异的。(这是因为dx/dt与dy/dt都是零)。对非奇异的t的点，C的切线有方向向量$(a-a\cos 2t, a\sin 2t)$。所以在C上Q点的切线以u为参数的表示式为

$$x=at-(a/2)\sin 2t+u(a-a\cos 2t)$$
$$y=(a/2)-(a/2)\cos 2t+u(a\sin 2t). \qquad (5)$$

(1) 中置$u=\dfrac{\cos t-1}{2\sin t}$ 与 $u=\dfrac{\cos t+1}{2\sin t}$.

即知P与P'都在直线上。即对于不是π的倍数时的Q，PP'是在Q处C的切线。

当t是π的倍数，Q在x轴上，曲线C在Q有一尖点与垂直切线，并且或者P或者P'在x轴上。PP'也与C相切。

A-4。当且仅当命题对$f(x+b)$ 有效时，它对$f(x)$有效。于是将所有的根减去b使排在中间的根为零。因此，不失一般性，令$b=0$。考虑

$$f(x)=(x-a)x(x-c)=x^3-(a+x)x^2+acx.$$

这里$a\leqslant 0\leqslant c$。问题的第四个子区间会是$[c/2 \quad 2c/3]$。

从$f'(x)=3x^2-2(a+c)x+ac$ 得 $f'(c/2)=-(1/4)c^2\leqslant 0$与$f'(2c/3)=(-1/3)ac\geqslant 0$。因为$f$的连续性，在$[c/2, 2c/3]$上有$f'(x)=0$的一个根。

当且仅当$c=0$，根出现在左端点$c/2$，即两最大的根重合。这时$f(x)=(x-a)x^2$。

当且仅当$a=0$或$c=0$，根出现在右端点$2c/3$。若$c=0$根据上述，区间退化为一点。若$c\neq 0$则$a=0$，两个最小的根重合，这时$f(x)=x^2(x-c)$。

恢复原来a，b，c的意义，回答问题的第二部份。f'在左端点为零，当且仅当$f(x)=(x-a)(x-b)^2$。在右端点为零，当且仅当$f(x)=(x-b)^2(x-c)$或$f(x)=(x-a)(x-b)^2$。

A-5. 设直线交第一个抛物线于（$18s^2$，$6s$，0），交第二个抛物线于另一个点（$12t^2$，0，$6t$）。直线与平面$y=z$平行的条件是直线的方向向量

$$(18s^2-12t^2,\ 6s,\ -6t)$$

在那平面上，即$6s=-6t$。因此，两点是（$18t^2,-6t,0$）与（$12t^2$，0，$6t$），这里$t\neq 0$。

这条直线参数表示为

$$(18t^2,\ -6t,\ 0)+u(6t^2,\ -6t,\ -6t), \qquad (1)$$

这里u是参数。故得关于运动的直线生成的曲面为两个参数表示的方程

$$x=18t^2-6ut^2,\ y=-6t-6ut,\ z=-6tu.$$

这里$t\neq 0$。注意到

$$y-z=-6t \quad (y/2)-(z/3)=-t(3+u). \qquad (2)$$

消参数得 $$x=6t(3t+ut)=(y-z)(y/2-z/3). \qquad (3)$$

这就证明了：平行于平面$y=z$且交两已知抛物线于不同的点的任何直线上的任何点在曲面（3）上。

反之，若（x_1,y_1,z_1）是曲面（3）上的一个点，$y_1\neq z_1$。能由（2）确定参数t与u，使（x_1，y_1，z_1）有（1）的表达式。然而平面$y=z$上的点是特殊情况，因为此时已知抛物线交平面于点（0，0，0）。所以这平面上每一点是在一条平行于（事实上是包含于）这平面，并与两抛物线相交的直线上。把这些直线

考虑在内，则应将轨迹（3)与整个平面$y=z$的接连部分补充进去。曲面（3)自己交平面$y=z$于一直线$x=0$，$y=z$。

A-6. 由形心的定义并限制为正

$$g(x)=\int_0^x tf(t)dt\Big/\int_0^x f(t)dt,\quad x\neq 0 \tag{1}$$

令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则$F'=f$。(1)成为

$$F(x)g(x)=\int_0^x tf(t)dt.$$

微分得$F'(x)g(x)+F(x)g'(x)=xf(x)=xF'(x)$。所以 F 满足线性微分方程

$$F'(x)=\frac{g'(x)}{x-g(x)}F(x). \tag{2}$$

因此 $F(x)=Ae^{\psi(x)}$。 (3)

这里A是正的常数，并且

$$\psi(x)=\int_0^x \frac{g'(t)}{t-g(t)}dt=\int_0^x \frac{dt}{t-g(x)} - \log(x-g(x)). \tag{4}$$

于是$F(x)=\dfrac{A}{x-g(x)}\exp\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t-g(t)}$。 (5)

以（5）代入（2）得

$$f(x)=A\frac{g'(x)}{(x-g(x))^2}\exp\int_0^x \frac{dt}{t-g(t)}. \tag{6}$$

为所求。

在问题的条件下对所有的正的x，$x>g(x)$，即分母$x-g(x)$不能造成函数的奇异性。对于$x<0$有$g(x)>x$，故必须用$\log(g(x)-x)$代换（4）中的$\log(x-g(x))$则（6）成为

$$f(x)=\frac{-Ag'(x)}{(x-g(x))^2}\exp\int_0^x \frac{dt}{t-g(t)}.$$

在这种情形，(3) 的常数A一定是负的，再次得所求公式。

A-7. (i) 第一行加上第三行乘以b，减去第二行乘以c得

$$\begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & c(1+a^2+b^2+c^2) & -b(1+a^2+b^2+c^2) \\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a \\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2+c^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -b \\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a \\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2+c^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ab-2c & 1+b^2+c^2-a^2-2abc & 2ab^2+2a \\ 2ac+2b & -2a-2ac^2 & 1+c^2-a^2+b^2+2abc \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2+c^2)\cdot[(1+b^2+c^2-a^2)^2$$

$$-4a^2b^2c^2+4a^2(b^2+1)(c^2+1)]=(1+a^2+b^2+c^2)^3.$$

(ii) 令C是半椭球体S的重力中心，V是它的顶点，考察中心在C半径为CV的球。

假设V附近的球面严格地在S内(除去V点)，则当S放在水平面上，V任何微小的移动引起重心上升。因此S是稳定平衡的。

另一方面，假设V附近的球面严格在S外（但将V除外），则当S放在水平面上，V的任何微小移动引起重心下降，所以S是不稳定的。

因此考察从C到一个在椭圆面上的可变点P的距离函数$f(P)=CP$。如果这个函数有一个在V的严格地局部最小值，平衡是稳定的。如果在P有一个严格地局部最大值，平衡是不稳定的，可用$f(P)^2$代替$f(P)$。

从本题中圆的对称性，对于某个 $c>0$，显然C在 $(c,0,0)$。而且可将问题局限于考察函数$f(P)^2$，这里P沿着母椭圆$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$变动。若$P=(x,y)$，则有

$$f(P)^2=(x-c)^2+y^2=(x-c)^2+b^2(1-x^2/a^2)$$
$$=(1-b^2/a^2)x^2-2cx+b^2+c^2.$$

我们要确定$x=a$是否使这个多项式在区间$[0,a]$取一个局部最小值。沿整个正x轴考察这个多项式，知当$b^2\geqslant a^2$时是严格递减的；当$b^2<a^2$，则从$x=0$到$x=ca^2/(a^2-b^2)$是递减的，然后递增。因此当$b^2\geqslant a^2$或$b^2<a^2$，而$a\leqslant ca^2/(a^2-b^2)$，即$b^2\geqslant a^2-ac$时，$V$（在两维坐标系中$=(a,0)$）是局部最小值。当$b^2<a^2-ac$时，$V$是严格的局部最大值。

现在找重心的位置，不妨设质量分布均匀，所以重心与形心重合。因此

$$c=\int_0^a x\cdot\pi y^2dx\Big/\int_0^a \pi y^2dx$$
$$=\int_0^a x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\Big/\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{3}{8}a.$$

关于稳定性的条件成为$b^2\geqslant\frac{5}{8}a^2$；即$\sqrt{8}\,b\geqslant\sqrt{5}\,a$为所求。

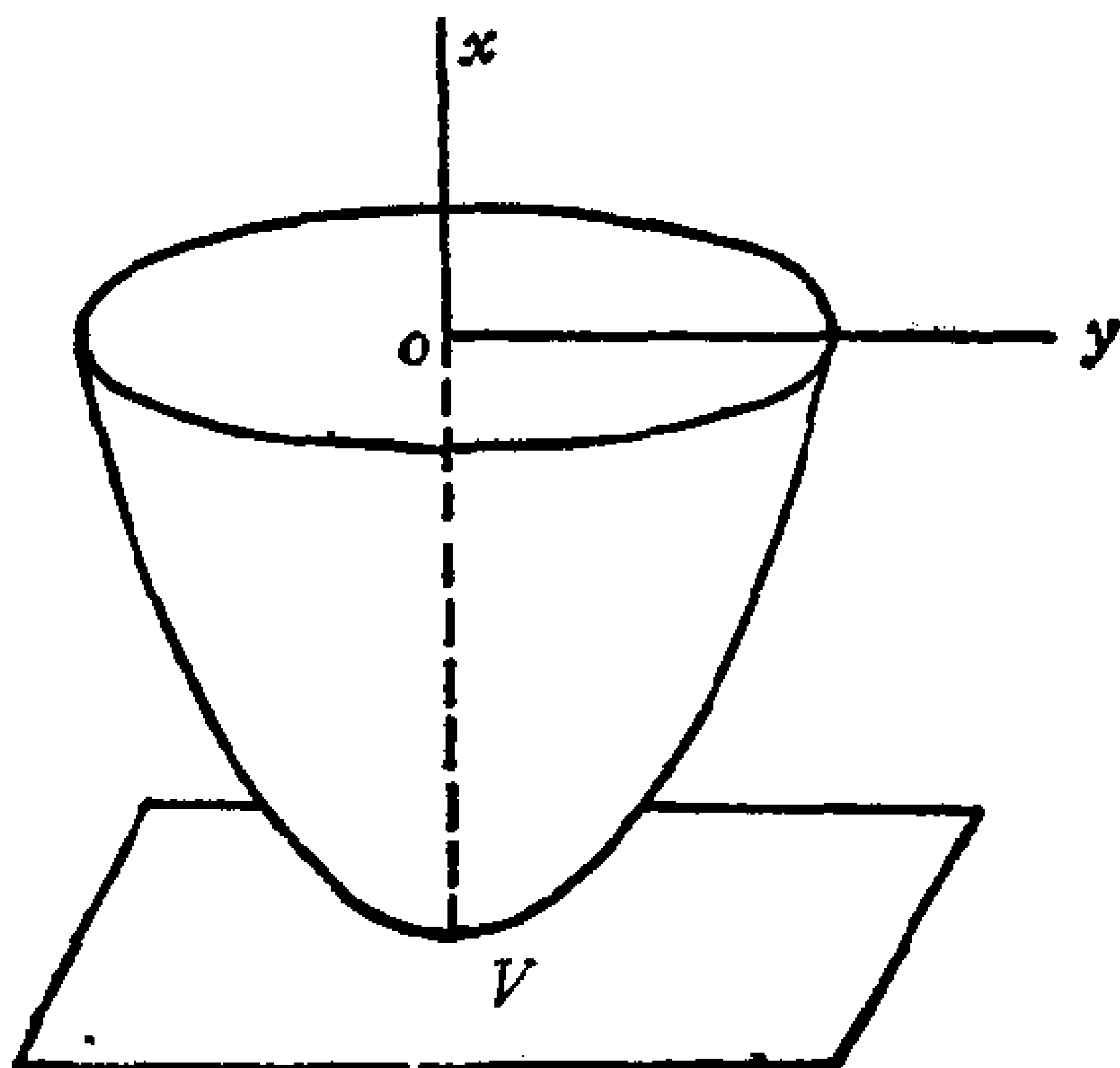


图14

B-1. 一个质点运动的坐标参数方程为

$$x=x(t)$$
$$y=y(t).$$

它关于原点的角度是

$$\frac{x\dot{y}+y\dot{x}}{x^2+y^2},$$

这里小点表示对t微分。转移参考中心，先到（1，0）然

后到$(-1, 0)$。则条件可表为

$$\frac{(x-1)\dot{y}-y\dot{x}}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(x+1)\dot{y}-y\dot{x}}{(x+1)^2+y^2}=0$$

得$(x\dot{y}-y\dot{x}-\dot{y})(x^2+y^2+1+2x)$

$$+(x\dot{y}-y\dot{x}+\dot{y})(x^2+y^2+1-2x)=0.$$

化简为 $x(x^2+y^2-1)\dot{y}=y(x^2+y^2+1)\dot{x}$ (1)

等价于所求微分方程。

中心等轴双曲线有方程

$$A(x^2-y^2)+B(xy)=1.$$

当仅当$A=1$，它通过$(-1, 0)$ 与 $(1, 0)$。所考虑的族为

$$x^2-y^2+Bxy=1 \quad (2)$$

对于t微分得

$$2x\dot{x}-2y\dot{y}+B\ (x\dot{y}+\dot{x}y)=0. \quad (3)$$

(2) 与(3) 中消去B得

$$xy(2x\dot{x}-2y\dot{y})+(x\dot{y}+\dot{x}y)(1-x^2+y^2)=0.$$

这是所考虑的双曲线族的微分方程，化简后即为 (1)。

B-2. (i) 第一个和

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right].$$

是对应于分点

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}$$

的黎曼小和．可近似表为

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

所以当$n\to\infty$，它们的极限是

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \log(1+\sqrt{2}).$$

(ii) 第二个和的单项 $1/\sqrt{n^2+i}$满足

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

当$n\to\infty$时，两边的极限都是1．因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\right] = 1.$$

(iii) 第三个和

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{2}} \quad (i=1,2,\cdots,n^2).$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} = \infty.$$

B-3． 设y_1与y_2是已知微分方程的两个线性无关的解，则任何两个解有形式

$$u = ay_1 + by_2, \quad v = cy_1 + dy_2.$$

因为uv落在由y_1^2，y_1y_2，y_2^2生成的线性空间．为此我们希望能证明它能满足一个三阶线性微分方程。令$z=uv$，有

$$u''+pu'+Qu=0, \tag{1}$$

$$v'+Pv'+Qv=0, \tag{2}$$

$$z'=uv'+u'v, \tag{3}$$

$$z''=uv''+2u'v'+vu''. \tag{4}$$

得 $z''+Pz'+2Qz=u(v''+Pv'+Qu)+v(u''+Pu'+Qu)$

$$+2u'v'=2u'v'.$$

微分(5)得 $z''' + Pz''+(P'+2Q)z'+2Q'z$ (5)

$$=2u'v''+2v'u''. \tag{6}$$

再将(1) 乘以$2\nu'$，将(2) 乘以$2u'$相加得

$$2u'v''+2v'u''+4Pu'v'+2Qz'=0 \tag{7}$$

用$2P$乘(5) 得

$$2Pz''+2P^2z'+4PQz=4Pu'v'. \tag{8}$$

(6) (7) 与(8) 相加，右边的项全消去，得

$$z'''+3Pz''+(2P^2+P'+4Q)z'+(4PQ+2Q')z=0. \tag{9}$$

是原方程任何两个解的乘积所满足的一个三阶微分方程。

B-4．设E是已给椭圆，假定$a^2>b^2$，则焦点在 $(c, 0)$ 与 $(-c, 0)$，这里 $c=\sqrt{a^2-b^2}$。设已知直径方程为$y=mx$与$-my=x$。注意到椭圆的直径平行于它的另一条共轭直径的端点的切线。不难得出两共轭直径的方程分别为

$$b^2x+ma^2y=0,\quad mb^2x-a^2y=0.$$

因此 $(b^2x+ma^2y)(mb^2x-a^2y)$

$$=mb^4x^2-ma^4y^2+(m^2-1)a^2b^2xy=0$$

是两共轭直径的直线组成的退化的圆锥曲线D的方程。任何通过D与E的交（即共轭直径的端点）的圆锥曲线（除E外）有方程为

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+mb^4x^2-ma^4y^2$$

$$+(m^2-1)a^2b^2xy=0. \tag{1}$$

当且仅当x^2与y^2的和的系数为零，即

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+mb^4-ma^4=0,$$

即$\lambda=ma^2b^2c^2$，圆锥曲线（1）是等轴双曲线(可能退化)。λ具有这样的值时，圆锥曲线(1) 通过$(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$为所求。

有$\lambda=ma^2b^2c^2$的等轴双曲线(1) 当且仅当常数项λ 为零时是退化的。仅当$m=0$ 已知椭圆是真椭圆（即$a\neq b$），即当原直径是椭圆的轴。在这种情形，共轭直径也是轴，并且没有真的等轴双曲线通过四个点。则两条轴的并是满足条件的退化等轴双曲线。

如果已知椭圆是一个圆，$c=0$，故λ总是零。对于一圆，互垂的直径总是共轭的。并且任何两条这样的直径的并是一条退化等轴双曲线。它通过重合于中心的焦点

B-5. 若质点开始高度为h，并且抛出速度向上的分量为v，在重力场上升高度为$h+(v^2/2g)$（运动水平分量不影响最大高度）。

当质点尚附着于轮胎上运动时，轨道呈摆线。运动方程为

$$x=a\omega t-a\sin\omega t \quad y=a(1-\cos\omega t).$$

如果当$\omega t=\theta$时质点离开轮胎，则开始进入重力场。自高度为$a(1-\cos\theta)$ 处以$y'=a\omega\cos\theta$为速度的向上分量的重力运动.因此它达到的高度为

$$H=a(1-\cos\theta)+\frac{a^2\omega^2}{2g}\sin^2\theta, \tag{1}$$

$0\leqslant\theta\leqslant\pi$（以保证开始时质点向上）。

选择θ求H的最大值，置

$$\frac{dH}{d\theta}=a\sin\theta+\frac{a^2\omega^2}{g}\sin\theta\cos\theta=0,$$

得临界点为$0,\pi$，θ_0，这里$\theta_D=\arccos(-g/aw^2)$(因为$aw^2>0$，有这样的$\theta_0$)。对应的$H$的值是0，$2a$与

$$H_0=a\left(1+\frac{g}{a\omega^2}\right)+\frac{a^2\omega^2}{2g}\left(1-\frac{g^2}{a^2\omega^4}\right)$$

$$=\frac{1}{2g}(a\omega+g\omega^{-1})^2.$$

因为$(a\omega+g\omega^{-1})^2>4ag$，$H_0>2a$，所以$H$的最大值是$H_0$

我们也能将（1)写成

$$H=H_0-\frac{a^2\omega^2}{2g}\left(\cos\theta+\frac{g}{a\omega^2}\right)^2$$

来求H的最大值.

B-6. 令$F(u)=\int_0^u f(t)dt$，则$F'(u)=f(u)$。所求方程的右边为（1/3）$F(1)^3$. 左边逐步积分得

$$\int_{x=0}^{x=1}f(x)\left[\int_0^1 f(y)(F(y)-F(x))dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 f(x)[(1/2)(F(y)-F(x))^2]_{y=x}^{y=1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)(F(1)-F(x))^2dx$$

$$=-(1/6)(F(1)-F(x))^3\Big|_0^1=(1/6)F(1)^3.$$

为所求.

B-7. (i) 由已知函数方程

$$f(x+y)f(x-y)=f(x)^2+f(y)^2-1, \qquad (1)$$

对y微分得

$$f'(x+y)f(x-y)-f(x+y)f'(x-y)$$
$$=2f(y)f'(y)。\qquad (2)$$

然后再对 x 微分得

$$f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)=0。\qquad (3)$$

在(1)与(2)内置$x=y=0$得$f(0)^2=2f(0)^2=1$与 $2f(0)f'(0)=0$。故

$$f(0)=\pm 1 \qquad f'(0)=0。\qquad (4)$$

现在对任一已知数t，在(3)内令$x=y=t/2$，得

$$f''(t)f(0)-f(t)f''(0)=0。$$

它等价于$f''(x)\pm m^2 f(t)=0 \qquad (5)$

这里$m=1f''(0)|^{1/2}$．利用初始条件(4)(5)积分得．$f(t)=\pm\cos mt$或者$f(t)=\pm\cosh mt$，这决定于(5)中的符号是取正号或取负号．如果$m=0$解是常数．反之上面的解的每一个都满足关于m的任何值的函数方程。

(ii) 利用范得蒙行列式

$$V=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

不为零．若在定义$P(x)$的行列式中用a_1代入x_1，将第一行减去第二行后再按第一行展开，得

$$V\cdot(P(a_1)-b_1)=0。$$

故$P(a_1)=b_1$。同理可得$P(a_i)=b_i$ $i=2,3,\cdots,n$。

同样利用关于Q的行列式可证$Q(a_i)=\Phi(b_i)i=1,2,\cdots,n$。显然$Q$是小于$n$次的多项式。

假设多项式$\Phi(P(x))$除以$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，剩下

的余式$R(x)$次数小于n。则

$$\Phi(P(x))=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)S(x)+R(x),$$

这里$S(x)$是多项式。用$x=a_i$代入得

$$R(a_i)=\Phi(P(a_i))=\Phi(b_i)=Q(a_i).$$

所以有关于x的n个不同的值使得$Q(x)-R(x)$为零。但因其次数小于n，故$Q(x)-R(x)$恒等于零，并且余式为$Q(x)$，得证。

第五届（1942年3月7日）

上午试题

A-1. 一边长为$2a$的正方形总位于XY平面的第I象限内，当此正方形移动时，它的两个相邻顶点始终分别保持在X轴上和Y轴上。求正方形中心的轨迹。

A-2. 设多项式$f(x)$除以$(x-a)^2(x-b)$，其中$a\neq b$，试导出表示余项的公式。

A-3. 问下列级数是收敛还是发散？

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{7}\right)^2+\frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{7}\right)^3+\frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{7}\right)^4+\cdots.$$

A-4. 求二次曲线族$(x+2y)^2=a(x+y)$的正交轨线族。问两族曲线在坐标原点交成的角等于多少？

A-5. 一半径为a的圆面绕其所在平面内与圆心相距为b $(b>a)$的一条直线旋转180°。问当b/a为何值时，旋转所生成的立体的重心位于立体的表面上？

A-6. 对于XY平面（水平面）内的每一个圆，都用圆面“上

方”的一个点来“代表”，这个点位于经过圆心的竖直线上，到圆心的距离等于圆的半径。

证明与一定圆相交成定角的所有圆的“代表”的轨迹为一单叶双曲面(一个部份)。

再考虑平面内的适当圆族，证明在双曲面上必有两族母线存在。

下午试题

B-1。一边长为$2a$的正方形始终位于XY平面的第I象限，当此正方形移动时，它的两个相邻顶点总分别保持在X轴上和Y轴上。试证在正方形内部或在正方形边界上的点的轨迹通常为一二次曲线(一部分)。对于正方形的什么样的点，这种轨迹会发生退化?

B-2。对于给定抛物线族

$$y=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a,$$

(i) 求顶点的轨迹；(ii) 求包络；(iii) 画出包络和该族两个典型曲线的略图。

B-3。给定

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v),$$

其中φ和ψ是下列偏微分方程的解：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=1. \tag{1}$$

假定x和v为自变量，试证 (1)可以变换为

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

并概要说明通过对(2)积分怎样获得(1)之解。(1) 还有另外什么解?

B-4. 一质点在一与距离 k 次方成反比的有心力作用下运动。如果质点的运行轨道为一圆（假设有心力均由圆周上的点出发），试求k的值。

B-5. 作出曲线

$$y=\frac{x}{1+x^6\sin^2x}$$

的略图，并证明

$$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^6\sin^2x}$$

存在。

解答

A-1. 设A和B为正方形的两相邻顶点，分别位于 X轴上和Y轴上。设C为正方形的中心，D和E分别为由C至 X轴和Y轴所引垂线之垂足。设 O为坐标原点。

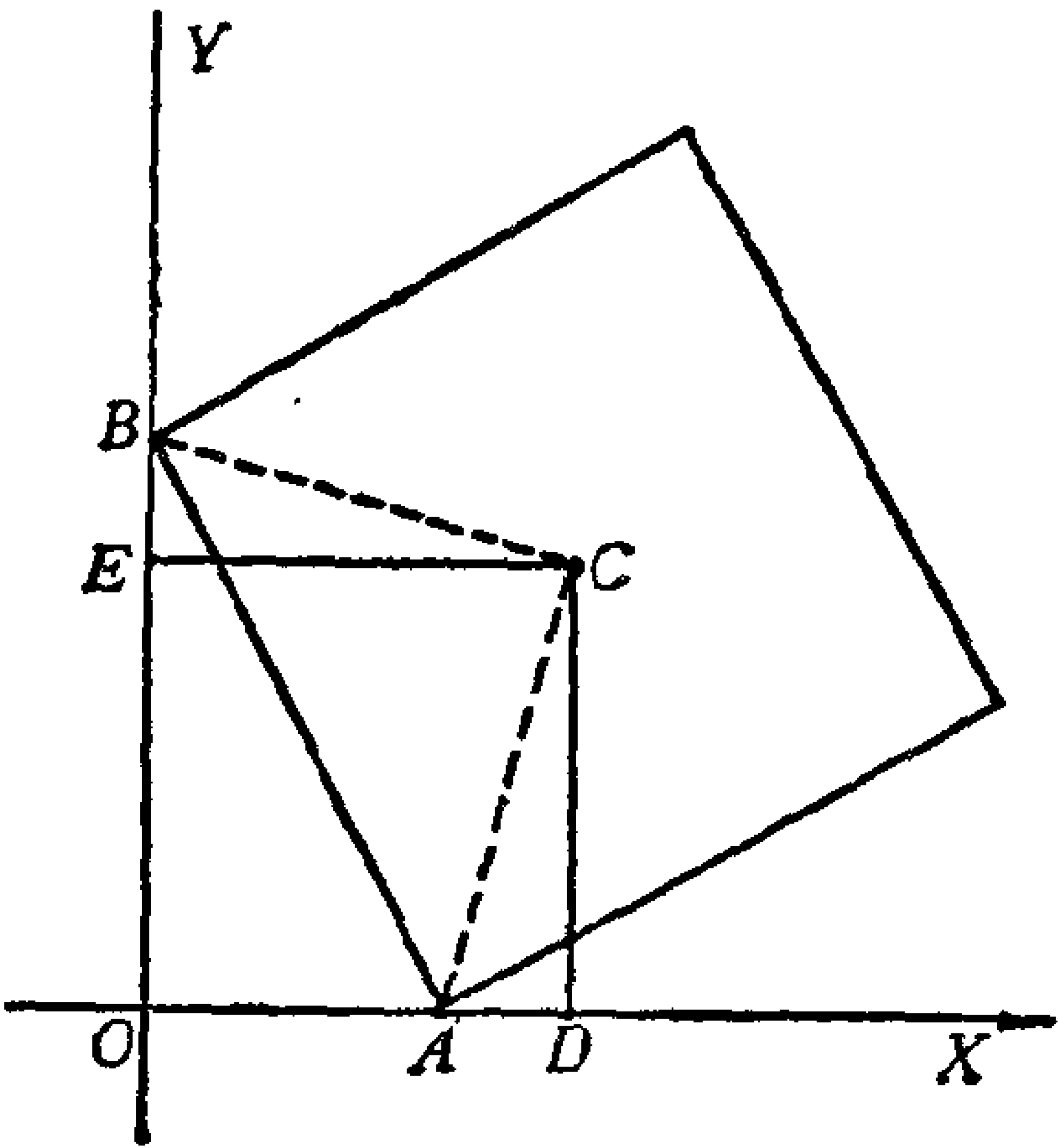


图15

则 $\angle ACB$ 为直角，$\angle DCE$为直角，而且$\triangle ACD$全等于$\triangle BCE$（斜边和一锐角相等）。因此C的坐标x和y相等，$OECD$ 为一正方形。所以，当给定正方形按照题设条件移动时，它的中心C

沿着从(a, a)至$(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)$的线段来回运动。

附注。本届竞赛的B-1题是本题的一个推广。

A-2. 因为$f(x)$除以一个三次多项式，故余项$R(x)$至多是x的二次多项式，比如说$R(x)=Ax^2+Bx+C$。则有

$$f(x)=(x-a)^2(x-b)Q(x)+Ax^2+Bx+C$$

和
$$f'(x)=2(x-a)(x-b)Q(x)+(x-a)^2Q(x)$$
$$+(x-a)^2(x-b)Q'(x)+2Ax+B.$$

由这些关系得

$$f(a)=Aa^2+Ba+C,\quad f(b)=Ab^2+Bb+C,$$
$$f'(a)=2Aa+B.$$

对A，B，C求解又得

$$A=\frac{1}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)],$$

$$B=\frac{-1}{(b-a)^2}[2a(f(b)-f(a))-(b^2-a^2)f'(a)],$$

$$C=\frac{1}{(b-a)^2}[(b-a)^2f(a)+a^2(f(b)-f(a))$$
$$+ab(a-b)f'(a)].$$

因此 $R(x)=\frac{1}{(b-a)^2}\{(f(b)-f(a)-(b-a)f'(a))x^2$
$$-(2a(f(b)-f(a))+(b^2-a^2)f'(a))x$$
$$+((b-a)^2f(a)+a^2(f(b)-f(a))$$
$$+ab(a-b)f'(a))\}$$

容易验证，上式亦可写成如下形式：

$$R(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2$$
$$-\frac{f'(a)}{b-a}(x-a)(x-b).$$

A-4. 给定曲线族为一抛物线族，所有抛物线在原点均与直线$x+y=0$相切。当$a=0$时，抛物线退化为二重线 $(x+2y)^2=0$，应将它考虑作二条退化抛物线，位于第IV 象限内的半直线是a取正值趋于零时的极限情形，位于第II 象限内的半直线是a取负值趋于零时的极限情形。

为要找出抛物线族的微分方程，可把给定方程微分，并由原方程及其求导所得的方程中消去a。即由

$$(x+2y)^2=a(x+y), \tag{1}$$

$$2(x+2y)(1+2y')=a(1+y'). \tag{2}$$

消去a得 $2(x+y)(x+2y)(1+2y')=(x+2y)^2(1+y')$,

化简为 $$(3x+2y)y'+x=0. \tag{3}$$

方程中约去的因子$x+2y$正好反映直线 $x+2y=0$ 是曲线族的一个退化元素。

此微分方程沿直线$x+y=0$（它不包含原抛物线族的任何元素）有定义，故直线$x+y=0$是曲线族对应于情形$a=\infty$的另一个退化元素。

对微分方程

$$xy'=3x+2y \tag{4}$$

作积分，便得到所要求的正交轨线族．事实上，(4)可写作

$$\frac{d}{dx}(y+3x)=\frac{2(y+3x)}{x},$$

它的解是 $$y+3x=kx^2, \tag{5}$$

其中k为任意常数．这是一个新的抛物线族，除y轴上的点外，经过平面的每一个点处都有该族中唯一的一条曲线。如果把微分方程(4) 改写为如下形式：

$$x=(3x+2y)\frac{dx}{dy},$$

显然y轴也是一条积分曲线，所以y轴也属于正交轨线族。

容易看出，新曲线族(5)中所有的曲线在原点均与直线$y+3x=0$相切（但由y轴所表示的退化二重抛物线除外）。

在坐标原点，两族曲线的交角即是两直线$x+y=0$与$3x+y=0$的夹角θ。利用两直线的斜率，可得

$$\text{tg}\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-1-(-3)}{1+(-1)(-3)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

所以 $\theta=\text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$.

A-5.

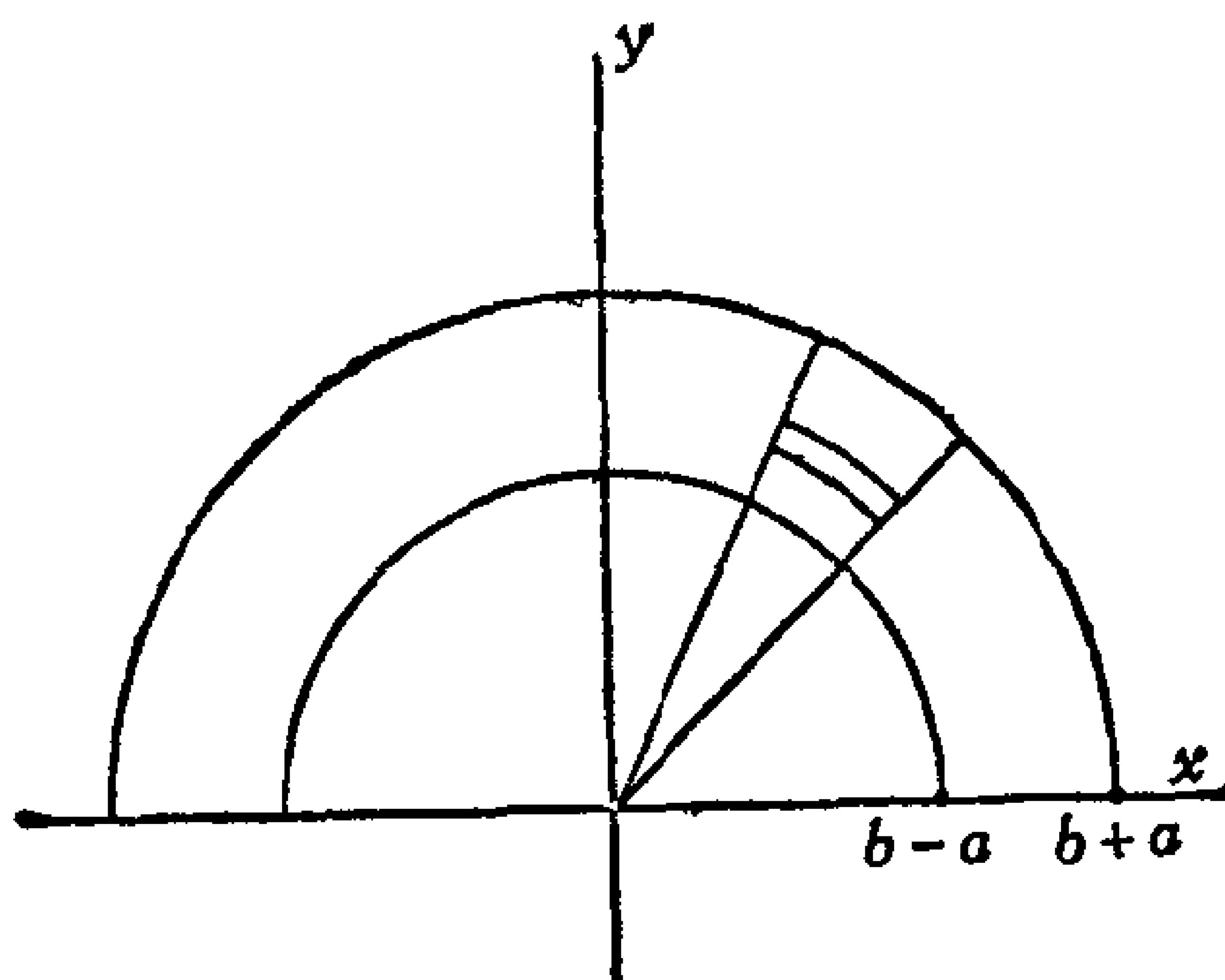


图16

按下法取定坐标系，把母圆开始所在的平面作为xz平面，把旋转轴作为z轴。则生成的立体为一半环体(环体即是由圆环面所界的立体)。

根据对称性，显然所求形心必位于y轴上，设为$(0, \overline{y}, 0)$，题目要求有$\overline{y}=b-a$。

为求坐标$\overline{y}$,在xy平面上引进极坐标。相应于平面面积元素$rdrd\theta$，体积元素为

$$2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,rdrd\theta,$$

从而立体对y轴的重力矩M_y的元素为

$$2r\sin\theta\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,rdrd\theta.$$

我们有$\bar{y}=M_y/V$，其中V是半环体的体积。

$$V=\int_0^\pi\int_{b-a}^{b+a}2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,rdrd\theta$$

$$=2\pi\int_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,rdr$$

$$=2\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi(b+a\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi=\pi^2a^2b.$$

$$M_y=\int_0^\pi\int_{b-a}^{b+a}2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r^2dr\sin\theta d\theta$$

$$=4\int_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\,r^2dr$$

$$=4a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi(b+a\sin\varphi)^2\cos\varphi d\varphi$$

$$=2\pi a^2b^2+\frac{\pi}{2}a^4.$$

在计算上述两个积分时，均用到代换$r=b+a\sin\varphi$。因此得到

$$\bar{y}=\frac{M_y}{V}=\frac{a^2+4b^2}{2\pi b}.$$

但又要求$\bar{y}=b-a$，所以有

$$2\pi b^2-2\pi ab=a^2+4b^2.$$

若令$c=b/a$，则

$$(2\pi-4)c^2-2\pi c-1=0.$$

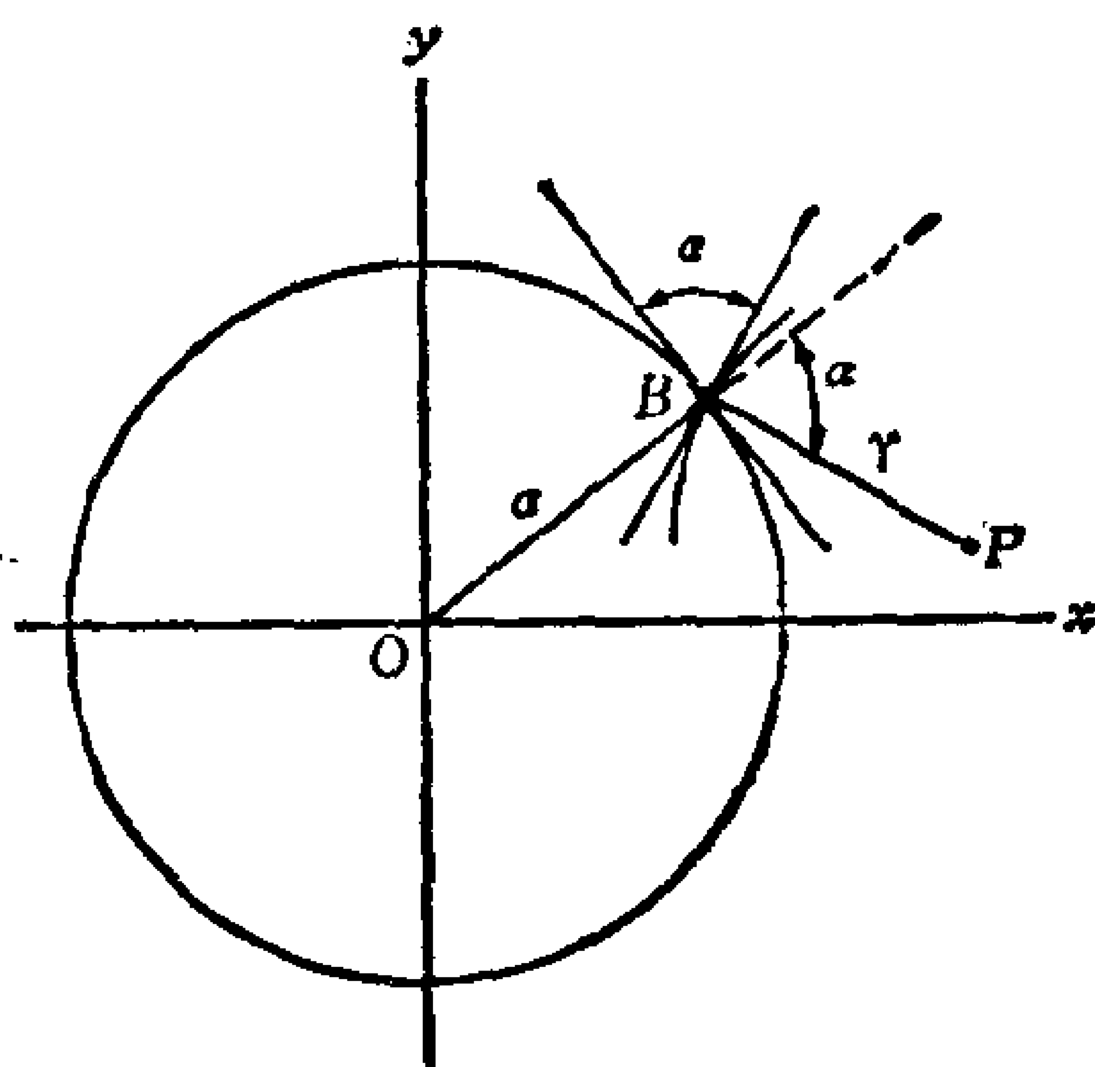


图17

结果有 $c=\dfrac{\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi-4}}{2\pi-4}$

(因为c必是正数，故取正号)。

A-6. 用C表示定圆，并设圆心为O，半径为a。在XY平面

内以O为原点取定直角坐标，并照惯例引进第三坐标z。两条相交的光滑曲线的夹角α是指在交点处它们的切线间的两个夹角中之较小者。所以有$0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$。

固定这样一个α。且设以p为圆心，r为半径的圆C'与定圆C在B处相交所成之角为α。则

$(OP)^2=a^2+r^2\pm 2ar\cos\alpha$，$\angle OBP$为钝角时符号取"+"，$\angle OBP$为锐角时符号取"－"。如果$P$的平面坐标是$(x_0, y_0)$，则$C'$可由点$(x_0, y_0, r)$代表。因此，所有这种代表点都属于集合$A=A_1\cup A_2$，这里$A_1$由条件

$$x^2+y^2=a^2+z^2-2az\cos\alpha,\quad z>0$$

确定，A_2由条件

$$x^2+y^2=a^2+z^2+2az\cos\alpha,\quad z>0$$

确定。

反之，给定A的任一个点(x_0, y_0, r)，则半径为r、圆心为(x_0, y_0)的圆C'与C必相交于两点（$\alpha=0$时重合为一点）。欲明此点，只需注意到

$$(r-a)^2\leqslant a^2+r^2\pm 2ar\cos\alpha=x_0^2+y_0^2\leqslant(r+a)^2,$$

所以从C的圆心到C'的圆心的距离界于$|r-a|$与$r+a$之间。

除情形$\alpha=0$，$\pi/2$以外，集合A_1和A_2分别是由两双曲线

$$x^2=(z\pm a\cos\alpha)^2+a^2\sin^2\alpha$$

绕z轴旋转所产生的两个不同双曲面的一部分。当$\alpha=\pi/2$时，两双曲线重合，因而A_1和A_2重合。当$\alpha=0$时，两双曲线退化，因而产生锥面（此时"相交"变成"相切"）。

设B是C之一定点，又设R是从B出发的四条半直线（假定$0<\alpha<\pi/2$）中的一条，它与$\overleftrightarrow{AB}$的夹角为α。则圆心在R上又通过B的所有圆与C的交角为α，因此可用A的一点来代表。由于这些圆的半径将随其x标（或y标）的变化按比例地增加，故代

表它们的点在空间形成一条半直线，这条半直线即是A的一条母线。而且这两条半直线在B处与C再相交又生成位于A_1中的二半直线。

在B处的另外两条半直线则生成位于A_2中的二半直线。如果这些半直线中的一条当作母线绕z轴旋转，则它生成A上的一整族母线。因而A有四族母线，两族在A_1上，两族在A_2上。如果$a=\pi/2$，由于此时从B出发垂直于OB的半直线只有两条，故只有两族母线，但此时有$A_1=A_2$。

A的每一个点Q都对应着以P为圆心的一个圆，这种圆与C两次相交，比如交于B和B'（这里假定$0<a\leqslant\pi/2$）。则对应于$\overrightarrow{BP}$和$\overrightarrow{B'P}$的母线是通过Q的两条不同的母线，而且由于旋转不会使$\overrightarrow{BP}$和$\overrightarrow{B'P}$重合，这两条母线必属于不同的母线族。于是，通过A的每一个点都有属于不同族的两条母线。

如果$A=0$，除了对应于C的点$(0,0,a)$外，通过A的每一个点都只有一条母线，而且A的所有母线都通过$(0, 0, a)$。

B-1. 设A和B是分别位于X轴上和Y轴上的正方形的两相邻顶点，设$P(x,y)$是正方形内一指定点．则P之坐标由下式给出：

$$
\begin{aligned}
x&=n\sin\theta+l\cos\theta,\\
y&=m\sin\theta+n\cos\theta,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

其中n，l，m和θ的定义如图18所示。

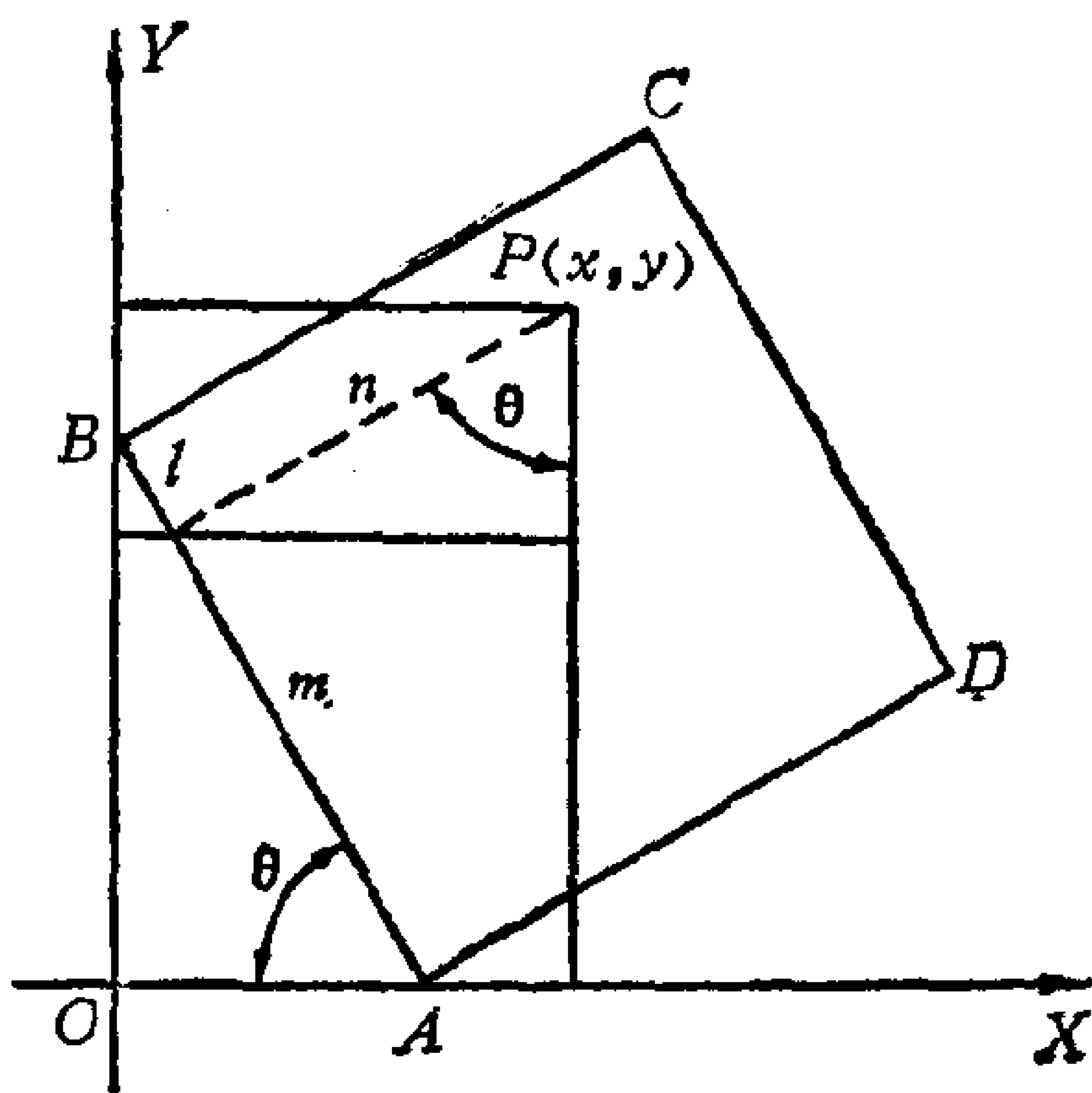


图18

对$\sin\theta$和$\cos\theta$求解方程组（1），得到

$$(lm-n^2)\cos\theta=mx-ny,$$

$$(lm-n^2)\sin\theta=-nx+ly.$$

因此对于θ的任何值，P之坐标均满足方程

$$(lm-n^2)^2=(mx-ny)^2+(-nx+ly)^2. \qquad (2)$$

(2) 可化为$(m^2+n^2)x^2-2n(l+m)xy+(l^2+n^2)y^2$

$$=(lm-n^2)^2, \qquad (3)$$

(3) 一般表示一条有心二次曲线，其判别式是

$$\Delta=4n^2(l+m)^2-4(m^2+n^2)(l^2+n^2)$$
$$=-4(lm-n^2)^2.$$

显然，Δ不能为正．如果$\Delta<0$，则(3)表示一个椭圆或一个圆．(3) 表示一个圆的充要条件是$m^2=l^2$和$n(l+m)=0$成立．由于$l+m=AB$不能为零，因而表示一个圆的充要条件就是 $n=0$和$l=m$成立；即P是AB的中点．

如果$\Delta=0$，则(3)右边的项也为零，(3)可化为

$$\frac{l+m}{m}(mx-ny)^2=0,$$

它等价于$y=(m/n)x$，故P沿着一直线移动．

$\Delta=0$或$lm=n^2$的几何意义是P位于以 AB 为直径的一个半圆上（注意：n是l和m的比例中项）．当$l=m=n$时，P成为给定正方形的中心，其轨迹是直线$y=x$的一部分，这正是本届竞赛A-1题已得之结论．

如果$\Delta\neq0$，即如果$lm\neq n^2$，则参数式(1)是非退化的（即$dx/d\theta$和$dy/d\theta$不同时为零），所以当θ由0变化到$\pi/2$时，点P沿其椭圆轨线光滑移动．

如果$\Delta=0$，则如前述，P在一个以AB为直径的半圆上．这个圆的另一半将通过原点O．因此，当θ由O变化到$\pi/2$时，半圆上的点P先离开原点方向移动，直至PO成为这个动圆的直径，然后再移动回来．要从分析上看出这一点，只需注意到x是θ的

函数，回移仅当x有一临界值时才能发生。但$dx/d\theta=0$必需 $\text{tg}\theta=n/l$，这意指PB垂直于y轴，所以PO为动圆的一条直径。

B-2. (i)把给定方程化为标准形式

$$y+\frac{35}{16}a=\frac{a^3}{3}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2,$$

由此得出具有代表性的顶点是

$$\left(-\frac{3}{4a},\ -\frac{35}{16}a\right).$$

如果$a=0$，则给定曲线为一直线，不是抛物线，所以它无顶点。显然，给定族中所有抛物线的顶点都在双曲线$xy=105/64$上。反之，双曲线上的每一个点都是给定族中一条唯一的抛物线的顶点，因为若(x_0,y_0)在双曲线上，则从$x_0=-3/4a, y_0=-35a/16$可以唯一地解出a的值。

(ii) 令 $$f(x,y,a)=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a-y.$$

则 $$\frac{\partial f}{\partial a}(x,y,a)=(ax+2)(ax-1).$$

为了找出曲线族的包络，我们应由$\partial f/\partial a=0$和$f=0$中消去a。由于把$\partial f/\partial a$的两个因子等于零时将有$ax=1$或$ax=-2$，故得

$$xy=\frac{(ax)^3}{3}+\frac{(ax)^2}{2}-2ax=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2=\frac{-7}{6},$$

或 $$=\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+4=\frac{10}{3}.$$

容易证明，对应于参数a的抛物线与双曲线

$xy=-7/6$相切于点$\left(\frac{1}{a},\ \frac{-7a}{6}\right)$，

又与双曲线$xy=10/3$相切于点$\left(-\frac{2}{a},\ -\frac{5}{3}a\right)$。

因此，所求之包络是两双曲线的并。

(iii)作图，如图19。

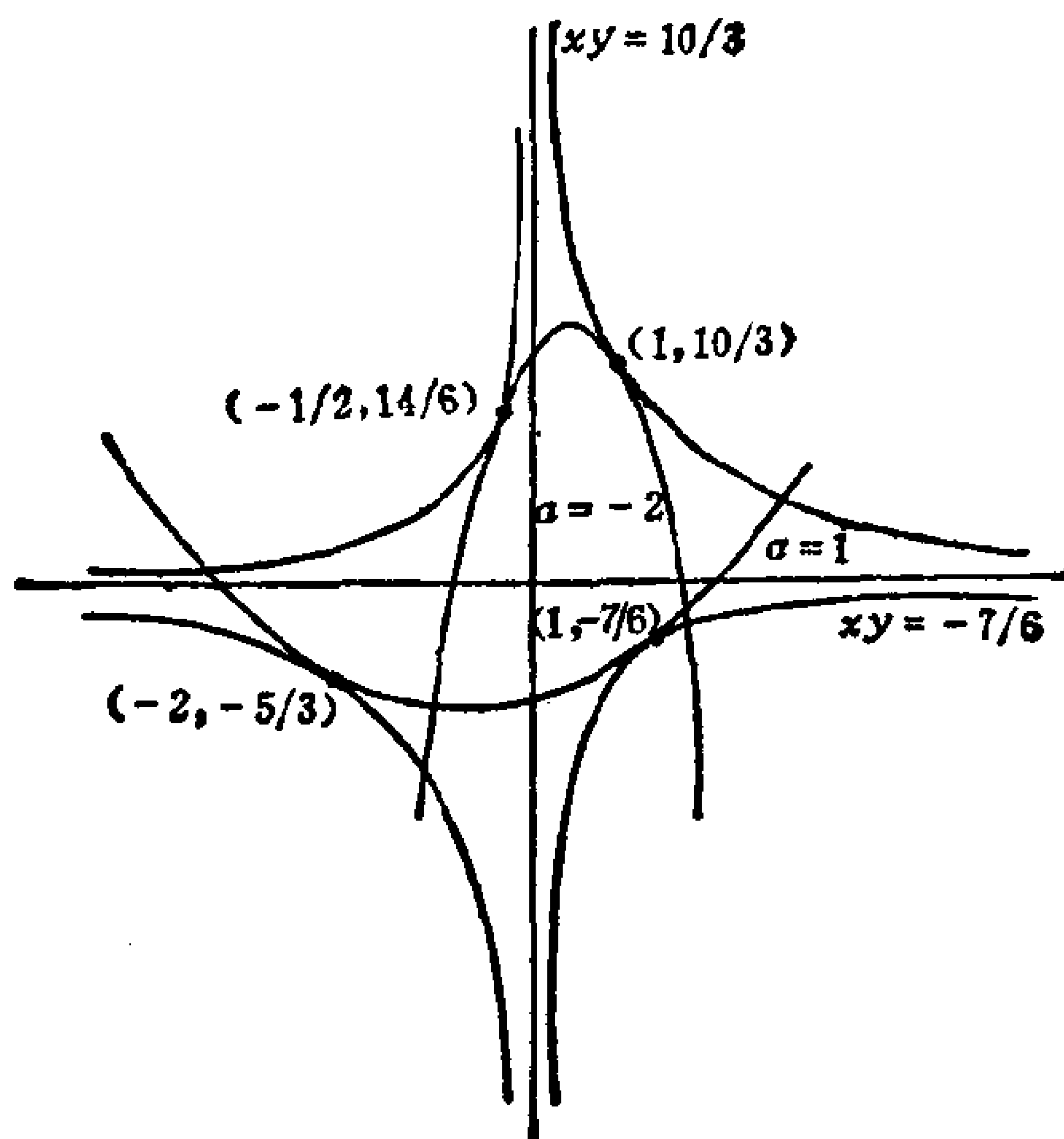


图19

B-3. 由题意显然可知：对每个x和v必存在唯一的u和y，使得$x=\varphi(u,v)$和$y=\psi(u,v)$，也就是必有函数α和β使得$u=\alpha(x,v)$和$y=\beta(x,v)$。我们先假定这些函数都具连续的一阶偏导数，然后再更仔细地来讨论可微性假定。

为减少记号混淆，我们令φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2分别表示φ和ψ对其第一个和第二个自变量的偏导数．利用这种记号，方程(1)可以表为

$$\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1=1.$$

当x和v取作自变量时，令

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial u}{\partial x}\text{和}\frac{\partial u}{\partial v}$$

表示y和u的偏导数．则有

$$\varphi_1 \frac{\partial u}{\partial v} + \varphi_2 = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \tag{4}$$

$$\psi_1 \frac{\partial u}{\partial v} + \psi_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \tag{5}$$

$$\psi_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{6}$$

由(5)，(3)及(1)得

$$\varphi_1 \frac{\partial y}{\partial v} = \psi_1 \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial v} + \psi_1 \varphi_1 = -\psi_2 \varphi_2 + \varphi_1 \psi_2 = 1.$$

两边同乘以$\partial u/\partial x$，并引用(4)则得

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

这即为所要求的方程(2)，

现设 $y = \int^v f(x,\eta)d\eta + g(x)$，$u = \int^x f(\xi,v)d\xi + h(v)$，

其中f，g和h均是连续函数。则显然有

$$\frac{\partial y}{\partial v} = f(x,v) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

而且我们得出(2)的一个范围广泛的解类。

假设 $y = \alpha(x,v)$， (7) $u = \beta(x,v)$ (8)

给出(2)的一个解，即$\alpha_2 = \beta_1$；并且假设β_1永不为零。则由(8)能解出x为u和v的函数，比方说$x = \varphi(u,v)$，将这个结果再代入(7)，又能把y表为u和v的函数，比方说 $y = \psi(u,v)$。于是，把u和v看作自变量，就有

$$\beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad (9) \qquad \beta_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \beta_2 = 0, \quad (10)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u}, \tag{11}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \alpha_2 = \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{12}$$

由(9)及(11)知$\alpha_1 = \beta_1 \partial y/\partial u$，所以

$$\beta_1\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right] = \frac{\partial y}{\partial v} - \alpha_1\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha_2. \tag{13}$$

因为已设$\alpha_2 = \beta_1$及β_1永不为零，故可得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1,$$

这即是(1)。因此，由满足β_1不等于零的(2)之解可以得出(1)之解。

在x和v为独立变量的假设下，确立了(1)和(2)的等价性。根据隐函数定理，这相当于（局部地）假设φ_1(原来函数φ之偏导数）不等于零。如果φ_1在一点(u_0, v_0)等于零，则由(1)显然φ_2在(u_0, v_0)不等于零，又由连续性假设，φ_2在(u_0, v_0)邻近也不等于零。因此，我们能局部地解出v为x和u的函数，而且在互换u与v的位置后，论证仍如前面所述那样进行。这样就得到(1)的所有其他的局部解。再考察一个极端情形。设φ_1处处等于零，那么$x = \varphi(v)$与u无关。于是(1)成为$\varphi'\psi_1 = -1$，由于φ'只依赖于v，这个方程可以关于u积分。故得

$$\varphi'\psi = -u + k(v).$$

因而对任何有非零导数的函数φ和任何函数k均有

$$\begin{aligned} x &= \varphi(v), \\ y &= (-u + k(v))/\varphi'(v). \end{aligned} \tag{14}$$

方程(14)给出了(1)的一个解，它不属于以前已得出的解类。这种解正是所要求的(1)的另外的解。

讨论与说明．虽然许多论证对于C^1类函数有效，但我们最先仍假定只考虑C^∞类函数，而且只局部地考虑问题的解．

根据这些假定，在任一个满足$\varphi_1 \neq 0$的点邻近，由最初的方程$x=\varphi(u,v)$能把u解出并局部地确定为x和v的函数，从而把u表为x和v的一个C^∞函数．u一经表为x和v的C^∞函数，代入$y=\psi(u,v)$就能把y也表为x和v的一个C^∞函数．(2)的求导因而可以毫无困难地进行．这许多论证都只要求φ为C^1函数．

在求解(2)时，我们现在要求f,g和h都属于C^∞类．比方说f是定义在矩形开集$I\times J$上的C^∞函数，这里I和J均是R内的开区间．取$a\in I$，$b\in J$，而且定义

$$y=\int_b^v f(x,\eta)d\eta+g(x),\qquad u=\int_a^x f(\xi,v)d\xi+h(v).$$

则这些函数都是(2)的C^∞解；反之，(2)的每一个具有矩形定义域的C^∞解都有这种形式．正是在于这一点，把函数限定到C^∞类是重要的．对于(2)的具有有限可微性的所有解类(比方说C^1类或C^2类)，要显示它们的特征是不容易的．

B-4． 采用极坐标，选取力心为极点，质点圆轨道的一条直径为极轴．则轨道方程为

$$r=A\cos\theta, \tag{1}$$

式中A是圆的直径．

运动方程为

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{1}{m}f, \tag{2}$$

$$r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0, \tag{3}$$

式中m是质点质量，f是中心力量值．因为f带有负号，故正的f表示一吸引力．

方程(3)乘以r之后，再积分就给出

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h, \tag{4}$$

故质点的动量矩守恒。

两次微分(1)，并运用(4)，便得

$$\frac{dr}{dt}=-A\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{Ah\sin\theta}{r^2},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{Ah\cos\theta}{r^2}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\frac{2Ah\sin\theta}{r^3}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$=-\frac{h^2}{r^3}-\frac{2A^2h^2\sin^2\theta}{r^5}.$$

然后代入(2)，又得

$$-\frac{f}{m}=-\frac{h^2}{r^3}-\frac{2A^2h^2\sin^2\theta}{r^5}-r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2$$

$$=-\frac{2h^2}{r^5}\left(r^2+A^2\sin^2\theta\right)=-\frac{2A^2h^2}{r^5}.$$

所以有$f=2mA^2h^2r^{-5}$及$k=5$。

B-5. 令 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^6\sin^2x}$.

则f为一奇函数，它的图形是对称于原点的；所以我们只需考虑x的非负值。

显然 $$x\geqslant\frac{x}{1+x^6\sin^2x}\geqslant\frac{x}{1+x^6}.$$

在点$x=n\pi$(n为整数)，曲线与直线$y=x$相切。在点$x=(n+1/2)\pi$，曲线与$y=x/(1+x^6)$的图形相切。

因此，$f(x)$的图形在上曲线$y=x$和下曲线$y=x/(1+x^6)$之间振荡。

除了很接近π的整数倍那些值之外，对于大的x值f是很小的，即接近下曲线。实际上，在π的整数倍处，图形的特点在于它具有又高又窄的尖锋（尖锋实际比图20上画出的窄得多。例如，在离2π 0.1的范围以内，函数值f下降不到0.02）。

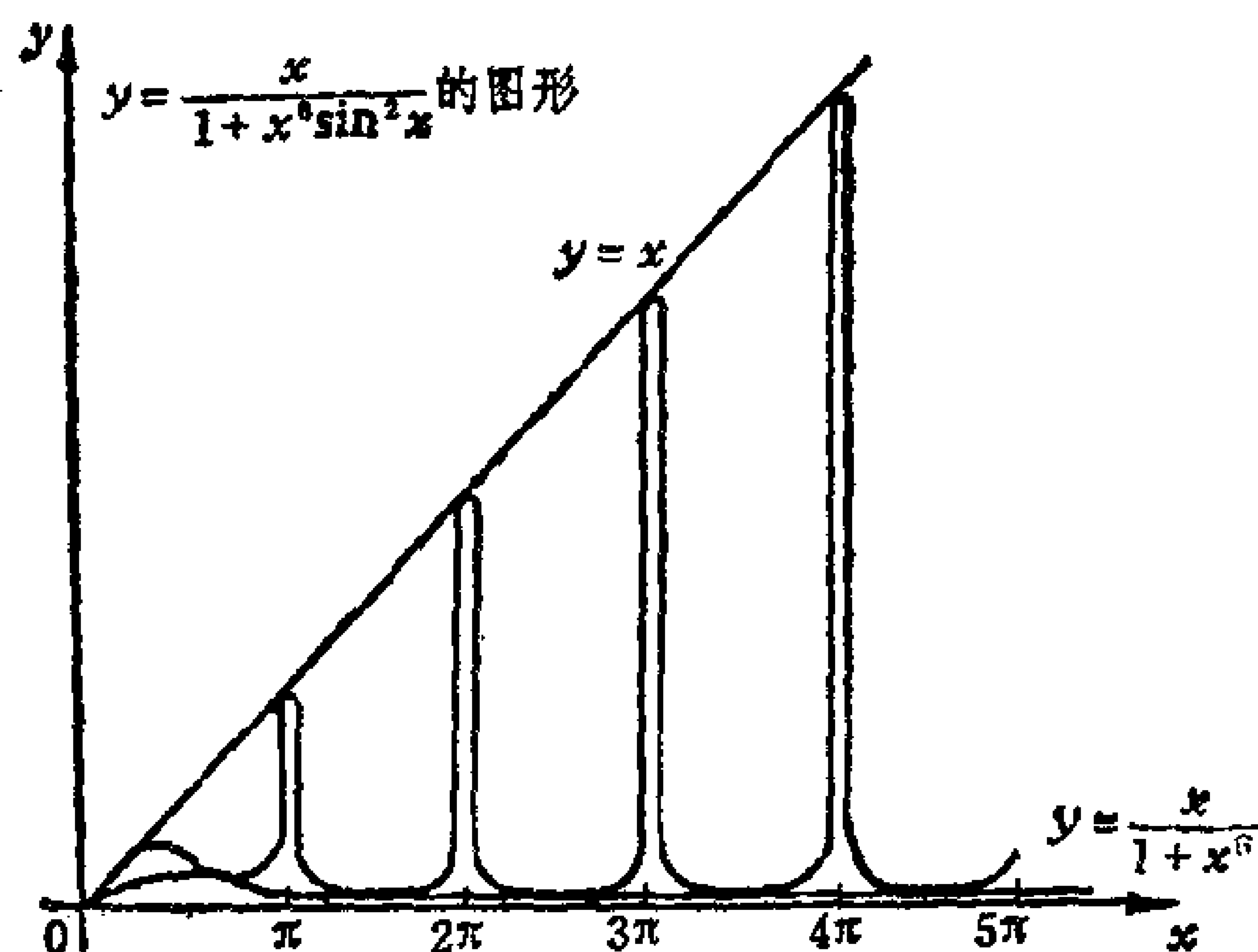


图20

因为f在整个积分区域上为非负，故$\int_0^\infty f(x)dx$ 的收敛性问题等价于$\int_0^l f(x)dx$是否有界，也就是等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} f(x)dx$$

是否收敛？

注意当$|t|\leqslant\pi/2$时$|\sin t|\geqslant(2/\pi)|t|$成立。

令 $k_n=2\pi^2\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)^3$。则对任何正整数$n$及对

$$(n-1/2)\pi\leqslant x\leqslant(n+1/2)\pi,$$

有
$$1+x^6\sin^2 x=1+x^6\sin^2(x-n\pi)$$

$$\geqslant 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^6\pi^6\frac{4}{\pi^2}(x-n\pi)^2$$

$$=1+k_n^2(x-n\pi)^2.$$

故得 $$f(x)\leqslant\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+k_n^2(x-n\pi)^2}.$$

所以 $$\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}f(x)dx\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{du}{1+k_n^2u^2}$$

$$\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+k_n^2u^2}$$

$$=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi^2}{k_n^2}\leqslant\frac{A}{n^2}$$

对于某个与n无关的数A成立。

由于$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$收敛，故可断言

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}f(x)dx$$

亦收敛。

所以$\int_0^{\infty}f(x)dx$存在。

第六届（1946年6月1日）

上午试题

A-1. 设a，b，c为实常数，函数$f(x)=ax^2+bx+c$当$|x|\leqslant1$时满足条件$|f(x)|\leqslant1$.试证当$|x|\leqslant1$时成立$|f'(x)|\leqslant4$.

A-2. 设$a(x)$，$b(x)$，$c(x)$和$d(x)$都是x的多项式. 试证

$$\int_1^x a(x)c(x)dx \cdot \int_1^x b(x)d(x)dx - \int_1^x a(x)d(x)dx \cdot$$
$$\cdot \int_1^x b(x)c(x)dx$$

可被$(x-1)^4$除尽。

A-3. 位于边长为b的一正方形四角上的四个雷达站同时发现一枚飞弹，这时飞弹至四个雷达站的距离，按照环绕正方形次序，各为R_1，R_2，R_3，R_4。证明：

$$R_1^2+R_3^2=R_2^2+R_4^2.$$

并证明此时飞弹离开地面的高度h由下列公式给出：

$$h^2=-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{4}(R_1^2+R_2^2+R_3^2+R_4^2)-$$
$$-\frac{1}{8b^2}(R_1^4+R_2^4+R_3^4+R_4^4-2R_1^2R_3^2-2R_2^2R_4^2).$$

A-4. 设函数$g(x)$对一切x值有连续的一阶导数$g'(x)$. 又设对每一x下列条件成立：(i)$g(0)=0$；(ii)$|g'(x)|\leqslant|g(x)|$. 试证$g(x)$恒等于零。

A-5. 求由坐标平面与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的一个切平面所界的最小体积.

A-6. 一单位质量的质点在一直线上运动，它所受的作用力$f(v)$是其速度v的函数，但具体形式不知。观测质点的运动，发现在时间t内质点通过的路程x可用公式$x=at+bt^2+ct^3$来表示，式中a，b，c均为常数，数值由观测决定。试对进行实验的v值范围求出函数$f(v)$。

下午试题

B-1. 令K表示半径为1的一个圆盘的圆周，令k表示联结K上两点a，b且含于圆盘内部的一条圆弧。假设k把圆盘分成面积相等的两部分。试证k的长度大于2。

B-2. 设A和B为一抛物线P上的两个变点，使得在A和B处的两条切线相互垂直。证明由A，B及P之顶点所成的三角形形心的轨迹为一抛物线P_1。对P_1再重复上述过程，又得一抛物线P_2，余类推，设如此得到的抛物线序列为P，P_1，$P_2\cdots$，P_n。如果P的方程是$y^2=mx$，试求P_n的方程。

B-3. 有一半径为R的实心球，其密度ρ是离开球心的距离r的函数。如果球对球内任意一点的引力量值是kr^2(k为常数)，试求出函数$\rho=\rho(r)$。并且求出在球外面距球心为r远处的一点所受引力的量值。(对于一薄球壳体作如下假定：如果点P在壳体里面，则设壳体对P的引力值为零；如果P在壳体外面，则设引力值为m/r^2，其中m是壳体的质量，r是P到球心的距离。)

B-4. 对每一个正整数n，令

$$p_n=(1+1/n)^n,\quad P_n=(1+1/n)^{n+1},\quad h_n=\frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}.$$

证明$h_1<h_2<\cdots<h_n<\cdots$。

B-5. 证明大于$(\sqrt{3}+1)^{2n}$的下一个整数能被2^{n+1}除尽。

B-6. 一质点在一圆心为O的圆上运动。已知它在一点P从静止开始，到达另一点Q又静止下来，中间再无其他静止点。试证质点的加速度矢量在P与Q之间的任何一点均不为零，而且在P与Q之间的某一点R，加速度矢量必沿半径RO的方向。

解答

A-1. 若$a\neq 0$，则$y=ax^2+bx+c$的图形为一抛物线，不失一般性，可设其开口向上，即设$a>0$（稍后我们再讨论$a=0$的直线情形）。由于对称性，我们可以假定b非负。则抛物线的顶点属于左半平面，显然$\max\limits_{|x|\leq 1}|f'(x)|$在$x=1$时出现，而且这个最大值等于$2a+b$。还需证明$2a+b\leq 4$。

现在$f(1)=a+b+c\leq 1$，$f(0)=c\geq -1$。所以$a+b\leq 2$。因为a和b两者都非负，故有$a\leq 2$及$2a+b\leq 4$。

$a=0$的情形。若$a=0$，则

$$f'(x)=b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}.$$

所以
$$|f'(x)|\leq\frac{|f(1)|+|f(-1)|}{2}\leq 1.$$

A-2. 由于a，b，c，d都是多项式，则所考察的积分式也是一个多项式，设为$F(x)$。为明确起见，我们把积分变量换写为t，所以

$$F(x)=\int_1^x acdt\cdot\int_1^x bddt-\int_1^x addt\cdot\int_1^x bcdt.$$

显然$F(1)=0$，由此知$F(x)$可被$(x-1)$除尽。而且

$$F'(x)=ac\int_1^x bddt+bd\int_1^x acdt-ad\int_1^x bcdt-bc\int_1^x addt,$$

于是有$F'(1)=0$。又

$$F''(x)=(ac)'\int_1^x bddt+(bd)'\int_1^x acdt-(ad)'\int_1^x bcdt$$

$$-(bc)'\int_1^x addt+acbd+bdac-adbc-bcad,$$

于是又有$F''(1)=0$。最后

$$F'''(x)=(ac)''\int_1^x bd\,dt+(bd)''\int_1^x ac\,dt-(ad)''\int_1^x bc\,dt$$
$$-(bc)''\int_1^x ad\,dt+(ac)'bd+(bd)'ac-(ad)'bc$$
$$-(bc)'ad.$$

可以看出，其中不包含积分的四项等于$[(ac)\cdot(bd)]'-[(ad)\cdot(bc)]'=0$，于是还有$F'''(1)=0$。因此$F(x)$可被$(x-1)^4$除尽。

A-4. 我们首先把微分不等式变换为积分不等式.设$x\geqslant0$。利用 (i)，(ii) 和g'的连续性，有

$$|g(x)|=\left|\int_0^x g'(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|g'(t)|\,dt\leqslant\int_0^x|g(t)|dt.$$

于是
$$|g(x)|\leqslant\int_0^x|g(t)|dt,\quad x\geqslant0. \qquad (1)$$

任取$a\geqslant0$。因为g是可微的，所以g在任何有限区间上连续且有界。这样就有一个数K，使得

$$|g(x)|\leqslant K,\quad 0\leqslant x\leqslant a.$$

如果$0\leqslant t\leqslant x\leqslant a$，有$|g(t)|\leqslant K$，则(1)给出

$$|g(x)|\leqslant\int_0^x K\,dt=Kx,\qquad 0\leqslant x\leqslant a.$$

若当$0\leqslant t\leqslant x\leqslant a$时有$|g(t)|\leqslant Kt$，则 (1)又给出

$$|g(x)|\leqslant\int_0^x Kt\,dt=\frac{1}{2}Kx^2,\qquad 0\leqslant x\leqslant a.$$

如此继续，则可得出

$$|g(x)|\leqslant\frac{1}{n!}Kx^n,\qquad 0\leqslant x\leqslant a \qquad (2)$$

对一切正整数n均成立。

为要严格地证明(2)，我们采用数学归纳法. 已经证明(2)

当$n=1$时成立。假设（2）当$n=P$时成立。即设$0\leqslant t\leqslant x\leqslant a$时有$|g(t)|\leqslant Kt^P/P!$。把这一假设用于（1）中，我们得到

$$|g(x)|\leqslant\int_0^x \frac{1}{P!}Kt^P dt=\frac{1}{(P+1)!}Kx^{P+1},\quad 0\leqslant x\leqslant a.$$

所以（2）当$n=P+1$时也成立。故(2)对一切n都成立。

在（2）中令$x=a$，且令$n\to\infty$，则有

$$|g(a)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}Ka^n=0.$$

故$g(a)=0$。由于a是任意的，所以g在整个$[0,\infty)$上等于零。

考虑由等式$h(x)=g(-x)$定义的函数h。因为h有连续的导数且满足（i）和（ii），根据已经证得的结论，h在$[0,\infty)$上必等于零。所以g在$(-\infty,0]$上也等于零。

与上述论证稍有不同的一种证法是直接证明下面形式的不等式成立：

$$|g(x)|\leqslant\frac{1}{n!}L|x|^n,\qquad -a\leqslant x\leqslant a,$$

然后对正的和负的变元同时获得命题的证明。

A-5。给定椭球面在点(x_1, y_1, z_1)处的切平面的方程是

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1.$$

它在x，y和z三轴上的截距分别为

$$\frac{a^2}{x_1},\ \frac{b^2}{y_1},\ \frac{c^2}{z_1}.$$

由此切平面与三个坐标平面所围成立体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\left|\frac{a^2b^2c^2}{x_1y_1z_1}\right|. \quad (1)$$

(如果$x_1y_1z_1=0$，则四个平面围成无界区域。）因此

$$V^2=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}\frac{y_1^2}{b^2}\frac{z_1^2}{c^2}\right)^{-1}. \quad (2)$$

但

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}\cdot\frac{y_1^2}{b^2}\cdot\frac{z_1^2}{c^2}\right)^{1/3}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)=\frac{1}{3},$$

等号仅当$\frac{x_1^2}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ (3)

时成立（算术平均值与几何平均值不等式）。所以

$$V^2\geqslant\frac{27}{36}a^2b^2c^2,\quad V\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{3}\,abc,$$

等号仅当（x_1，y_1，z_1）为满足（3）的八个点中的一个时成立，八个点是（$\pm a/\sqrt{3}$，$\pm b/\sqrt{3}$，$\pm c/\sqrt{3}$）。

当然，限制（x_1，y_1，z_1）为椭球面上一个点，先找出乘积$x_1y_1z_1$的最大值，因而求出V的最小值，这也是可行的。

A-6. 对于单位质量的一个质点，牛顿运动定律采取形式

$$F=力=\frac{dv}{dt}.$$

因为已给$x=at+bt^2+ct^3$，

故有 $$v=\frac{dx}{dt}=a+2bt+3ct^2,$$

$$\frac{dv}{dt}=2b+6ct.$$

现用v来表示力F：

$$F^2=4b^2+24bct+36c^2t^2$$

$$=4b^2+12c(2bt+3ct^2)=4b^2+12c(v-a).$$

所以 $F=f(v)=\pm\sqrt{4b^2-12ac+12cv}$.

根式前面的符号应取与$2b+6ct$相同的符号，因为当问题的假设被满足时，对于所研究的时间区间，dv/dt不改变符号，否则v将两次取相同的值。

B-1. 如果K上两点a和b正好是同一条直径的端点，那么就不存在从a至b且二等分圆盘的圆弧。因此，我们可以这样选定坐标系，使得K为单位圆 $x^2+y^2=1$，同时a和b分别具有坐标(c, d)和$(c, -d)$，其中$c<0$。

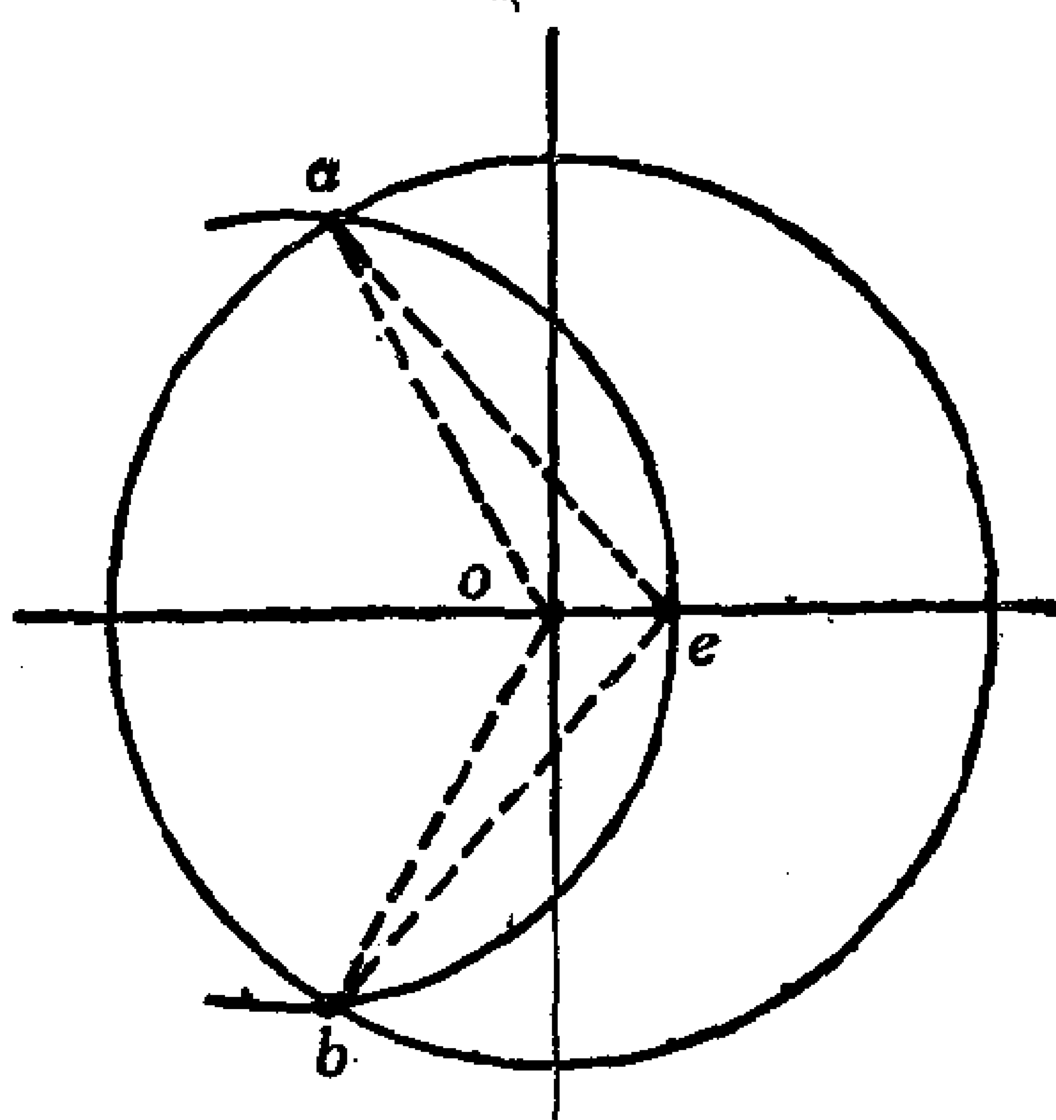


图21

由于弧k把圆盘分成面积相等的两部分，所以它与正x轴必相交于一点e.如果O是原点，我们即得k的长度$>2ae>2aO=2$。

B-2. 因为P是方程为$y^2=mx$的一条抛物线，所以P的任一点的坐标都有形式(mt^2, mt)，其中t为某个实数，反之，每一个这样的点都在P上。与P在(mt^2, mt)处相切的直线的斜率为$1/2t$。

设A和B是坐标分别为(ms^2, ms)和(mt^2, mt)的两点。在A和B处P的两条切线相互垂直的充要条件是$(1/2s)(1/2t)=-1$，即是

$$st=-\frac{1}{4}. \tag{1}$$

点A，点B和P之顶点$(0, 0)$所成三角形的形心是

$$\left(\frac{1}{3}m(s^2+t^2), \ \frac{1}{3}m(s+t)\right), \tag{2}$$

如果垂直性条件（1）被满足，则该形心必在一条新抛物线

$$y^2=\frac{1}{3}m\left(x-\frac{m}{6}\right) \tag{3}$$

上．反之，抛物线（3)上的任一点（x，y）必有形式（2)，因为总能求解方程组

$$\frac{1}{3}m(s+t)=y,$$

$$st=-\frac{1}{4}$$

给出实的s和t。实际上，s和t是$s^2-(3y/m)s-\frac{1}{4}$的零点，而这个二次三项式又有正的判别式．因而题目中所考察的轨迹是由（3)给出的整条抛物线P_1。

于是，为要从P得到P_1，只需把常数从m变为$m/3$，并把顶点向右移动$m/6$。所以，为要从P_1得到P_2，又只需把常数从$m/3$变为（$(m/3)/3$，并把顶点再向右移动（$(m/3)/6$。因此P_2的方程是

$$y^2=\frac{1}{9}m\left(x-\frac{1}{6}m-\frac{1}{18}m\right).$$

继续这种推论，可以看出P_n具有方程

$$y^2=\frac{1}{3^n}m\left(x-\frac{1}{6}m-\frac{1}{6\cdot 3}m-\frac{1}{6\cdot 3^2}m-\cdots-\frac{1}{6\cdot 3^{n-1}}m\right)=\frac{1}{3^n}m\left(x-\frac{m}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right).$$

B-3. 设P是距离球心为r的一点．我们把实心球看作许多薄同心球壳体的一个并集．对P的引力是各个壳体的引力之和．所有这些引力都作用在同一个方向，所以可把它们的量值简单相

加.

距离球心为s，厚度为Δs的壳体体积近似地等于$4\pi s^2\Delta s$，质量近似等于$4\pi\rho(s)s^2\Delta s$，所以当$r>s$时该壳体对P的引力值近似等于

$$\frac{4\pi\rho(s)s^2\Delta s}{r^2},$$

当$r<s$时引力值为零. 因此对P的总引力的精确值是

$$F=\begin{cases}\int_0^r \frac{4\pi\rho(s)s^2ds}{r^2}, & \text{若} r\leqslant R;\\ \int_0^R \frac{4\pi\rho(s)s^2ds}{r^2}, & \text{若} r>R.\end{cases} \tag{1}$$

已知当$r\leqslant R$时$F=kr^2$，故有

$$kr^2=\int_0^r \frac{4\pi\rho(s)s^2ds}{r^2},\quad r\leqslant R,$$

我们必须解出ρ. 两边乘以r^2，然后关于r微分则得

$$4kr^3=4\pi\rho(r)r^2.$$

所以
$$\rho(r)=\frac{k}{\pi}r$$

即为所要求的ρ之表示式.

把ρ代入（1），就有

$$F=\frac{4\pi}{r^2}\int_0^R \frac{ks}{\pi}s^2\,ds=\frac{kR^4}{r^2},\quad r>R.$$

B-4. 容易得出$h_n=2(n+1)^{n+1}n^{-n}(2n+1)^{-1}$. 考虑由下式定义的函数$g$:

$$g(x)=\log 2+(x+1)\log(x+1)-x\log x-\log(2x+1).$$

则当$0<x<\infty$时有

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{2}{2x+1},$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}<0.$$

因此g'在$(0,\ \infty)$上单调减少。由于

$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x+1}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x+1}=0,$$

又知g'在$(0,\ \infty)$上为正。因而g在$(0,\ \infty)$上单调增加，所以n为正整数时$h_n=\exp g(n)$是一严格增序列。

B-5. 证明本题以及许多类似问题的关键是知道大于$(1+\sqrt{3})^{2n}$的下一个整数是$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$。我们先证明这一点。事实上，对每个正整数$n$，都有整数$A_n$和$B_n$，使得成立

$$(1+\sqrt{3})^{2n}=A_n+B_n\sqrt{3}$$

及 $$(1-\sqrt{3})^{2n}=A_n-B_n\sqrt{3}.$$

因而$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=2A_n$也必是一个整数。由于$|1-\sqrt{3}|<1$，故$0<(1-\sqrt{3})^{2n}<1$。所以$2A_n$确是大于$(1+\sqrt{3})^{2n}$的下一个整数。

于是问题变为证明$2A_n$能被2^{n+1}除尽，或A_n能被2^n除尽。

我们用归纳法证明对所有的n，A_n和B_n二者都能被2^n除尽。因为$A_1=4$和$B_1=2$，故命题当$n=1$时成立。假设命题当$n=k$时成立。则有

$$A_{k+1}+B_{k+1}\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2(A_k+B_k\sqrt{3})$$
$$=(4A_k+6B_k)+(2A_k+4B_k)\sqrt{3},$$

所以 $A_{k+1}=2(2A_k+3B_k)$，$B_{k+1}=2(A_k+2B_k)$。

由归纳假设显然A_{k+1}和B_{k+1}二者都能被2^{k+1}除尽，命题当$n=k+1$时也成立。故命题对任意正整数n均成立。本题获证。

B-6. 设圆之半径为r.如果把圆心选为卡氏坐标系的原点，则质点的坐标为 ($r\cos\theta$, $r\sin\theta$)，其中θ是时间 t的函数。微分两次之后，可以看出加速度矢量是

$$r\frac{d\omega}{dt}(-\sin\theta,\ \cos\theta)+r\omega^2(-\cos\theta,\ -\sin\theta), \qquad (1)$$

其中$\omega=d\theta/dt$为角速度。由于 ($-\sin\theta$, $\cos\theta$) 和 ($-\cos\theta$, $-\sin\theta$) 为切线方向和内法线方向的正交单位矢量，故看出 (1) 之两项分别是加速度的切向分量和法向分量，因为$\omega\neq0$，所以加速度矢量决不为零。因为开始和末了都有$\omega=0$，由罗尔定理必存在一中间时刻，使得$d\omega/dt=0$。又因为$r\omega^2>0$，所以此时加速度矢量沿半径指向圆心。

第七届（1947年5月24日）

上午试题

A-1. 设数列$\{a_n\}$满足条件：

$$(2-a_n)a_{n+1}=1,\ \ n\geqslant1.$$

试证当$n\to\infty$时$\lim a_n$存在且等于1。

A-2. 设一实值连续函数对于所有实x和y满足函数方程

$$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y).$$

证明 $$f(x)=[f(1)]^{x^2}.$$

A-3. 给定一平面图形 (图22) 以及在该平面内但不在线段s_1, s_2,…, s_8上的任意两点Q_1和Q_2。证明连结Q_1和Q_2且具有下述性质的折线P不存在：(i) P穿过每一 s_i ($i=1$, 2, …,

6）恰有一次；(ii) P 不与它自身相交；(iii) P 不通过任一个顶点 V_1，V_2，V_3，V。

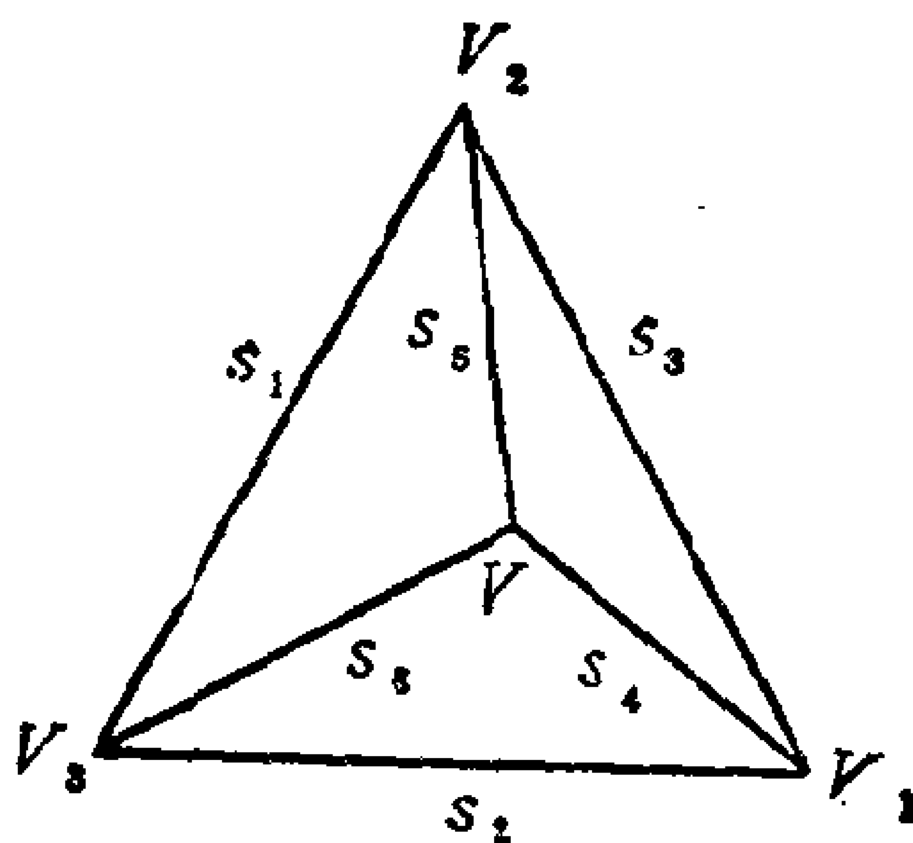


图22

A-4. 一门海岸炮在一固定垂直平面内能以0°和90°之间的任一仰角发炮。如果空气阻力忽略不计，炮弹离开炮口时的初速为一常数（$=V_0$），试求出该平面内位于水平线上方能被炮弹击中的点的集合 H。

A-5. 设 a_1，b_1，c_1 均为正数，其和等于1。对 $n=1$，2，…定义

$$a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n, b_{n+1}=b_n^2+2c_na_n, c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n.$$

证明当 $n\to\infty$ 时 a_n，b_n，c_n 的极限都存在，并且求出这些极限。

A-6. 一个 3×3 矩阵的行列式等于零，且其任一元素的余因子等于该元素的平方。（a_{ij} 的余因子是划去第 i 行和第 j 列后得到的行列式与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积。）试证矩阵中每个元素都为零。

下午试题

B-1. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x\geqslant1$

有 $$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

试证极限 $$\lim_{x\to\infty}f(x)$$

存在，且极限值小于 $1+\pi/4$。

B-2. 设 $f(x)$ 是一定义在闭区间[0，1]内的可微函数，满足 $|f'(x)|\leqslant M$，$0<x<1$。

试证 $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{n}$.

B-3. 设x, y为平面内点的卡氏坐标。I表示线段$1\leq x\leq 3$, $y=1$。对于I上的每一点P, 在连结原点与P的线段上取一点P^*, 使得距离PP^*等于1/100。当P沿I运动时, 对应点P^*沿某一曲线C^*运动. 设$l(I)$和$l(C^*)$分别是l和C^*的长度。问$l(I)$和$l(C^*)$哪一个较大? 证明你的结论。

B-4. 设$P(z)=z^2+az+b$是一具有复系数a, b的复变量z的二次多项式。又设对满足$|z|=1$的每一个z均有$|P(z)|=1$。试证$a=b=0$。

B-5. 设a, b, c, d为不同整数, 使得

$$(x-a)(x-b)(x-c)\cdot(x-d)-4=0$$

有一个整数根r。证明

$$4r=a+b+c+d.$$

B-6. OX, OY, OZ是互相垂直的直线, C是OZ上一定点, U和V分别是OX上和OY上的两变点。一点P使得PU, PV, PC相互垂直, 试求点P的轨迹。

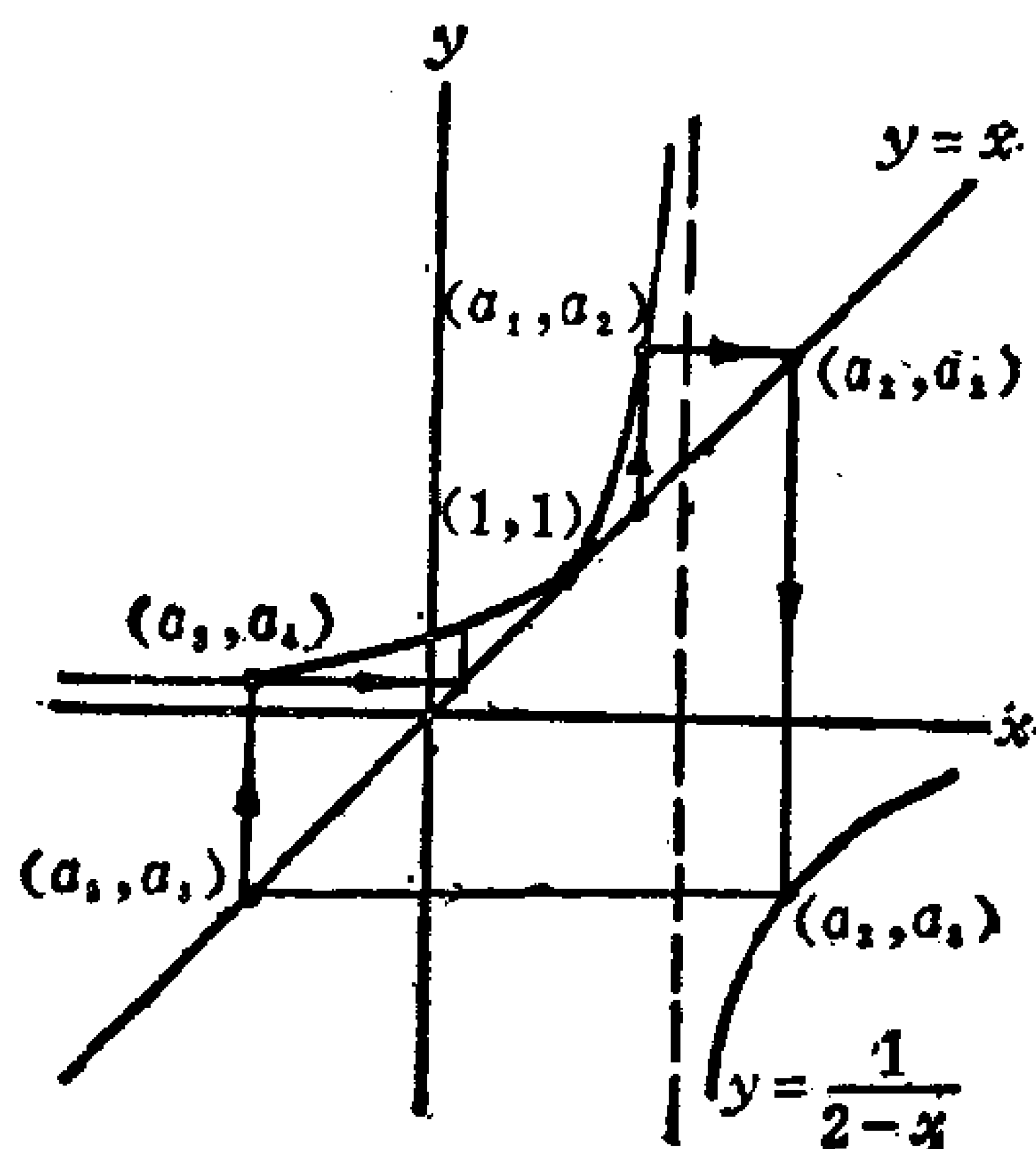


图23

解答

A-1. 在分析形如$a_{n+1}=f(a_n)$的递推式时, 常常先用图示法。即在同一个坐标系中先作出f的图形和直线$y=x$。(本题中$f(x)=1/(2-x)$).然后从直线上一点(a_1, a_1)出发向上或向下

移动到图形上一点(a_1, a_2)。然后又水平地移回到直线上一点(a_2, a_2)，然后再垂直地移动到(a_2, a_3)；等等。依次连结这些点则形成一条折线。如果序列$\{a_n\}$收敛于极限L，则折线必收敛于(L, L)；而且，若L是f的一个连续点，则$f(L)=L$。常有可能一看便明白序列的变化情形。例如对于本题，显然从任一点出发（只要不碰到f无定义的点2）的折线最后必到达(1，1)的左下方区域，而且要继续向着点(1,1)靠近。

下面来论证这个过程，先证明

$$x \leqslant \frac{1}{2-x} \tag{1}$$

对$x<2$成立。事实上，由

$$\frac{1}{2-x}-x=\frac{(1-x)^2}{2-x}$$

立即知(1)为真。又若$x \leqslant 1$，则$1/(2-x) \leqslant 1$。

设$1<a_1<3/2$。可断言对某个n，必有$a_n \geqslant \frac{3}{2}$。假若不然，由(1)可得 $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant \frac{3}{2}$，所以$\{a_n\}$是收敛的，比如收敛于$L$；则 $1<L \leqslant \frac{3}{2}$，且$f(L)=L$；但这样的$L$并不存在。因此有$a_n \geqslant \frac{3}{2}$，从而$a_{n+2} \leqslant 1$。（注意。由于序列满足给定递推式，我们不必担心对某个k成立$a_k=2$的可能性。）所以总有一个指标p使得$a_p \leqslant 1$。故有

$$a_p \leqslant a_{p+1} \leqslant a_{p+2} \leqslant \cdots \leqslant 1.$$

因此，序列收敛于一数M，且$f(M)=M$。这即蕴涵$M=1$。

A-2. 因为0^0无定义，所以满足已给函数方程的实值连续函数$f(x)\equiv 0$并不满足关系式$f(0)=[f(1)]^0$，因而题目要稍加

条件限制。

假定对某个y_0，有$f(y_0)\neq 0$。由于

$$f(x)f(y_0)=f(\sqrt{x^2+y_0^2})=f(-x)f(y_0),$$

故对一切x有$f(x)=f(-x)=f(|x|)$.现用归纳法证明对任意正整数n和任意实数x，成立

$$f(\sqrt{n}x)=[f(x)]^n. \tag{1}$$

(1) 对$n=1$显然为真，假设(1)对$n=k$为真，则有

$$f(\sqrt{k+1}x)=f(\sqrt{k+1}|x|)=f(\sqrt{(\sqrt{k}x)^2+x^2})$$

$$=f(\sqrt{k}x)f(x)=[f(x)]^kf(x)$$

$$=[f(x)]^{k+1}.$$

所以(1)对一切正整数都为真.

如果p和q为非零整数，则有

$$f(p)=f(|p|)=f(\sqrt{p^2}\cdot 1)=[f(1)]^{p^2}$$

及 $$f(|p|)=f\left(\sqrt{q^2}\left|\frac{p}{q}\right|\right)=\left[f\left(\left|\frac{p}{q}\right|\right)\right]^{q^2}.$$

由此二式即得

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^{q^2}=[f(1)]^{p^2}. \tag{2}$$

如果$f(1)>0$，则又得

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]=[f(1)]^{p^2/q^2};$$

这就说明，要求证明的结论对x的一切有理值（或许除去$x=0$）成立。根据连续性，结论必对x的一切值成立。

如果$f(1)=0$，则对一切非零整数p和q，(2) 蕴涵$f(p/q)=0$，所以$f(x)=0$对一切有理数x成立，因而对一切实数x亦成立。

最后证明不可能有$f(1)<0$。事实上，若p为偶数q为奇数，则方程(2)蕴涵$f(p/q)>0$。因此$f(x)>0$对x的一个稠密集成立，所以$f(x)\geqslant 0$对一切x成立；特别，有$f(1)\geqslant 0$。

A-3. (参看图22)先给出一个**引理**：

在由三角形确定的一个平面内有一条折线，如果它不经过三角形的顶点，它穿过三角形的每条边恰好一次，它的两个端点又都不在三角形的边界上，则此折线必有一个端点位于三角形内部。

假设存在如题所述的一条折线P。P穿过每个三角形VV_1V_2，VV_2V_3和VV_3V_1的每条边恰好一次，则由引理这些三角形的每一个内部都必有P的一个端点。但这些三角形内部互不相交，P又只有两个端点，所以这是不可能的。

引理的证明。设T为三角形，设以Q_1和Q_2为端点的折线P满足引理条件。

如果Q_1在T的内部，则引理已成立，因而假定Q_1在T的外部。当我们沿着P从Q_1移向Q_2时，我们只遇到外点，直到我们穿过T的第一条边为止；然后我们只遇到内点，直到我们穿过T的第二条边为止。此后我们又只遇到外点，直到我们穿过T的第三条边为止；而且从这里开始，包含端点Q_2在内的所有点全在T的内部。所以Q_2是一个内点。

A-4. 取炮口为坐标原点，垂直发射方向取为y轴正向，水平发射方向取为x轴正向，建立坐标系。对于给定角α和给定初始条件，运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

导致解 $x=v_0t\cos\alpha$，$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$。

消去t得 $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0{}^2}x^2\sec^2\alpha$.

对于一固定正数x，上式可以写为

$$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{v_0^2}{gx}\right)^2,$$

由此易知，能够选取α以使点（x，y）被击中的充要条件是

$$y\leqslant\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (1)$$

为要击中点$(0,\ y)$，则应铅直向上发炮，即取$\alpha=90°$；这时关于y的参数方程可以写成

$$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{g}{v_0}t-1\right)^2,$$

所以能够击到$(0,\ y)$的充要条件显然是$y\leqslant v_0^2/2g$。因此，所要求的集合H由不等式(1)及$0\leqslant x$，$0<y$定义。

A-5. 首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=(a_n+b_n+c_n)^2,$$

所以由归纳法知对一切k都有$a_k+b_k+c_k=1$。而且所有a_n，b_n和c_n也全为正数。

定义$E_n=\max(a_n,b_n,c_n)$和 $F_n=\min(a_n,b_n,c_n)$。若能证明下述事实：

$$F_1\leqslant F_2\leqslant F_3\leqslant\cdots\leqslant F_n\leqslant F_{n+1}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant E_{n+1}\leqslant E_n\leqslant\cdots\leqslant E_3\leqslant E_2\leqslant E_1, \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}(E_n-F_n)=0. \qquad (2)$$

则根据(1)和(2)即知E_n弱单调减小到某个极限L，F_n弱单调增大到同一极限L。因为$F_n\leqslant a_n\leqslant E_n$，所以必蕴涵$a_n\to L$。同理蕴涵$b_n\to L$和$c_n\to L$。由于$a_n+b_n+c_n=1$，故 $L=\frac{1}{3}$.

为证明(1)，假定对某个n值有$a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$。则在方程组

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n^2 + b_n c_n + b_n c_n \\
b_{n+1} &= a_n c_n + b_n^2 + a_n c_n \qquad (3) \\
c_{n+1} &= a_n b_n + a_n b_n + c_n^2
\end{aligned}
$$

的每个方程中，其右边部分均小于或等于$a_n^2 + a_n b_n + a_n c_n = a_n$，且又均大于或等于$a_n c_n + b_n c_n + c_n^2 = c_n$。因此有$E_{n+1} \leqslant E_n$和$F_{n+1} \geqslant F_n$，故得证(1)。

为证明(2)，仍假定对某个n有$a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$。

令
$$
\begin{aligned}
& a_n - b_n = \alpha \geqslant 0, \\
& b_n - c_n = \beta \geqslant 0, \\
& a_n - c_n = \delta = \alpha + \beta \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

则
$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - b_{n+1}| &= |a_n - b_n|\,|a_n + b_n - 2c_n| \\
&= \alpha(\delta + \beta) = (\delta - \beta)(\delta + \beta) \leqslant \delta^2, \\
|a_{n+1} - c_{n+1}| &= |a_n - c_n|\,|a_n + c_n - 2b_n| \\
&= \delta|\alpha - \beta| \leqslant \delta(\alpha + \beta) = \delta^2, \\
|c_{n+1} - b_{n+1}| &= |b_n - c_n|\,|2a_n - b_n - c_n| \\
&= \beta(\alpha + \delta) \leqslant (\delta - \alpha)(\delta + \alpha) \leqslant \delta^2.
\end{aligned}
$$

这组不等式表明对所有n成立

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leqslant (E_n - F_n)^2.$$

所以对所有n成立

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leqslant (E_1 - F_1)^{2^n}.$$

因为已给$E_1 < 1$和$F_1 > 0$，故$E_1 - F_1 < 1$，从而得到(2)。本题证毕。

A-6。设A是一$n \times n$矩阵（$n > 1$），设B是其余因子构成的矩阵的转置矩阵。通常称B为A的伴随矩阵。则$AB = BA = (\det A)I$，这里I为单位矩阵。而且，B的伴随矩阵为$(\det A)^{n-2}A$（对$n=3$的情形可直接验证）。假定$n>2$，则蕴涵着：如果A为

奇异矩阵，则B的秩至多是$n-2$；即B的所有$(n-1)\times(n-1)$子行列式均为零。

对于本题，令

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

则已知条件蕴涵

$$B=\begin{pmatrix} a^2 & d^2 & g^2 \\ b^2 & e^2 & h^2 \\ c^2 & f^2 & i^2 \end{pmatrix}.$$

我们来证明B的元素至少有一个为零。因为B的所有2×2子行列式均为零，所以特别有

$$a^2e^2-b^2d^2=0,$$
$$b^2f^2-c^2e^2=0,$$
$$c^2d^2-a^2f^2=0.$$

由此得

$$\begin{aligned} ae&=\pm bd, \\ bf&=\pm ce, \\ cd&=\pm af. \end{aligned} \tag{1}$$

如果这些方程中负号都正确，则把它们一起相乘就得出$abcdef=-abcdef$，故可断言a，b，c，d，e，f中必有一个为零，所以B有一个零元素.另一方面，如果(1)的至少一个方程中正号正确，则A的一个2×2子行列式为零，所以B仍有一个零元素.

任一秩为0或1的矩阵，如果它至少有一个零元素，则它必有一整行或一整列零元素。事实上，若有零元素的一列不全为零，则此列生成列空间，其他每一列都是它的一个倍数；所以必定出现一整行零元素。故知B有一整行元素为零，或有一整列元素为零。相应地，A也有一整行元素为零，或有一整列元

素为零。于是A的所有其他元素的余因子均为零，这就说明B的所有其他元素必均为零。所以$A=0$，得所欲证。

B-1. 因为f'处处为正，故f严格递增，从而

$$f(t)>f(1)=1,\quad t>1.$$

所以
$$f'(t)=\frac{1}{t^2+f^2(t)}<\frac{1}{t^2+1},\quad t>1. \qquad (1)$$

于是
$$f(x)=1+\int_1^x f'(t)dt<1+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$<1+\int_1^\infty\frac{dt}{1+t^2}=1+\frac{\pi}{4}.$$

由于f递增且有界，所以$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在且至多为$1+\pi/4$。再由(1)便得到严格的不等式：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1+\int_1^\infty f'(t)dt<1+\int_1^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=1+\frac{\pi}{4}.$$

B-2. 令 $E_k=\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(x)dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right),k=1,2,\cdots,n.$

由于f是可微的，因而是连续的，所以由积分中值定理知必存在一数η_k，使得

$$\frac{k-1}{n}<\eta_k<\frac{k}{n},$$
$$\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(x)dx=\frac{1}{n}f(\eta_k).$$

由微分中值定理又知必存在一数ξ_k，使得

$$\eta_k<\xi_k<(k/n),$$
$$f(\eta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\eta_k-\frac{k}{n}\right)f'(\xi_k).$$

于是 $|E_k|=\frac{1}{n}\left|f(\eta_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$

$$=\frac{1}{n}\left|\eta_k-\frac{k}{n}\right|\cdot|f'(\xi_k)|\leqslant\frac{1}{n^2}M.$$

因此 $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}E_k\right|\leqslant\frac{M}{n}.$

B-3. 引用极坐标，则已给线段$1\leqslant x\leqslant 3$，$y=1$在直线$r_1=\csc\theta$上，且曲线C^*的方程为$r_2=\csc\theta-h$，其中$h=1/100$。于是所考察的弧长由下式给出：

$$l(I)=\int_{\operatorname{arctg}1/3}^{\operatorname{arctg}1}\sqrt{r_1^2+\left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$

$$l(C^*)=\int_{\operatorname{arctg}1/3}^{\operatorname{arctg}1}\sqrt{r_2^2+\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

显然有$dr_1/d\theta=dr_2/d\theta$和$r_2<r_1$，所以$l(C^*)<l(I)$。

B-4. 已给$P(z)=z^2+az+b$。令$a=p+iq$，$b=r+is$，其中p，q，r，s均为实数。可以得出$|P(1)|=|P(-1)|=|P(i)|=|P(-i)|=1$及

$$|P(1)|^2=|1+p+iq+r+is|^2$$
$$=1+p^2+q^2+r^2+s^2+2p+2r+2pr+2qs,$$
$$|P(-1)|^2=|1-p-iq+r+is|^2$$
$$=1+p^2+q^2+r^2+s^2-2p+2r-2pr-2qs,$$
$$|P(i)|^2=|-1+ip-q+r+is|^2$$
$$=1+p^2+q^2+r^2+s^2+2q-2r-2qr+2ps,$$
$$|P(-i)|^2=|-1-ip+q+r+is|^2$$
$$=1+p^2+q^2+r^2+s^2-2q-2r+2qr-2ps.$$

把这些方程相加，得

$$4=4+4(p^2+q^2+r^2+s^2).$$

由此得$p=q=r=s=0$，所以$a=b=0$。

注意，利用一个互异的单位根集合，同样可以得到证明。如果ξ是一个n次本原单位根，$n>2$，则

$$n=\sum_{k=1}^{n}|P(\xi^k)|^2=n(1+|a|^2+|b|^2),$$

于是得出$a=b=0$。利用一个积分来代替和数也可以得到证明。因为对所有实的θ,有

$$1=|P(e^{i\theta})|^2=(e^{2i\theta}+ae^{i\theta}+b)(e^{-2i\theta}+\overline{a}e^{-i\theta}+\overline{b})$$

$$=\overline{b}e^{2i\theta}+(\overline{a}+a\overline{b})e^{i\theta}+1+|a|^2+|b|^2$$

$$+(a+\overline{a}b)e^{-i\theta}+be^{-2i\theta}.$$

如果在$[0, 2\pi]$上积分这个等式，则有

$$2\pi=2\pi(1+|a|^2+|b|^2),$$

于是依旧得出$a=b=0$。

B-5. 因为r是一根，故

$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=4,$$

又因为a，b，c，d是不同的整数，故$r-a$，$r-b$，$r-c$，$r-d$也是不同的整数，且其乘积等于4。但乘积为4的四个不同整数的集合只有一个，即$\{1, -1, 2, -2\}$。因而

$$(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)=1-1+2-2=0.$$

所以 $4r=a+b+c+d$。

B-6. **解法一**：取OX，OY，OZ为坐标轴，令$U=(u, 0, 0)$，$V=(0, v, 0)$，$C=(0, 0, c)$。设$P(x,y, z)$是轨迹上的一点。则$(x-u, y, z)$，$(x, y-v, z)$和$(x, y, z-c)$必是互相垂直的矢量。所以

$$x^2+y^2+z^2=xu+yv,$$

$$x^2+y^2+z^2=xu+zc, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=yv+zc.$$

相加后面两个方程，再减去第一个方程，得

$$x^2+y^2+z^2=2zc, \tag{2}$$

所以 P 在以 C 为球心，以 $|CO|$ 为半径的球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ 上。注意若 $c=0$，即 $C=O$，则 P 必是 O。但这时 PC 已不是一直线，所以没有轨迹。因此假定 $c\neq 0$。

由(1) 又看出 $xu=yv=zc$，所以，若 $z\neq 0$，则 x 与 y 都不为 0。若 $z=0$，则由(2) 知 $x=y=0$。

反之，如果 $P=(x, y, z)$ 是球面 (2) 上满足 $xy\neq 0$ 的任意一点，则 $z\neq 0$，且

$$u=zc/x, \quad v=zc/y$$

给出(1) 的一个解，所以矢量 PU，PV 和 PC 两两垂直；如果 $P=O$，则对任取的非零的 u 与 v，PU，PV 和 PC 都两两垂直。因此，所求的轨迹为一去掉两个大园但包含 O 点的球面。

解法二：利用直角三角形斜边上的中线等于斜边之半这个定理可以给出本题一个初等的综合证明。设 M 是 UV 的中点。如果 P 在轨迹上，则 CP 垂直于平面 PUV，且 $\angle UPV$ 为一直角。因为 PM 是 $\triangle PUV$ 的一条中线，OM 是 $\triangle OUV$ 的一条中线，根据上面所引述的结果，有 $PM=\frac{1}{2}UV=OM$。直角三角形 CPM 和 COM 有一条公共的斜边 CM，又有一对全等的直角边，所以这两个三角形全等。从而 $CP=CO$，故 P 在以 C 为球

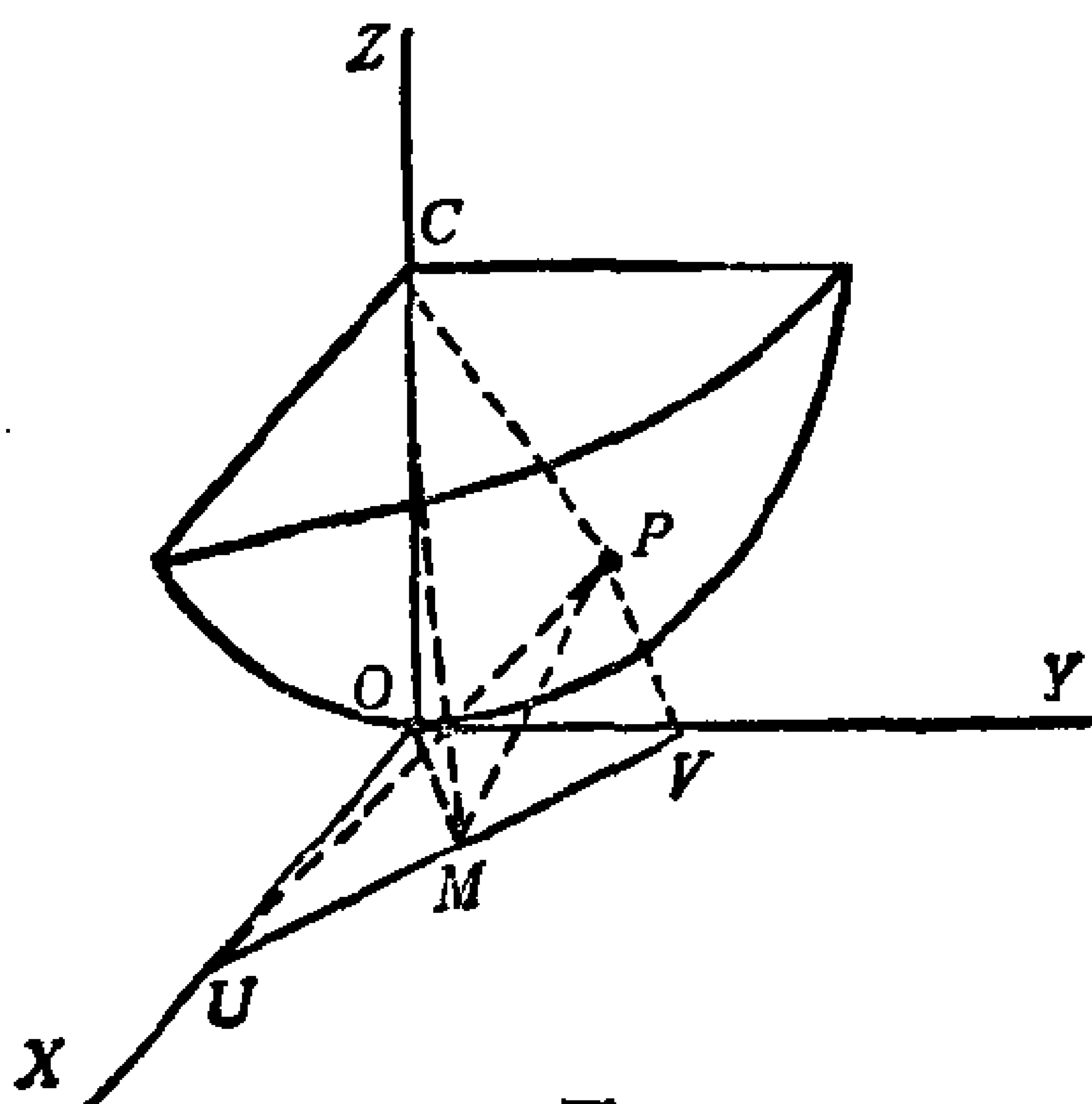


图24

心，CO为半径的球面上。PU和PV是该球面的切线。

反之，设P是球面上的任意一点，并设在P处的切平面与OX和OY分别相交于U和V。因为$\overline{PM}$和$\overline{MO}$都是从球面外一点M所引球面之切线，所以$\overline{PM}=\overline{MO}$。但$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{UV}$，故$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{UV}$。由所引述的平面几何定理之逆定理，便知$\angle UPV$为一直角。由于$PU$和$PV$都在球面的切平面内，显然$\angle CPV$和$\angle CPU$也都为直角。

第八届（1948年3月20日）

上午试题

A-1. 设z为一复数，满足$|z|=1$.问$|z^3-z+2|$的最大值是多少？

A-2. 相切的两个球面有一公共的切锥面。这三个曲面把空间分成许多部分，只有一个"环形"部分由所有三个曲面围成。假设两个球面的半径分别是r和R，试求"环形"部分的体积。(答案要求表为r和R的有理函数。)

A-3. 设$\{a_n\}$是一极限为0的递减的正数序列，使得对一切n有

$$b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\geqslant 0.$$

试证
$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n=a_1.$$

A-4. 设D是半径为r的一个圆所围成的平面区域。设(x, y)是D的一点，并考虑以(x, y)为圆心δ为半径的一个圆。用

$l(x, y)$表示此圆在D外边的那段弧的长度．试求

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2} \iint_D l(x, y)\,dx\,dy.$$

A-5．设x_1，…，x_n表示n次单位根，计算

$$\prod (x_i - x_j)^2 \quad (i<j).$$

A-6．(i) 一个力作用在一闭平面曲线的元素ds上．这个力的量值为$r^{-1}ds$，其中r是在所考察的点的曲率半径；这个力的方向垂直于曲线，且指向曲线的凸侧．证明作用在曲线所有元素上的这个力系保持平衡．

(ii) 证明

$$x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}x^7 + \cdots = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

下午试题

B-1．设$f(x)$为一有根x_1，x_2和x_3的三次多项式，又设$f(2x)$能被$f'(x)$除尽．试计算比$x_1 : x_2 : x_3$．

B-2．一动圆运动时总是与一通常直角坐标系的所有三个坐标面保持切触．试求圆心的轨迹．

B-3．如果n为一正整数，试证

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}],$$

其中$[x]$表示不超过x的最大整数．

B-4．用$\min(x, y)$表示x和y两个数中的较小者．问λ为何值时，方程

$$\int_0^1 \min(x, y) f(y)\,dy = \lambda f(x)$$

在（0，1）内有不恒等于零的连续解？这些解是什么？

B-5. 当 $0\leqslant t\leqslant 1$时，满足条件 $|a+bt+t^2|\leqslant 1$的数对(a, b) 布满 (a, b) 平面内的某个区域.问这个区域的面积等于多少？

B-6. (i) 设V_1，V_2，V_3和V是立方体的四个顶点，V_1，V_2和V_3均是V的邻接点，即线段VV_1，VV_2和VV_3 均是立方体的棱．把立方体正交投影到一个平面，并采用复数来标记该平面上的点（z平面，高斯平面）。设V的射影为原点，V_1，V_2和V_3的射影分别用复数z_1，z_2和z_3作标记．试证 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$。
(ii) 设a 为一行列式，其中每一个对角线元素的绝对值均大于它所在行的其他元素的绝对值之和，即

$$|a_{ii}|>|a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|$$
$$+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|.$$

试证此行列式不等于零．（考察对应的齐次线性方程组.）

解答

A-1. 令$f(z)=z^3-z+2$．不妨先求 $|f(z)|^2$的最大值.如果 $|z|=1$，则$z=x+iy$，其中$y^2=1-x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}|f(z)|^2&=|(x+iy)^3-(x+iy)+2|^2\\&=|x^3-3x(1-x^2)-x+2\\&\quad+iy(3x^2-(1-x^2)-1)|^2\\&=(4x^3-4x+2)^2+(1-x^2)(4x^2-2)^2\\&=16x^3-4x^2-16x+8=L(x).\end{aligned}$$

因此要求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} L(x)$，这个最大值必在一个临界点达到，或是在一个端点处达到．解方程$L'(x)=48x^2-8x-16=0$得临界点为

$x=-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$。由于

$$L(-1)=4,\ L\left(-\frac{1}{2}\right)=13,\quad L\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27},\ L(1)=4,$$

故知L的最大值为13，，最大点是 $x=-\frac{1}{2}$。所以当 $\mathrm{Re}z=-\frac{1}{2}$，即当$z=(-1\pm i\sqrt{3})/2$时，$|f(z)|$在单位圆上取得最大值为$\sqrt{13}$。

A-2. 解法一：设α为锥面角，两球面的位置如截痕图（图25）所示，球心在O_1和O_2，坐标系原点在切点O。

较大圆的方程是$x^2+y^2+2Rx=0$，

较小圆的方程是$x^2+y^2-2rx=0$。

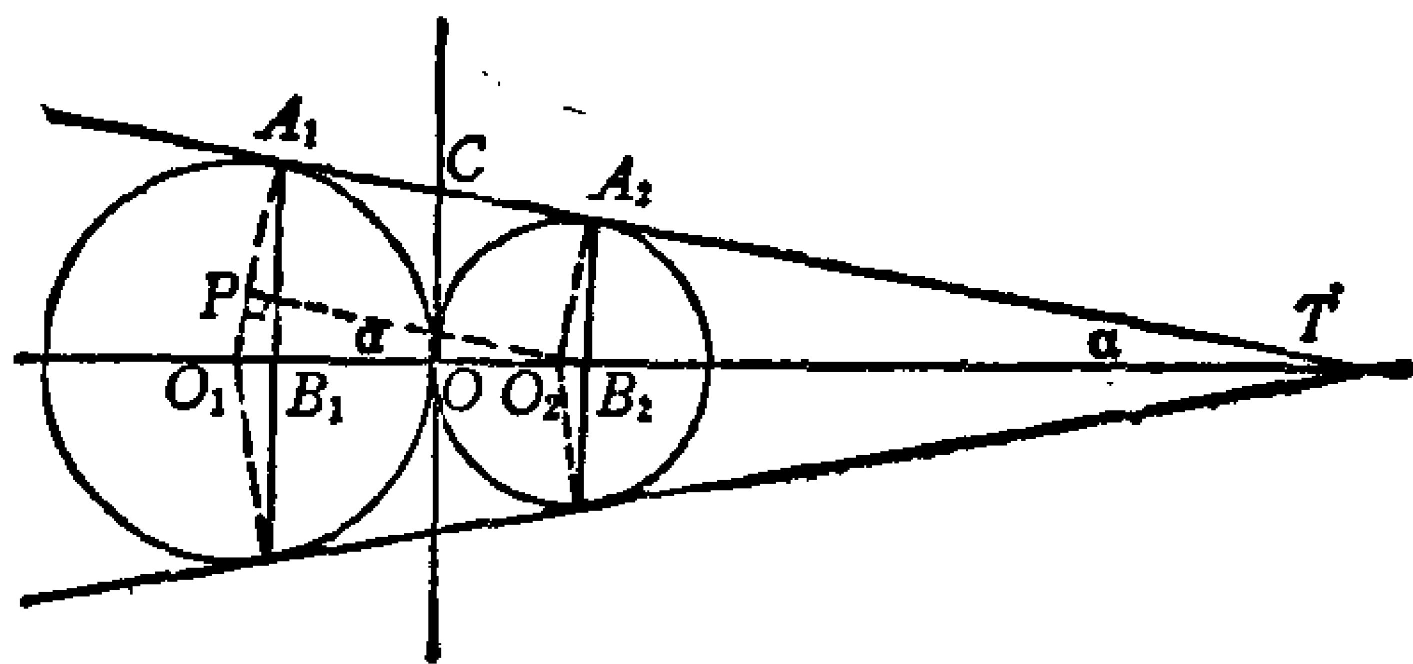


图25

由图可知 $\sin\alpha=\frac{O_1P}{O_1O_2}=\frac{R-r}{R+r}$，

从而$\cos^2\alpha=4Rr/(R+r)^2$。

我们来计算由面积 $A_1A_2B_2B_1$绕x 轴旋转所产生的平截头圆锥体的体积V_1。因为

$$较大锥体的体积=\frac{1}{3}\pi A_1B_1^2\cdot B_1T$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\cos^2\alpha\cdot R\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{16\pi}{3}R^3\ \frac{r^2R^2}{(R-r)(R+r)^3},$$

$$较小锥体的体积=\frac{16\pi}{3}r^3\frac{r^2R^2}{(R-r)(R+r)^3},$$

故它们的差为

$$V_1=\frac{16\pi}{3}\cdot\frac{r^2R^2}{(R+r)^3}\cdot(R^2+Rr+r^2).$$

设 V_2 和 V_3 分别是含于平截头圆锥体内的较大球截形和较小球截形的体积。则有

$$V_2=\pi\int_{R(\sin\alpha-1)}^{0}(-x^2-2Rx)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^3}{3}-Rx^2\right]_{R(\sin\alpha-1)}^{0}=\frac{4\pi R^3r^2}{3(R+r)^3}(3R+r),$$

这里利用了 $R(\sin\alpha-1)=-2Rr/(R+r)$。同样有

$$V_3=\pi\int_0^{r(1+\sin\alpha)}(-x^2+2rx)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+rx^2\right]_0^{r(1+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^2r^3}{(R+r)^3}(R+3r).$$

于是，要求的体积由下式给出：

$$V_1-V_2-V_3=\frac{4\pi}{3}\frac{R^2r^2}{(R+r)^3}$$

$$\times[4(R^2+Rr+r^2)-3R^2-Rr-3r^2-Rr]$$

$$=\frac{4\pi}{3}\frac{R^2r^2}{R+r}.$$

解法二：根据卡瓦利里（Cavalieri）原理可以给出本题一个巧妙的几何解法。

考虑图26所示的附图，设图形绕BT轴旋转。由$\overline{AC}$，$\overline{CO}$和

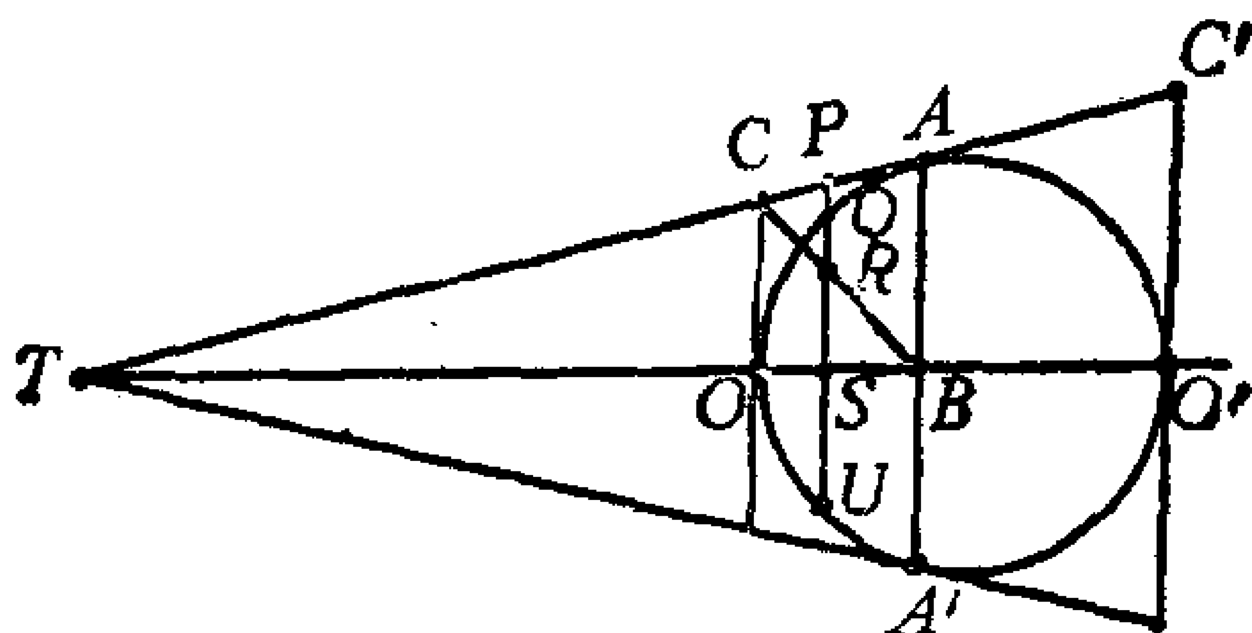


图26

圆弧$\widehat{AO}$围成的区域Δ所生成的立体是一个小于一球截形的平截头圆锥体。我们来证明它的体积与三角形区域BOC所生成的锥体体积是相等的。

如图所示，考虑在B和C之间垂直于BT的任一条直线，它与$\overline{AC}$交于P，与$\widehat{AO}$交于Q，等等。线段$\overline{PQ}$在旋转时生成一个环形区域，其面积为

$$\pi(PS^2-QS^2)=\pi(PS+QS)(PS-QS)=\pi PU\cdot PQ$$
$$=\pi(AP)^2.$$

由相似性，知

$$\frac{AP}{AC}=\frac{BS}{BO}=\frac{RS}{CO}.$$

因为圆之切线AC和OC相等，故有$AP=RS$。于是环形区域的面积又为$\pi(RS)^2$，这正是由$\overline{RS}$所生成的圆形区域的面积.所以，根据卡瓦利里原理，由Δ所生成的立体体积与三角形区域BOC所生成的锥体体积是相等的。

对于由$\overline{AC'}$,$\overline{C'O'}$和圆弧$\widehat{AO'}$,围成的曲线区域Δ'所生成的立体，以及由三角形区域$BO'C'$所生成的锥体，上述论证同样适用。

注意，如果$R=r$，上述论证即变成下述定理的一个经典证

明：一个半球及其外切圆柱所界的区域的体积等于这个圆柱体积的三分之一。因此，半球的体积等于这个圆柱体积的三分之二。

现在回到原来的问题（参看图），所要求的体积V是两个锥体的体积之和，这两个锥体具有由OC生成的公共底面，高线分别为OB_1和OB_2。所以$V=\frac{1}{3}\pi OC^2\cdot B_1B_2$。由于$O_1C$和$O_2C$二等分互补的角$A_1CO$和$OCA_2$，故$\angle O_1CO_2$为一直角。因而有$OC^2=O_1O\cdot OO_2=Rr$及$B_1B_2=O_1O_2\cos^2\alpha=4Rr/(R+r)$。所以

$$V=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^2r^2}{R+r}.$$

A-3。因为b_n都是a_n的二次差分，故令$c_n=a_n-a_{n+1}$是方便的；于是

$$c_n-c_{n+1}=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=b_n.$$

由于a_n递减地趋于零，故对一切n有$c_n\geqslant 0$，且$c_n\to 0$。

对$k\geqslant m$，我们有$\sum\limits_{i=m}^{k}b_i=c_m-c_{k+1}$，所以

$$\sum_{i=m}^{\infty}b_i=c_m=a_m-a_{m+1}.$$

类似地，有

$$\sum_{m=1}^{k}(a_m-a_{m+1})=a_1-a_{k+1}\text{，所以}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m-a_{m+1})=a_1.$$

于是 $$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=m}^{\infty}b_i\right)=a_1.$$

所有的项b_i都是非负的，当非负项求和时，改变项的位置不会影响和数的值。对于每个下标n，b_n项在上述二重和数中正

好出现n次，且在每一和数$\sum\limits_{i=m}^{\infty} b_i(m=1, 2, \cdots, n)$中只出现一次。所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=m}^{\infty} b_i\right)=a_1.$$

A-4. 取已知圆圆心为原点，先把积分变换为极坐标系下的积分。若点(x, y)的极坐标为(ρ, θ)，则$l(x, y)=L(\rho)$，这里

$$L(\rho)=0, \text{ 若 } 0\leqslant\rho\leqslant r-\delta,$$

而且，把余弦定律用于三角形OPQ又知

$$L(\rho)=2\delta\varphi=2\delta\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right),$$

$$(\text{若 } r-\delta\leqslant\rho\leqslant r)。$$

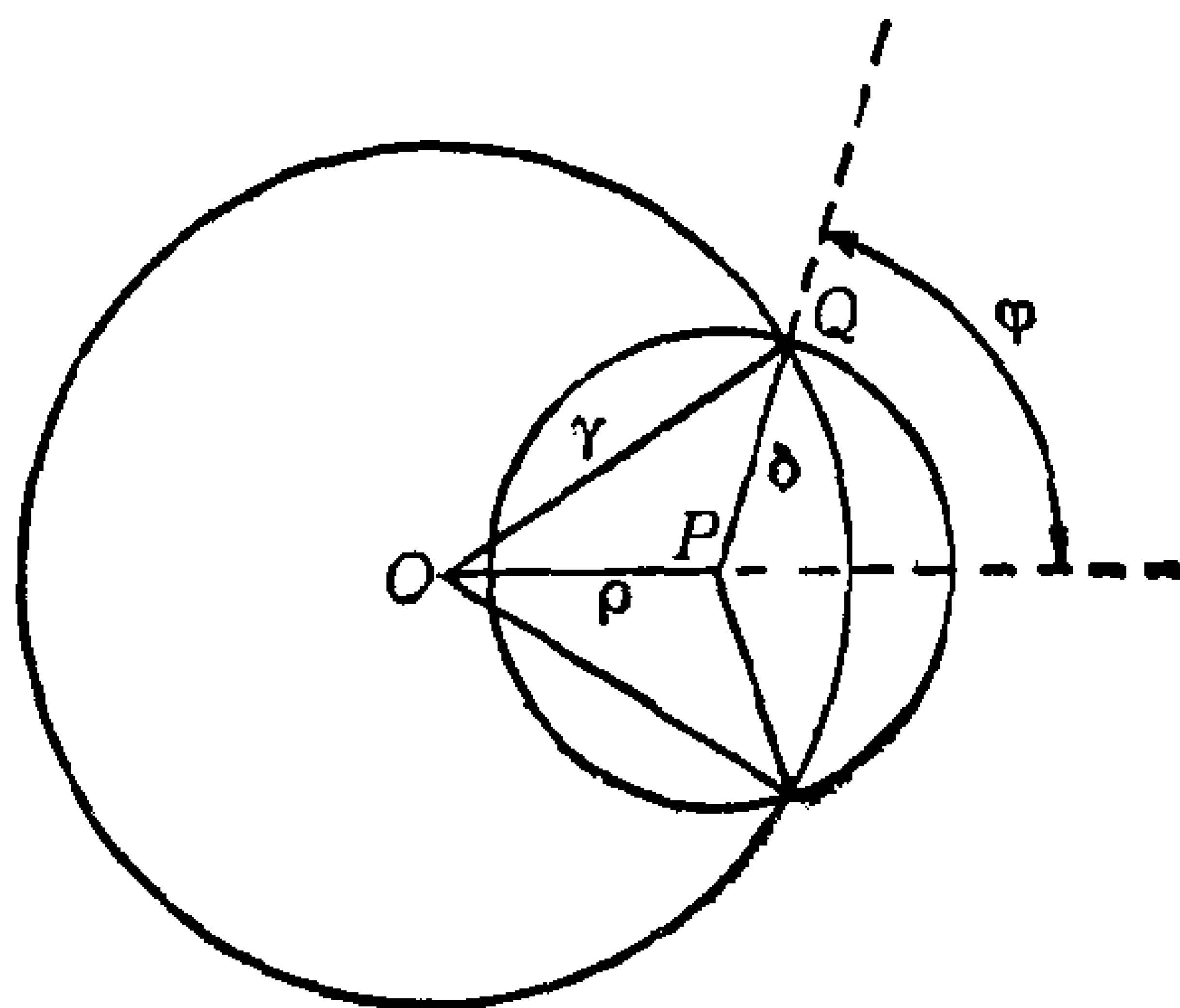


图27

因此，我们必须求出

$$A=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r L(\rho)\rho d\rho d\theta$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_{r-\delta}^r 2\delta\rho\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)d\rho d\theta$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{4\pi}{\delta}\int_{r-\delta}^{r}\rho\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)d\rho.$$

作代换$\rho=r-\delta u$，则得

$$A=\lim_{\delta\to 0}4\pi\int_0^1(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur-\delta(1+u^2)}{2(r-\delta u)}\right)du.$$

因为当$u\in[0,1]$和$\delta\in\left[0,\ \frac{1}{2}r\right]$时，被积函数是$u$和$\delta$的一个连续函数，且积分区域是有界的，所以能够断言极限A存在，而且

$$A=4\pi\int_0^1\lim_{\delta\to 0}(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur-\delta(1+u^2)}{2(r-\delta u)}\right)du$$

$$=4\pi\int_0^1 r\arccos u\,du.$$

利用分部积分法，就得

$$A=4\pi r[u\arccos u]_0^1+4\pi r\int_0^1\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=0+4\pi r[-\sqrt{1-u^2}]_0^1=4\pi r.$$

A-5. 因为

$$t^n-1=(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n),\tag{1}$$

可见 $$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n-1}.\tag{2}$$

微分(1)便有$nt^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}(t-x_1)\cdots(t-x_{i-1})$

$$(t-x_{i+1})\cdots(t-x_n).$$

对$t=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$求值，则得

$$\begin{aligned}
nx_1^{n-1}&=\qquad\quad(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)\\
nx_2^{n-1}&=(x_2-x_1)\quad\cdot\quad(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)\\
nx_3^{n-1}&=(x_3-x_1)(x_3-x_2)\quad\cdot\quad\cdots(x_3-x_{n-1})(x_3-x_n)\\
&\vdots\\
nx_n^{n-1}&=(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

将这些方程相乘即得

$$n^n(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}=\prod_{i<j}[-(x_i-x_j)^2]$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

再应用 (2) 就求出

$$\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2=n^n(-1)^{(n-1)^2}(-1)^{-n(n-1)/2}$$

$$=(-1)^{(n-1)(n-2)/2}n^n.$$

A-6. (i) 题目可更明确地解释如下：设C是一长为L的闭平面曲线，通过其弧长s用$x=x(s)$和$y=y(s)$表示，这里$x(s)$和$y(s)$都是周期为L的C^2类周期函数。令$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\ddot{x}$，$\ddot{y}$分别表示

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2}.$$

今考虑沿曲线定义的一个力系F，其中$F_x=(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})\dot{y}$，$F_y=-(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})\dot{x}$。证明这个力系处于平衡状态。

(注意，在 (x, y) 处的曲率由$\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}$给出，选取$F_x$和$F_y$的符号应使$F$指向$C$之凸侧.)

平衡条件是

$$\int_0^L F_x ds=\int_0^L F_y ds=0 \qquad (1)$$

和

$$\int_0^L xF_y\,ds-\int_0^L yF_x ds=0. \qquad (2)$$

这里(1) 意指在任何方向的合力必须等于零，(2) 意指对于原点的合力矩必须等于零。

注意到$\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$，由此得$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0$。于是有

$$\int_0^L F_x\,ds=-\int_0^L(-\dot{x}\dot{y}\ddot{y}+\ddot{x}\dot{y}^2)ds=-\int_0^L(\ddot{x}\dot{x}^2+\ddot{x}\dot{y}^2)ds$$

$$= -\int_0^L \ddot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)ds = -\int_0^L \ddot{x}ds = -\dot{x}\Big|_0^L = 0.$$

同样有$\int_0^L F_y ds=0$，因而条件(1) 是满足的. 又有

$$\int_0^L xF_y\,ds - \int_0^L yF_x ds$$

$$= -\int_0^L x\dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})ds - \int_0^L y\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})ds$$

$$= -\int_0^L (x\ddot{y}\dot{x}^2 + x\ddot{y}\dot{y}^2 - y\ddot{x}\dot{x}^2 - y\ddot{x}\dot{y}^2)ds$$

$$= -\int_0^L [x\ddot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - y\ddot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)]ds$$

$$= -\int_0^L (x\ddot{y}-y\ddot{x})ds = -(x\dot{y}-y\dot{x})\Big|_0^L = 0,$$

因而条件 (2)也是满足的. 所以力系F保持平衡.

(ii) 令 $f(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7+\cdots$.

则
$$f'(x)=1+x\left[2x+\frac{2}{3}\cdot 4x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6x^5+\cdots\right]$$

$$=1+x\frac{d}{dx}\left[x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^6+\cdots\right]$$

$$=1+x\frac{d}{dx}(xf(x))=1+xf(x)+x^2f'(x).$$

所以$f'(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x) \qquad (1)$$

与初始条件 $f(0)=0$. (2)

(注意当$|x|<1$时 f的级数是收敛的，因此所有形式计算都合理.)

在区间（-1，1）上(1)是一个一阶线性非奇异微分方程，所以它有满足(2)之唯一解。

因为$(\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$满足（1）与（2），故得

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

B-1. 令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$。因为$f(2x)$能被$f'(x)$除尽，故对某个p和q有

$$8x^3+4ax^2+2bx+c=(3x^2+2ax+b)(px+q).$$

比较系数得出

$$3p=8,\qquad 2ap+3q=4a,$$
$$bp+2aq=2b,\qquad qb=c.$$

由此得到 $p=8/3$，$q=-4a/9$，$b=4a^2/3$，$c=-16a^3/27$。

所以 $$f(x)=x^3+ax^2+\frac{4}{3}a^2x-\frac{16}{27}a^3.$$

今若$a=0$，那么$f(x)=0$的所有根都为零，它们的比是不确定的；因而假定$a\neq 0$。令$w=3x/a$，并且考察

$$F(w)=27f(x)=27f\left(\frac{aw}{3}\right)=a^3(w^3+3w^2+12w-16)$$

$$=a^3(w-1)(w^2+4w+16).$$

$F(w)=0$ 的根是1，$-2\pm 2\sqrt{3}i$。而$f(x)=0$的根与$F(w)=0$的根有相同的比，故有

$$x_1:x_2:x_3=1:(-2+2\sqrt{3}i):(-2-2\sqrt{3}i).$$

B-2. 当θ变化时，$a\cos\theta+b\sin\theta$ 的最大值和最小值分别是$\sqrt{a^2+b^2}$和$-\sqrt{a^2+b^2}$。因此，为要使零是函数$a\cos\theta+b\sin\theta+c$ 的一个极值，其充要条件是$c^2=a^2+b^2$。

设动圆C的半径为r，圆心为(x_1,x_2,x_3)。又设$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$是

互相正交的单位矢量，且$\boldsymbol{u}$垂直于C之平面。则C由如下形式的点组成：

$$r\cos\theta\boldsymbol{v}+r\sin\theta\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}, \qquad (1)$$

其中$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$。因为 C与每一个坐标平面都相切，故每一个函数

$$rv_i\cos\theta+rw_i\sin\theta+x_i \qquad (2)$$

对某个θ值都为零，而对其他θ值则只取正值或只取负值。根据第一段所述的结果，必有

$$x_i^2=r^2v_i^2+r^2w_i^2. \qquad (3)$$

由于$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$为单位矢量，所以

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+r^2(w_1^2+w_2^2+w_3^2)=2r^2,$$

故$\boldsymbol{x}$在球心为原点，半径为$r\sqrt{2}$的球面S上。而且，由于$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是互相正交的单位矢量，故

$$u_i^2+v_i^2+w_i^2=1,\quad i=1,2,3.$$

因而(3) 可以写为

$$x_i^2=r^2(1-u_i^2), \qquad (4)$$

由此得出 $x_i^2\leqslant r^2,\quad i=1,2,3.$ (5)

反之，假设 (x_1,x_2,x_3) 是满足 (5) 的S的任一点。则我们能对u_1,u_2,u_3求解(4)，所得 $\boldsymbol{u}=\{u_1,u_2,u_3\}$ 将是一单位矢量。然后可以选择$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$，使得$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 为互相正交的单位矢量，而且方程(3) 将成立。所以函数(2) 将以零为一极值，所以根据(1) 参数表出的圆将与每一个坐标平面相切。

综上所述，便知所求之轨迹为球面S在立方体$|x_i|\leqslant r(i=1,2,3)$ 内的那部分球面。(如果位于一坐标平面内的圆不算作与该平面相切，则象$(\pm r,\ \pm r,\ 0)$这样的12个点必须被删除。)

B-3. 因为当 $x>0$时$\sqrt{x}$有负的二阶导数，故其图形向下凹，且对一切$x\geqslant 0$有

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}<\sqrt{x+\frac{1}{2}}$$

从而对一切$x\geqslant 0$ 有 $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<\sqrt{4x+2}$， 因此

$$[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}]\leqslant[\sqrt{4x+2}].$$

假若对某个正整数n,有$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\neq[\sqrt{4n+2}]$。令$p=[\sqrt{4n+2}]$。则

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<p\leqslant\sqrt{4n+2}.$$

平方后得 $2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<p^2\leqslant 4n+2$。

所以$2\sqrt{n(n+1)}<p^2-2n-1\leqslant 2n+1$。再平方后又得

$$4n(n+1)<(p^2-2n-1)^2\leqslant 4n^2+4n+1.$$

因为此不等式中外面两数是两个相继整数，而且中间的数也是一个整数，故有 $(p^2-2n-1)^2=(2n+1)^2$，所以$p^2=4n+2$。但最后这一等式是不能成立的，因为一个整数的平方与2对模4不可能同余。此项矛盾证明对每一正整数n都有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

B-4. 给定方程可以写为

$$\lambda f(x)=\int_0^x yf(y)dy+x\int_x^1 f(y)dy. \tag{1}$$

由此显然可知：如果$\lambda\neq 0$，则f是可微的，所以有

$$\lambda f'(x)=xf(x)-xf(x)+\int_x^1 f(y)dy$$

$$=\int_x^1 f(y)dy. \tag{2}$$

因而f'又是可微的，所以又有

$$\lambda f''(x)=-f(x). \tag{3}$$

如果$\lambda=0$,则将导致方程$0=-f(x)$。因为我们只对不恒为

零的函数有兴趣，故下面将假定$\lambda \neq 0$。

(3) 之通解是

$$f(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x,$$

其中$\mu=\lambda^{-1/2}$，$\lambda>0$；或是

$$f(x)=A\cosh\nu x+B\sinh\nu x,$$

其中$\nu=(-\lambda)^{-1/2}$，$\lambda<0$。

显然，由(1) 可得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以不论$\lambda$是正数还是负数，均有$A=0$。由(2) 可得$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=0$，这分别给出

$B\mu\cos\mu=0$ 或 $B\nu\cosh\nu=0$。

最后的方程仅当$B=0$时才能成立，因而$f=0$；故可断言当$\lambda<0$时(1) 没有非零解。

对于$\lambda>0$，只是在$\cos\mu=0$，即是μ为$\pi/2$的奇倍数时才能有非平凡解．事实上，容易验证

$$f(x)=B\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}x \tag{4}$$

是一个解，此时

$$\lambda=\mu^{-2}=\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2},$$

其中k为任一整数，B为任意数。由于k的负值产生相同的解，故这里又仅需考虑$k=0,1,2,\cdots$。

B-5。考察

$$f(t)=a+bt+t^2.$$

这个函数恰有一个临界点$t=-b/2$，临界值为$a-b^2/4$．在区间$[0,1]$上，f只在端点处及在临界点处（若临界点在$[0,1]$内，即若$b\in[-2,0]$）才能有极值。所以当$b\notin[-2,0]$ 时f的极值是

$$f(0)=a \text{ 和 } f(1)=a+b+1,$$

当$b\in[-2,0]$时极值集合是$\{a,\ a+b+1,\ a-b^2/4\}$。所以对一切$t\in[0,1]$成立$|f(t)|\leqslant 1$的充要条件是

$$b\notin[-2,0]及|a|\leqslant 1,\quad |a+b+1|\leqslant 1$$

或
$$b\in[-2,0]及|a|\leqslant 1,\quad |a+b+1|\leqslant 1,\quad \left|a-\frac{b^2}{4}\right|\leqslant 1.$$

因此，所求区域如图28所示，其中从A到B的弧是抛物线$a-b^2/4=-1$的一部分。

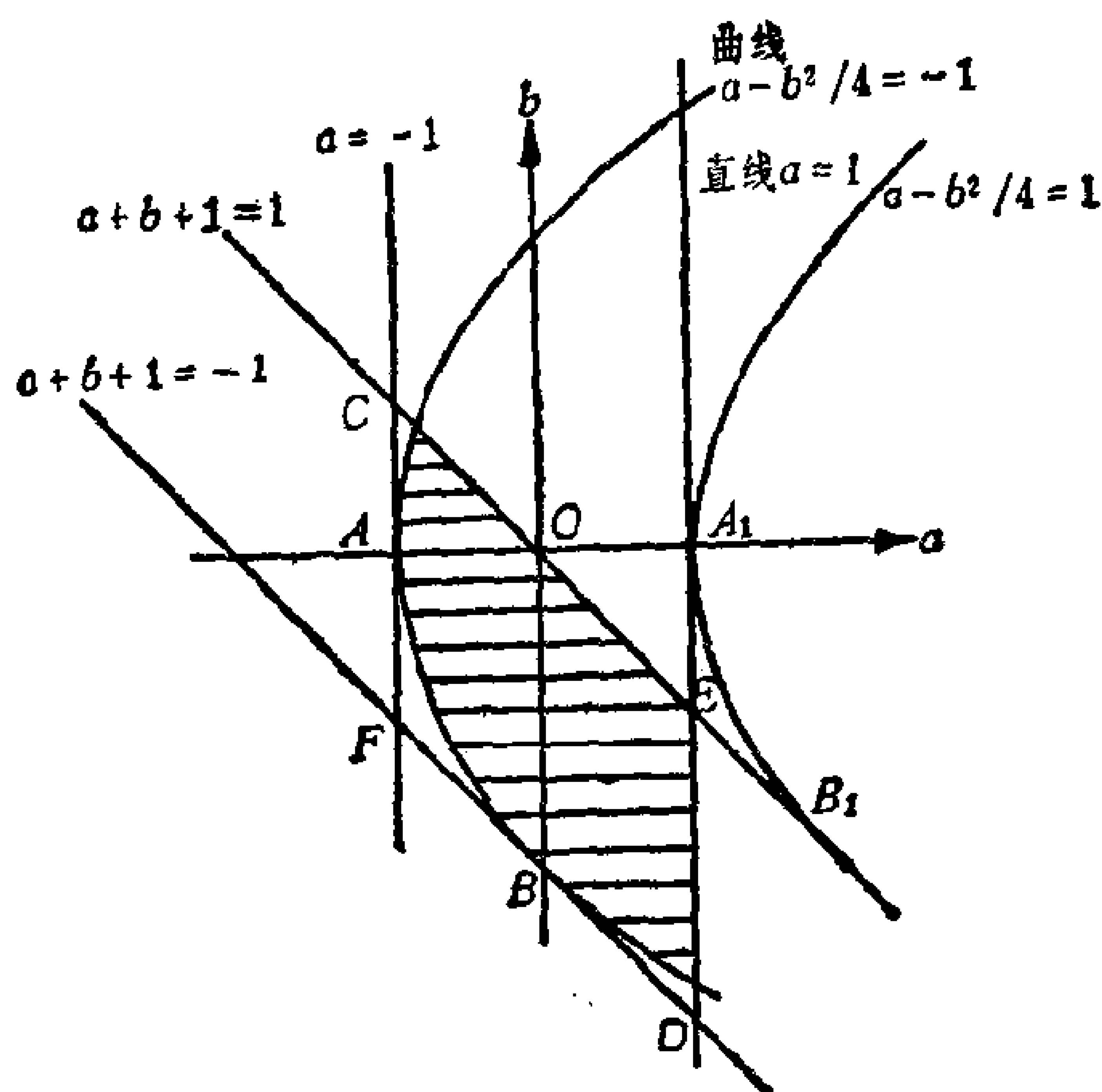


图28

所求区域之面积可用多种方法求得。平行四边形$CEDF$的面积显然等于4。我们必须减去AFB块的面积。因为$\overleftrightarrow{AF}$和$\overleftrightarrow{FB}$都与抛物线相切，故AFB块的面积是三角形AFB的面积的$\frac{1}{3}$(阿基米德法则)。但三角形AFB之底AF的长为1，高线的长也为1，故其面积为$\frac{1}{2}$，因而曲线块AFB的面积为$\frac{1}{6}$。于是$CEDBA$的面积为$4-\frac{1}{6}=\frac{23}{6}$。

B-6. (i) 取空间卡氏坐标w, x, y, 使得在给定的高斯平面内x轴为实轴，y轴为虚轴。则作投影时每一点(w,x,y)被映到(o,x,y)。

假设(w_1,x_1,y_1)，(w_2,x_2,y_2)和(w_3,x_3,y_3)是空间内互相正交的单位向量。则矩阵

$$\begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

为一正交矩阵，因而它的列向量也是互相正交的单位向量，特别有

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2=1,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0$$

上述单位向量在高斯平面内的正交射影分别是复数 x_1+iy_1，x_2+iy_2和x_3+iy_3，且

$$\begin{aligned}&(x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2+(x_3+iy_3)^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2+2i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\\&=0.\end{aligned}$$

假设给定立方体的边长为a。因为顶点V映到原点，故它必具形式$V=(b,o,o)$。且有互相正交的单位向量(w_j,x_j,y_j)，使得

$$V_j=(b,o,o)+a(w_j,x_j,y_j),\quad j=1,2,3.$$

故V_j在高斯平面内的射影是

$$z_j=a(x_j+iy_j),$$

并且成立 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=a^2[(x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2+(x_3+iy_3)^2]=0.$

(ii) 对应的线性方程组是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

假若系数矩阵的行列式为零，则方程组必存在一非平凡解 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$。设$m$是使$|\bar{x}_m|$为最大（即$|\bar{x}_m|\geqslant|\bar{x}_j|$，$j=1,2,\cdots,n$）的一个下标。由于解是非平凡的，显然$|\bar{x}_m|\neq 0$。考察上述方程组中的第$m$个方程，并写成形式

$$-a_{mm}\bar{x}_m=\sum_{j\neq m} a_{mj}\bar{x}_j.$$

于是有 $$|a_{mm}||\bar{x}_m|\leqslant\sum_{j\neq m}|a_{mj}||\bar{x}_j|\leqslant\left(\sum_{j\neq m}|a_{mj}|\right)|\bar{x}_m|,$$

所以得 $$|a_{mm}|\leqslant\sum_{j\neq m}|a_{mj}|,$$

但这与已知条件相矛盾。故所设行列式不能为零。

第九届（1949年3月26日）

上午试题

A-1. (i) 有通过三个点 $(0,-a,0)$，$(a,0,-a)$与$(-a,a,0)$并分别平行x轴，y轴与z轴的三条直线，$a>0$。另有一条变动的直线，它与三条已知直线的每一条有一个公共点。求由变动直线形成的曲面方程。

(ii) 哪些平面割曲面 $xy+xz+yz=0$ 成：(1) 圆，(2) 抛物线。

A-2. 从相同的始点O作三个向量，各长a,b与c。设E是以O为顶点以已知向量为棱的平行六面体；而设H是以O为顶点以

已知向量为高的平行六面体．证明 E 与 H 的体积的乘积等于 $(abc)^2$。推广这个定理到n维，并给出证明。

A-3. 假设复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$全非零，并且$|a_r - a_s| > 1$，当$r \neq s$。证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n^3)$$

收敛。

A-4. 已知顶点为A，B，C，D的四面体内的一点P，使得$PA+PB+PC+PD$为最小。证明两角$\angle APB$与$\angle CPD$相等，并且被同一条直线所平分。还有那些其他成对的角相等？

A-5. 在复平面的每一个象限，方程

$$z^6 + 6z + 10 = 0$$

有多少根？

A-6. 对于每一个实的或复的x，证明

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2\cos(2x/3^k)}{3} = \frac{\sin x}{x}.$$

下午试题

B-1. 开区间 $(0,1)$ 的每一个有理数p/q (p,q是互素的正整数)由长度为$1/2q^2$中心在p/q的闭区间所覆盖。证明：$\sqrt{2}/2$不被上述的闭区间中的任何一个所覆盖。

B-2. (i) 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\log\log n)}{\log n}$$

发散。

(ii) 假设 $p>0$，$a>0$ 并且 $ac-b^2>0$，证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{(p+ax^2+2bxy+cy^2)^2}$$

$$=\pi p^{-1}(ac-b^2)^{-1/2}.$$

B-3. 设K是一条闭的平面曲线，K的任何两点之间的距离总小于1，证明K在一个半径为 $1/\sqrt{3}$ 的圆周内部。

B-4. 证明在展开式

$$(1/4)[1+x-(1-6x+x^2)^{1/2}]$$
$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

中的系数a_1，a_2，a_3，…是正整数。

B-5. 设a_1，a_2，…，a_n…是任意正数序列，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e.$$

B-6. 令C是一个有连续转动的切线的闭凸曲线，设O是C内的一点.对C上的每一点P定义C上的点$T(P)$如下：在 P作C的切线，从O作切线的垂线，$T(P)$是垂线与曲线C的交点。

从C上一点P_0开始，用公式

$$P_n=T(P_{n-1})\qquad n\geqslant1$$

定义P_n。证明点列趋于一个极限，并且序列P_n的极限具有这些点的性质。(考虑下面的事实，T是一个连续的变换，凸曲线在它的每一切线中的一侧，这不要证明)。

解答

A-1. (i) 设 L_1，L_2，L_3 分别为平行于x轴通过点（0，$-a$，a)，平行于y轴通过点（a，0，$-a$)，平行于z轴通过点（$-a$，a，0）的三条直线。设S为所求的轨迹。

令$P=(p,\ -a,\ a)$，$Q=(a,\ q,\ -a)$，$R=(-a,\ a,\ r)$

分别为三个在L_1，L_2，L_3上的共线点．设$X=(x,y,z)$是在这条直线上的任意一个点，则向量PX，QX与RX成比例，即矩阵

$$\begin{bmatrix} x-p & y+a & z-a \\ x-a & y-q & z+a \\ x+a & y-a & z-r \end{bmatrix} \tag{1}$$

的秩为1。特别是

$$(x-p)(y-a)=(x+a)(y+a)$$
$$(x-p)(z+a)=(x-a)(z-a)。\tag{2}$$

所以 $$(x+a)(y+a)(z+a)=(x-p)(y-a)(z+a)$$
$$=(x-a)(y-a)(z-a)。\tag{3}$$

即 $$(x+a)(y+a)(z+a)=(x-a)(y-a)(z-a)。\tag{4}$$

等价于 $$xy+yz+zx+a^2=0。\tag{5}$$

故S的每一个点（x，y，z）满足这个方程。

要完成这个命题证明，就要确定由（5）或等价于（5）的（4）所定义的曲面J的每一个点是否轨迹S的一个点。

令M_1，M_2，M_3分别是通过（0，a，$-a$）平行于x轴，通过（$-a$，0，a）平行于y轴，通过（a，$-a$，0）平行于z轴的直线。由(5)显然它们都在曲面J上。我们要证明删去M_1,M_2,M_3后J会等于S。

假设Y是M_1的一个点，则没有通过Y的直线交L_1，L_2,L_3。如果这样的直线存在，它就会在L_2与Y的平面π_2上，又在L_3与Y的平面π_3上。因为L_2与L_3不共面，这两个平面不相同．因$Y\in\pi_2\cap\pi_3$，所以这两个平面不平行，故$\pi_2\cap\pi_3$是一条直线，这条直线正好是M_1，但不交于L_1，因此$Y\notin S$。同样没有M_2与M_3上的点在S上。故$S\subseteq J-(M_1\cup M_2\cup M_3)$。

现在证明M_1平行于L_1并与L_2、L_3相交。对于这样一条直线，一定是通过L_2平行于L_1的平面与通过L_3平行于L_1的平面的

交线。同样地，M_2是平行于L_2并与L_1及L_3相交的直线，M_3平行于L_3并与L_1及L_2相交的直线。

设Z是L_1的一个点，但不在M_2或M_3上。令N是由Z与L_2及Z与L_3确定的两平面的交线。因为N与L_2共面，它或者与L_2相交或者与L_2平行。同样，N或者与L_3相交或者与L_3平行。但是N不同时与L_2及L_3平行，因为这些直线是偏斜的。因此(1) N与L_1及L_2相交，与L_3平行；或者 (2) N与L_1及L_3相交，与L_2平行；或者 (3) N与三条直线L_1，L_2，L_3 都相交。
上面的 (1) (2) 分别导出$N=M_3$及$N=M_2$的结论。因为$Z\in N$但$Z\notin M_2$所以这是不可能的。于是N与三条直线L_1，L_2，L_3相交；故 $Z\in S$。这就证明了 $J-(M_1\cup M_2\cup M_3)\subseteq S$。综上所述得$S=J-(M_1\cup M_2\cup M_3)$。

(ii) 已知曲面是包含三个坐标轴的二次锥面。可以证明它是直圆锥。已知锥与平面$x+y+z=1$的交线c是一个圆，因为在c上

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=1-0=1.$$

因此c是单位球面与平面$x+y+z=1$的交，所以这曲面是直圆锥，并且它的轴是直线 $x=y=z$。

当且仅当垂直于轴$x=y=z$且不通过原点的平面割锥成圆，这些平面的方程为

$$x+y+z=p,\qquad p\neq 0.$$

至于平面割锥成抛物线，是当且仅当平面平行于但不包含锥的某个母线。一般说来，即平行但不等于锥的某个切平面。

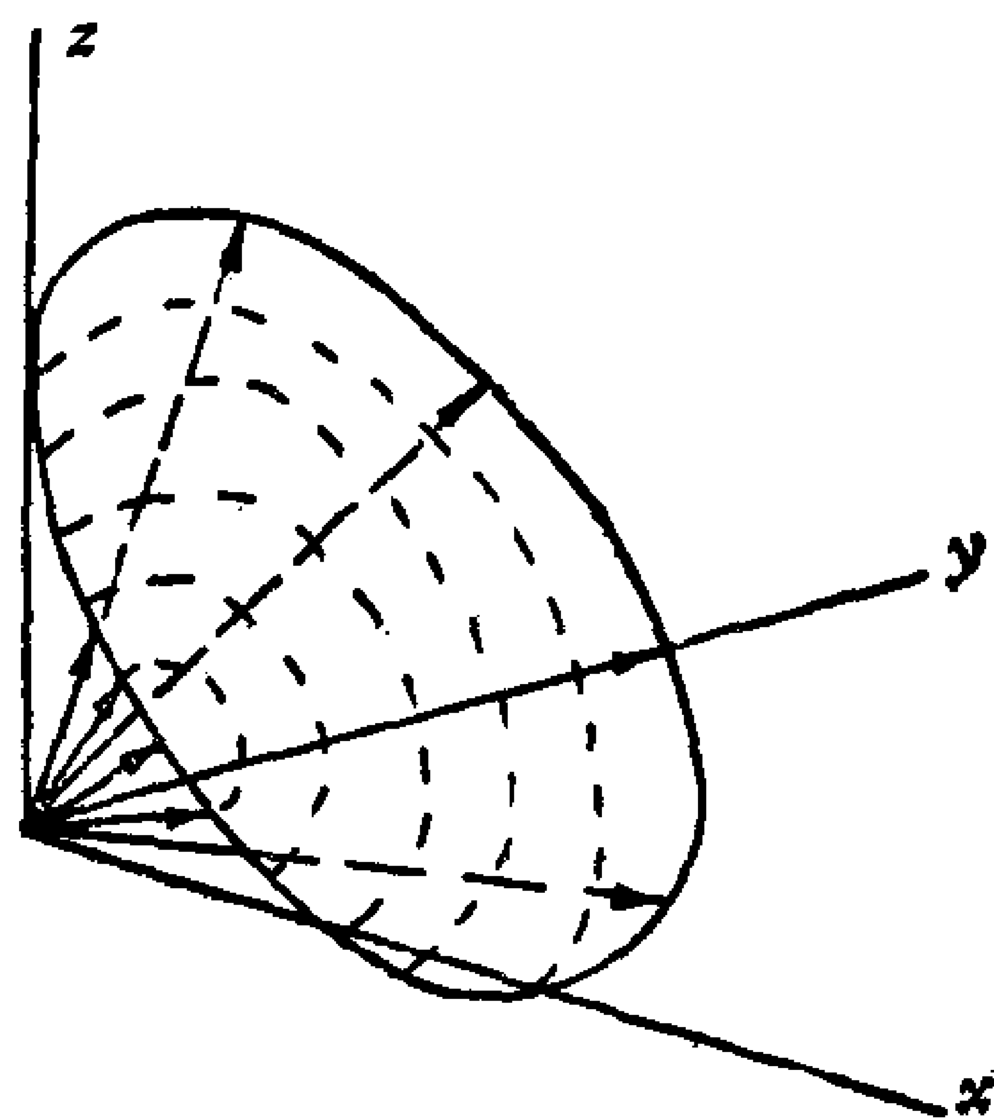


图29

在 (x_0, y_0, z_0)处(不是原点)锥的切平面方程为

$$(z_0+y_0)x+(x_0+z_0)y+(x_0+y_0)z=0.$$

设平面 $\quad ax+by+cz=d \qquad (1)$

割锥成抛物线,则$d\neq0$并且 $(a, b, c)\neq(0, 0, 0)$。而且存在锥上一点 $(x_0, y_0, z_0)\neq(0, 0, 0)$ 使得

$$(a, b, c)=\lambda(y_0+z_0, x_0+z_0, x_0+y_0). \qquad (2)$$

由 (2) 的三个方程可解出x_0, y_0, z_0:

$$2\lambda(x_0, y_0, z_0)=(-a+b+c, a-b+c, a+b-c). \qquad (3)$$

因为 (x_0, y_0, z_0)在锥上,则有

$$(-a+b+c)(a-b+c)+(-a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(a+b-c)=4\lambda^2(x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0)=0. \qquad (4)$$

化简后 a, b, c必满足

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0. \qquad (5)$$

反之,设a, b, c是不全为零满足 (5) 的任何三个数,并且$d\neq0$。取$\lambda=1/2$,由 (3) 确定的数x_0, y_0, z_0 它们不全为零,并由(4) 与(5) 知 (x_0, y_0, z_0) 在已知锥上。因此平面 (1) 平行于但不等于在 (x_0, y_0, z_0)的切平面。于是与锥交于一抛物线。

这就证明了,当且仅当 $(a, b, c)\neq(0, 0, 0)$, $d\neq0$,而且 (5) 成立时,平面 (1) 割锥成抛物线。

A-2. 这里从一般情形着手。令v_1, v_2, $\cdots v_n$是一个n维空间的向量,称这些向量生成一个平行体 P,意味着它们线性无关。并且

$$P=\{\sum \lambda_i v_i : 0\leqslant\lambda_i\leqslant1\}.$$

平行体P的体积是$|\det A|$,这里A是$n\times n$矩阵,它的行是v_1,

v_2，…，v_n在某个笛卡尔坐标系的分量。

因为这些v线性无关，有线性函数f_1，…，f_n使得对所有的i，j有

$$f_j(v_i)=\delta_{ij}\|v_i\|^2,$$

这里δ_{ij}是克罗内克符号（$d_{ij}=0$当$i\neq j$；$d_{ii}=1$）。因为每一个线性泛函可以用一个内积实现，故存在向量w_1，…，w_n使得对所有的i，j有

$$(v_i,\ w_j)=\delta_{ij}\|v_i\|^2.$$

这些w线性无关，这是因为$\sum a_j w_j=0$，时则

$$(v_i,\ \sum a_j w_j)=a_i\|v_i\|^2=0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

有$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$。

因此，向量w_1，w_2，…，w_n生成一个平行体Q．向量v_i是Q的由所有w中除w_i外生成的面上的高。因为它与面垂直，由（1）w_i在方向v_i上的投影的长为$\|v_i\|$。

设B是$n\times n$矩阵，它的行是w_1，w_2，…，w_n，则Q的体积$=|\det B|=|\det B^T|$，这里B^T是B的转置。

方程（1）表明，AB^T是对角线矩阵

$\mathrm{diag}(\|v_1\|^2,\ \|v_2\|^2,\ \cdots,\ \|v_n\|^2)$。

因此　(P的体积)·(Q的体积)$=|\det A|\cdot|\det B^{-1}|$

$$=|\det AB^{-1}|=\|v_1\|^2\cdot\|v_2\|^2\cdots\|v_n\|^2.$$

三维的情形用平行六面体 E与H 代替P与 Q，因为$\|v_1\|=a$，$\|v_2\|=b$，$\|v_3\|=c$，由上面的公式得关于三维的结果。

A-3．设$S_k=\{n:k<|a_n|\leqslant k+1\}$，$k=0$，1，2，…，圆盘$|z-a_n|\leqslant 1/2$由假设都不相交，并且对于$n\in S_k$这些圆盘全在圆环

$$\{z:k-1/2\leqslant|z|\leqslant k+3/2\}$$

内（当$k=0$是一个圆盘）。设$|S_k|$表示S_k的基数（势），则面积加起来得

$$|S_k|\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant\pi\left[\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]=2\pi(2k+1).$$

于是对于$k>0$，$|S_k|\leqslant 8(2k+1)$。单独计算可证明$|S_0|\leqslant 9$。

对于$k\geqslant 1$，因为$2k+1\leqslant 3k$，则有

$$\sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3}\leqslant\frac{|S_k|}{k^3}\leqslant\frac{8(2k+1)}{k^3}\leqslant\frac{24}{k^2}.$$

因为S_0是有限的，$\sum\limits_{n\in S_0}1/|a_n|^3$是有限的，因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3}\leqslant\sum_{n\in S_0}\frac{1}{|a_n|^3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{24}{k^2}<\infty.$$

上式左边级数的各项全为正，可以重新排列。上式证明了原来的级数绝对收敛。

A-4. 考察以A、B为焦点的回转椭球ε_1，它通过已知点P。ε_1是使得$|AX|+|XB|=|AP|+|PB|$的所有点X的轨迹，并且在ε_1的内部的点Y满足$|AY|+|YB|<|AP|+|PB|$.设ε_2是以C与D为焦点通过P的回转椭球。因为P使得距离$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$最小，椭球ε_1与ε_2没有公共内点。因此在P点处它们相切并且有一条公共的法线l，它与线段AB，CD相交，由反射性，l平分角APB与CPD。

最后证明两角是相等的。分别考察射线PA，PB，PC与PD上的点A_1，B_1，C_1，D_1，例如令$|PA_1|+|PB_1|+|PC_1|+|PD_1|=1$。直线$l$交线段$A_1B_1$于

它的中点M，交线段C_1D_1于它的中点N，所以P在新的四面体

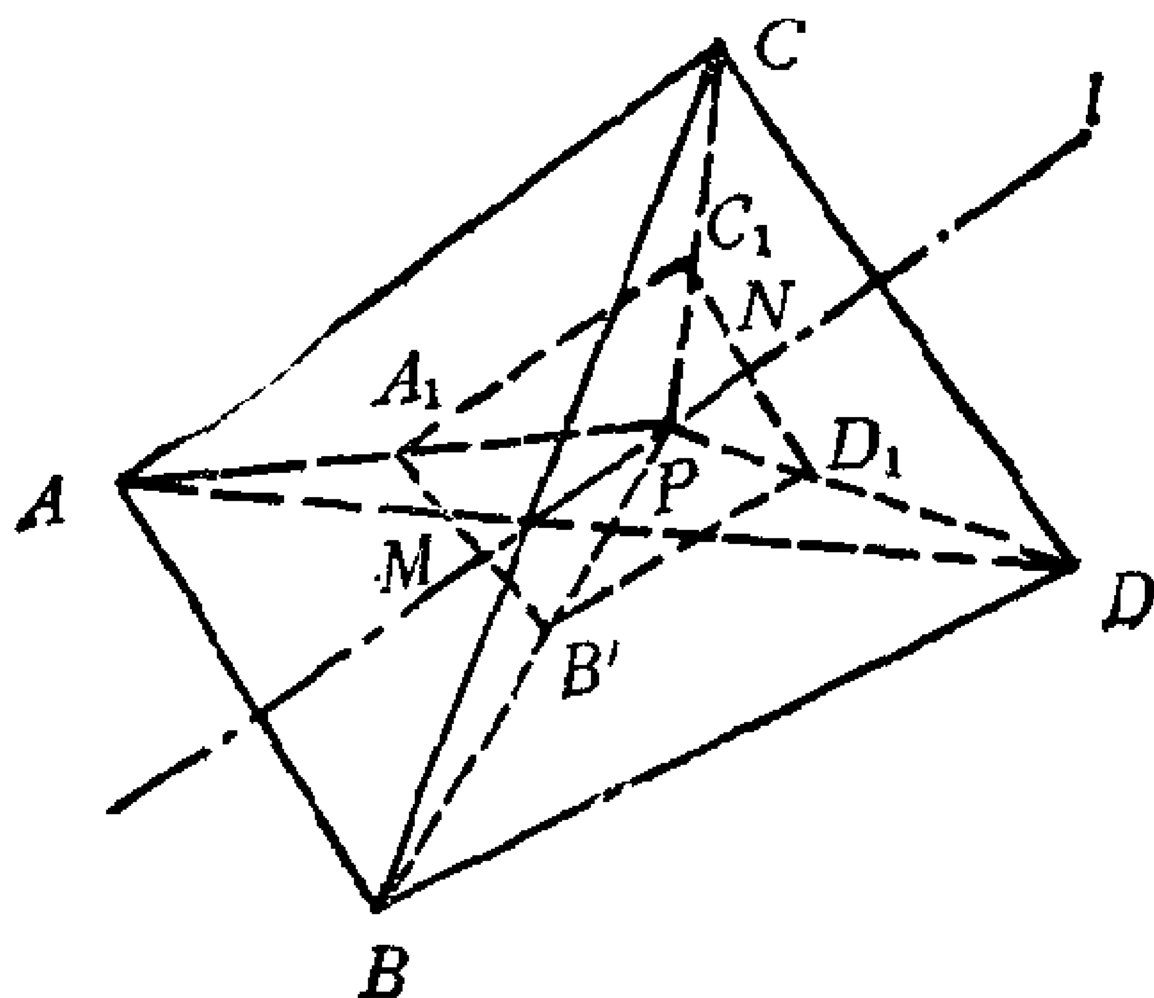


图30

A_1，B_1，C_1，D_1两对立棱的中点的连线上。同理证明P在A_1C_1与B_1D_1的中点Q与R的连线上，而M，N，R，Q是平行四边形的顶点，P是它们的对角线的交点．因此P平分MN．所以三角形A_1PB_1与C_1PD_1全等．故$\angle APB=\angle CPD$．同样可证$\angle APC=\angle BPC$，$\angle APD=\angle BPC$．

A-5． 令$P(z)=z^6+6z+10$，$P(z)$关于实数z的最小值是$P(-1)=5$，因此方程没有实根．因为$\text{Im}(P(iy))=6y\neq 0$除非$y=0$，又$P(0)\neq 0$，故也不能有纯虚根．

根的和为零，所以不会所有的根全在右半平面，也不会所有的根全在左半平面．因为P有实系数，共轭根成对出现，所以在第一象限的根数与第四象限的相同．在第二象限的根数与第三象限相同．因此有两种可能：(1) 在第一象限与第四象限的每一个内有一个根，而在第二象限与第三象限的每一个内有两个根．(2) 在第一象限与第四象限的每一个内有两个根，而在第二象限与第四象限的每一个内有一个根．

在 (1)，(2) 的可能性之间过细地研究第一象限的根，再作出抉择．

假设$z_1=re^{i\theta}$，$0<\theta<\pi/2$是$z^6+6z+10=0$在第一象限的根，则$6z_1+10$也在第一象限并且幅角$\arg(6z_1+10)<\arg z_1=\theta$，因为$z_1{}^6=r^6e^{6i\theta}=-(6z_1+10)$，$z_1{}^6$在第三象限。

同时因为$0<6\theta<3\pi$得$\pi<6\theta<(3/2)\pi$。并且因此$6\theta-\pi$是$-z_1{}^6$的幅角，它在0与$\pi/2$之间，所以$6\theta-\pi=\arg(6z_1+10)<\theta$，得$\theta<\pi/5$。故在第一象限的任何一个根有幅角在$(0,\pi/5)$内。

假设z_1与z_2是第一象限不同的根，则

$$0=(P(z_1)-P(z_2))/(z_1-z_2)$$
$$=z_1{}^5+z_1{}^4z_2+z_1{}^3z_2{}^2+z_1{}^2z_2{}^3+z_1z_2{}^4+z_2^5+6. \tag{3}$$

因为z_1与z_2都有幅角在$(0,\pi/5)$内，在(3)的右边的每一项有幅角在$[0,\pi]$内，于是这些项的和不能是零，矛盾。所以在第一象限，方程不能有两个不同的根，结论(1)成立。

A-6. 恒等式

$$\sin3\theta-\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}(3\theta-\theta)\cos\frac{1}{2}(3\theta+\theta)$$

导出恒等式　$\sin3\theta=\sin\theta(1+2\cos2\theta)$。

因此对于任何x

$$\sin x=\sin(x/3)(1+2\cos(2x/3))$$
$$=\sin(x/9)(1+2\cos(2x/9)(1+2\cos(2x/3)).$$

经n次迭代之后得

$$\sin x=\sin(x/3^n)\prod_{k=1}^{n}(1+2\cos(2x/3^k)). \tag{1}$$

对于$x=0$，题中关系式右边没有定义，但若把$(\sin 0)/0$解释为$1(=\lim\limits_{x\to0}\sin x/x)$，则所要证的等式是正确的，因为在它的右边的无限乘积内每一个因子是1。

若$x\neq 0$，用x除（1），重新排列后，得

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(x/3^n)}{x/3^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+2\cos(2x/3^k)}{3}\right).$$

现在 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x/3^n)}{x/3^n}=1,$$

因此得 $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+2\cos(2x/3^k)}{3}=\frac{\sin x}{x}.$$

B-1. 问题可改述如下，若p及q为整数$0<p<q$，则

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2}. \qquad (1)$$

是不能成立的。

设p，q是整数，$0<p<q$，则$(\sqrt{2}/2)+(p/q)<2$。所以如果(1)成立有

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2},$$

得$|q^2-2p^2|<1$。但是q^2-2p^2是整数，所以$q^2-2p^2=0$。因为$\sqrt{2}$是无理数，所以这是不可能的．显然对于整数p，q使得$p\geqslant q>0$时，（1）不能成立。

B-2.（i）收敛级数不可能有这样一些数段，它们的和可以任意大．所以我们要证明已知级数有这样一些数段。

对于一个正整数k考虑n的集合N_k，使得

$$2\pi k-(1/3)\pi\leqslant\log\log n\leqslant 2\pi k.$$

设 $$T_k=\sum_{N_k}\frac{\cos(\log\log n)}{\log n}. \qquad (4)$$

要证$k\to\infty$时，$T_k\to\infty$。现在$N_k=\{n:\operatorname{expexp}(2\pi k-(1/3)\pi)\leqslant n\leqslant\operatorname{expexp}(2\pi k)\}$，所以$N_k$内元素的个数$|N_k|$满足

$$|N_k| \geqslant \exp\exp 2\pi k - \exp(\alpha \exp 2\pi k) - 1$$

这里$\alpha = \exp(-(1/3)\pi)$。在(1) 的和内的每一项最小是

$$\frac{\cos(-(1/3)\pi)}{\exp 2\pi k} = \frac{1}{2\exp 2\pi k}$$

故 $T_k \geqslant (1/2x_k)[\exp(x_k) - \exp(\alpha x_k) - 1]$

这里$x_k = \exp 2\pi k$。

由洛必达法则并利用$\alpha < 1$有

$$\lim_{x\to\infty}(1/x)(\exp x - \exp\alpha x) = \lim_{x\to\infty}(\exp x - \alpha\exp\alpha x) = \infty。$$

因为$k \to \infty$时$x_k \to \infty$，因此$k \to \infty$时$T_k \to \infty$。

这就证明了给定的级数是发散的。

(ii) 选择适当的θ，将轴旋转θ，由

$$x = u\cos\theta + v\sin\theta$$

$$y = -u\sin\theta + v\cos\theta。\tag{1}$$

二项式 $ax^2 + 2bxy + Cy^2$可化为

$$Au^2 + Cv^2。\tag{2}$$

在(1) 的条件下判别式$ac - b^2$是一个不变量，$AC = ac - b^2$。因为原来的形式是正定的，也同样有 $A > 0$，$C > 0$， 变换是保积的。于是问题变为求积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dudv}{(p + Au^2 + Cv^2)^2},$$

经过代换 $u = \sqrt{p/A}\, s$，$v = \sqrt{p/C}\, t$，

积分化为 $$\frac{1}{p\sqrt{AC}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dsdt}{(1 + s^2 + t^2)^2}。\tag{3}$$

仅需证明在(3) 中积分的值是π，通过极坐标

$$s = r\cos\theta \quad t = r\sin\theta$$

得 $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{rdrd\theta}{(1 + r^2)^2} = 2\pi\int_0^{\infty} \frac{rdr}{(1 + r^2)^2}$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2(1+r^2)}\right]_0^{\infty}=\pi.$$

B-3. 我们将证明更加一般的结果，如果K是一个在平面内的闭有界集，使得K的任何两点之间的距离小于1，则K在半径$1/\sqrt{3}$的圆周内部。

如果K不到两点则结果是平凡的。所以假设K至少有两点，则有一个包含K的最小半径r的闭圆盘D（在后面的引理给出证明）。只要证明它的半径是$r<1/\sqrt{3}$即可。因为此时K在与D同心而半径为$1/\sqrt{3}$的圆周内部。

令D的中心为O，C是包围它的圆。首先证明$C\cap K$不会在C的一个开半圆上。假设不然，它在开半圆S上。令T是剩下的闭半圆，则K与T是不相交的紧致集。因此它们从一个到另一个有正的距离δ。现在若D按从O对着S的中心的方向移动$(1/2)\delta$，K会完全进入D的内部。但是D若由一个较小的半径的同心圆盘代替，它也会包含K，这是不可能的。

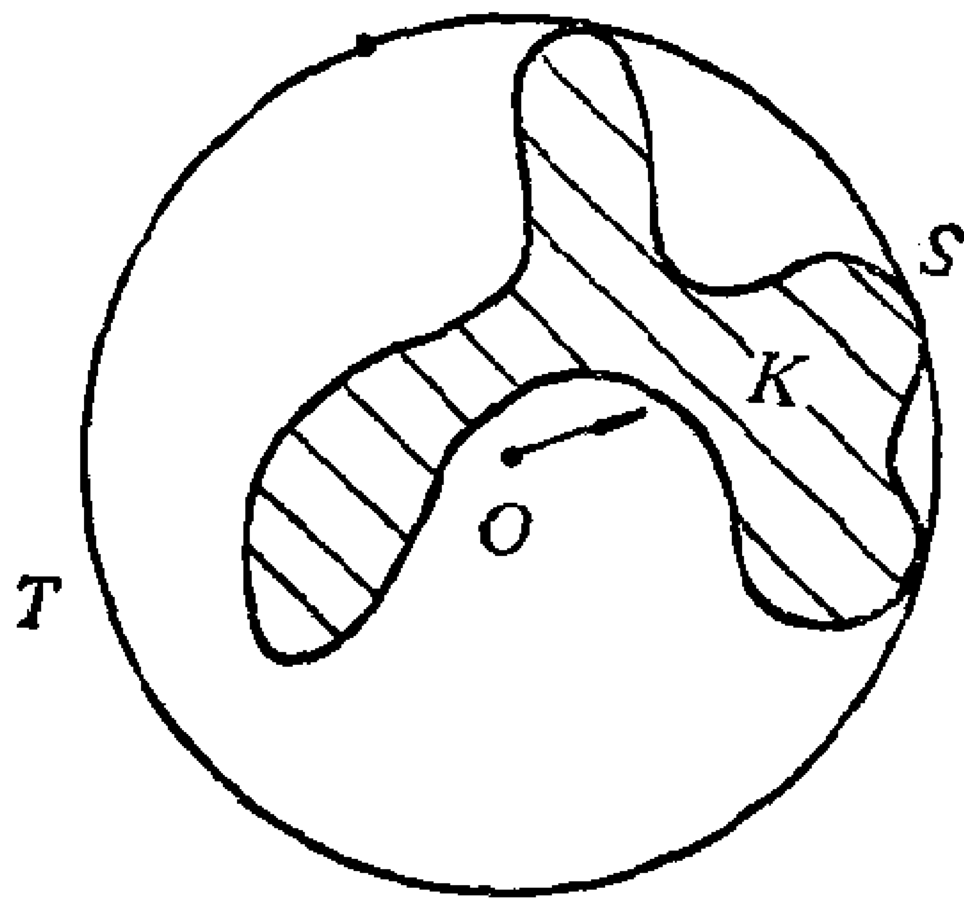


图31

设P与Q是$C\cap K$的点，它们尽可能的远离（从$C\cap K$的紧致性知这样的点存在）。若P与Q各在C的直径的相对两端点，则$2r=|PQ|<1$，于是$r<(1/2)<(1/\sqrt{3})$，得证。若P与Q不在直径的相对两端点，则由上文知$C\cap K$不在劣弧PQ上，则可在优弧PQ上取第三个点$R\in K$。

对于中心为O的圆上任何三点P，Q，R一定会有下面四个方程之一：

$$\angle POQ+\angle QOR=\angle POR \tag{1}$$

$$\angle QOP+\angle POR=\angle QOR \quad (2)$$

$$\angle POR+\angle ROQ=\angle POQ \quad (3)$$

$$\angle POQ+\angle QOR+\angle ROP=2\pi. \quad (4)$$

就上述情形来说，适当选择P与Q可以消去(1) 与(2)，又因为(3) 中R会在劣弧PQ上，这不可能，故 (4)成立。结论是三个角中最大的至少是$2\pi/3$。因此

$|PQ|=2r\sin(1/2\cdot\angle POQ)\geqslant 2r\sin\pi/3=r\sqrt{3}$。因为$|PQ|<1$，则有 $r<1/\sqrt{3}$，得证。

引理：若K是一个平面内至少包含两个点的有界集（闭的或者不是）。则存在一个包含K的最小半径的闭圆盘。

证明：因为K有界，存在某些包含K的闭圆盘。又因为K至少包含两个点P与Q，所以这些圆盘的半径不小于$1/2|PQ|$。

设r是所有这些圆盘的最大下界。设D_1，D_2，D_3，…是包含K并分别以O_1，O_2，O_3，…为中心的闭圆盘序列，并选择$r_n\to\gamma$。

因为$\{O_n\}$是在平面上有界序列，由波尔察诺一维尔斯特拉斯定理，有收敛的子序列，不妨设即$\{O_n\}$本身收敛比如说收敛于O。

令D是绕O的半径为r的闭圆盘，要证$K\subseteq D$。令Z是K的任一点，对于所有的n，Z是D_n的一个点，于是$|O_nZ|\leqslant\gamma_n$。因此$|OZ|=\lim|O_nZ|\leqslant\lim\gamma_n=r$，故$Z\in D$。因此$K\subseteq D$。显然没有比它更小的圆盘包含$K$。引理得证。

B-4. 设 $y=y(x)=(1/4)[1+x-(1-6x+x^2)^{1/2}]$。对于$(1-6x+x^2)^{1/2}$用上二项式定理，$y$能展开成关于$x$的收敛的幂级数，只要$|x^2|+|6x|<1$。因为$y(0)=0$，级数为

$$y(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots. \quad (1)$$

现在 $$2y^2-(1+x)y+x=0. \quad (2)$$

当(2)内y用幂级数代入，有

$$2(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2$$
$$=(1+x)(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)-x.$$

比较x的系数：知$a_1=1$；当$n>1$，

$$2(a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_1)=a_n+a_{n-1},$$

得$a_2=1$；并且对于$n>2$，

$$a_n=3a_{n-1}+2\sum_{i=2}^{n-2}a_i a_{n-i},$$

所以当a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}是正整数时，a_n也是正整数。因为a_1与a_2是正整数，所以所有的系数$\{a_i\}$都是正整数。

B-5. 要证对于无穷多个整数n有

$$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\frac{1}{n}.$$

用间接法．假设不真，则对于某个k及对于所有的$n\geqslant k$

$$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{n+1}{n}. \tag{1}$$

得
$$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}.$$

$$\therefore\quad \frac{a_k}{k}\geqslant\frac{a_1}{k+1}+\frac{a_k+1}{k+1}\geqslant\frac{a_1}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\frac{a_{k+2}}{k+2}$$

$$\geqslant\frac{a_1}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\frac{a_1}{k+3}+\frac{a_{k+3}}{k+3}.$$

归纳得对于 $p\geqslant k$ 有

$$\frac{a_k}{k}\geqslant a_1\Big(\sum_{i=k+1}^{p}\frac{1}{i}\Big)+\frac{ap}{p}.$$

则 $\sum_{i=k+1}^{p}(1/i)\leqslant a_k/ka_1$。但调和级数是发散的，所以$\sum_{i=k+1}^{p}(1/i)$无界。故对于所有的$n>k$，关系(1)不成立。因此一定有无穷多个整数$n$使得

$$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\frac{1}{n}.$$

则 $$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

B-6．"具有连续转动的切线"的意思是C是C^1类曲线．

令$g(P)$是从O到一点P的距离，这函数除O外在整个平面上有定义且可微．因为c不通过O，在c上g是可微的．在P处它有一个临界点当且仅当在P处g的梯度是在P垂直于c（即线$\overline{OP}$与在P处c的切线垂直）．这就是条件$T(P)=P$．

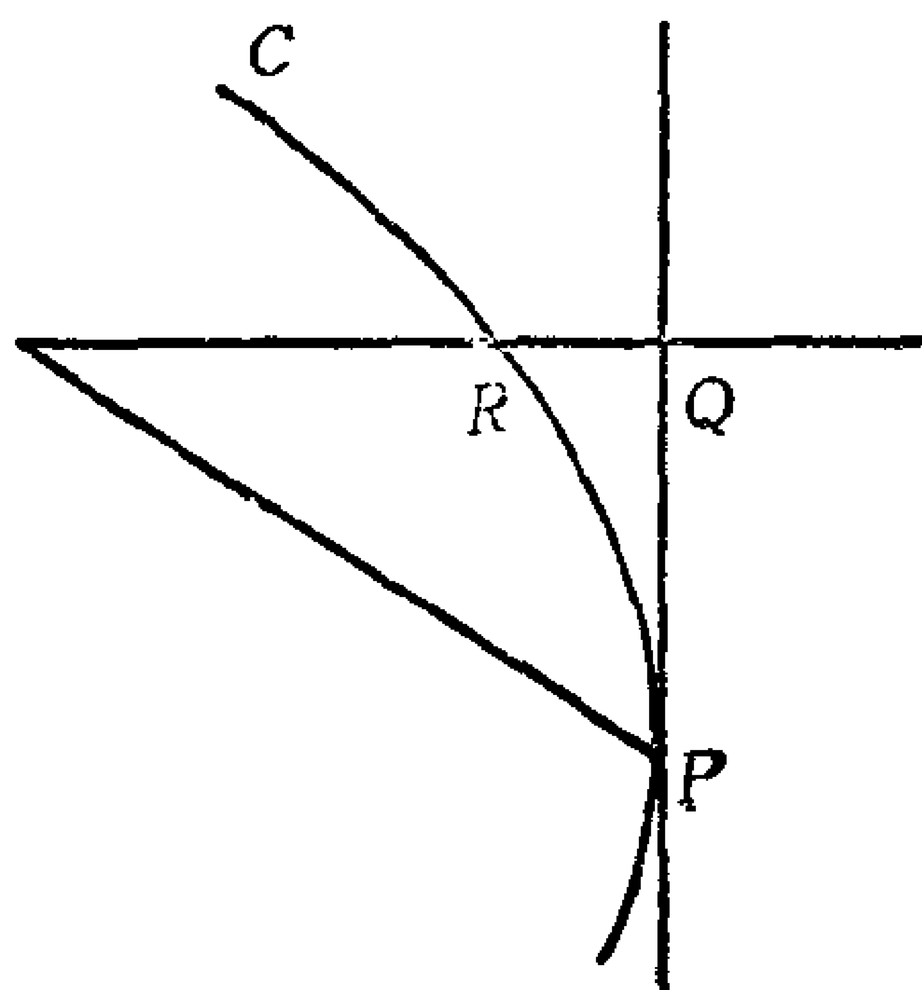


图32

因为T是c映为自身的连续映象，T的不动点的集F是闭的，并且$c-F$对于c是一个开集，它的每一个分量是以F的两个元素为界的开弧．函数g在任何这样的弧上是严格单调的，因为在这里它没有临界点．

假设P不是T的一个不动点，考虑上图$\overline{PQ}$是曲线c在P的切线，$\overline{OQ}$与$\overline{PQ}$垂直．因$T(P)\neq P$，$P\neq Q$故$|OP|>|OQ|$．

因为原点O与c的全部在切线$\overline{PQ}$的同一侧，并且$R=T(P)$是射线$\overline{OQ}$上有$|OQ|>|OR|$，因此$g(T(P))<g(P)$．而且，在$\angle POQ$内部的那部分c上，没有T的不动点S．因为这样的一个点S将在闭三角区域POQ内，而且在S处垂直于OS的垂线l将包含线段OP上内部的一点．这个点会在c的内部．但是若$S=T(S)$，则l将在S切于c，不会包含c内的一点．因此我们的结论是：c的开弧$\widehat{PR}$在$c-F$内．所以，或者$R=T(P)$像P一样在$c-F$的分量内，或者$T(P)$是那个分量的一个端点且$T(P)\in F$．〔注意，c可以包含整个线段PQ，在此情况下$T(P)=Q$，$T(Q)=Q$〕．

现在假设P_0是已给的，对于$n\geq 1$，$P_n=T(P_{n-1})$，如果$P_0 \in F$，则显然$P_0=P_1=\cdots$叙列收敛于P_0。如果$P_0 \notin F$，令A与B是$c-F$的包含P_0在内的分量D的端点。选择端点的记号使得

$$g(A)<g(P_0)<g(B).$$

（因为g在D上是严格单调的，所以这是可能的）。我们已经证明$g(P_1)<g(P_0)$，并且或者$P_1 \in D$或者当$P_1=A$，P_1是D的端点，此时$P_1=A$。重复这种论述就会得到：或者当$P_0, P_1, P_2, \cdots$全在D内；或者对于某个k，$P_k=A$，从而所有的$n\geq k$，$P_n=A$。后者显然有$P_n \to A$。对前者，因为$g(P_0)>g(P_1)>g(P_2)>\cdots$，$P_0$，$P_1$，$P_2$，$\cdots$是在$D$内的一个单调叙列，故在$\overline{D}$内的某点$x$处收敛。

现在$T(x)=T(\lim_{n\to\infty}P_n)=\lim_{n\to\infty}T(P_n)=\lim_{n\to\infty}P_{n+1}=X$。于是$X$是$T$的一个不动点，并且$X\in\overline{D}$。故$X=A$或$X=B$。但是$g(X)=\lim g(P_n)\leq g(P_0)<g(B)$，于是$X=A$。这就证明了在任何情形$P_n \to A$，即当$P_0 \in c-F$则$P_n$收敛于$c-F$的包含$P_0$的分量对$O$较近的端点。$\lim P_n$是$T$的不动点。

T的任何不动点Y是取$P_0=Y$的叙列的极限。

第十届（1950年3月25日）

上午试题

A-1. 比a/b为何值时，蚶线$r=a-b\cos\theta$是凸曲线？（$a>b>0$）。

A-2．判别下列级数的敛散性：

(i) $$\frac{1}{\log(2!)}+\frac{1}{\log(3!)}+\frac{1}{\log(4!)}+\cdots+\frac{1}{\log(n!)}+\cdots.$$

(ii) $$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}+\cdots.$$

A-3．序列x_0，x_1，$x_2\cdots$由下列条件定义：

$$x_0=a,\quad x_1=b,\quad x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+(2n-1)x_n}{2n}\quad (n\geqslant 1).$$

这里a与b是已知数。试用a与b表示$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

A-4．(i) 有一个底面为三角形的直立棱柱，其彼此相邻的三个面（即两个侧面与一个底面）的面积之和为给定值。证明这些面有相等面积并且彼此垂直时体积最大。

(ii) 证明：

$$\frac{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots}=\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$$

A-5．正整数变量n的函数$D(n)$具有下列性质：当p是素数时

$$D(1)=0\qquad\qquad D(p)=1.$$

对任何两个正整数u与v，有

$$D(u,v)=uD(v)+vD(u).$$

解决下面三个问题：(i) 证明这些性质是相容的，并且确定唯一的$D(n)$。（导出一个关于$D(n)/n$的公式，假设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，这里$p_1$，$p_2\cdots$，$p_k$是不同的素数）。(ii) 对于什么样的$n$，$D(n)=n$？(iii) 定义$D^2(n)=D[D(n)]$等等，求$m$趋向于$\alpha_1$时$D^m(63)$的极限。

A-6. 幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=f(x)$的每一个系数$a_n$，或者取值1，或者取值为0。试证下面两结论成立：(i) 若$f(0.5)$是一个有理数，则$f(x)$是一个有理函数。(ii) 若$f(0.5)$不是一个有理数，则$f(x)$不是一个有理函数。

下午试题

B-1. 在一条直街上有n家住户，每家有一个或多于一个小学生。在街的什么地方让小学生集中，他们走的路的距离的总和最小。

B-2. 半轴为a与b的椭圆，它的周长有两个显然的近似值，即$\pi(a+b)$与$2\pi(ab)^{1/2}$．当比值b/a很接近1时，哪一个比较接近真实值？

B-3. 在阳历里按公元纪年．(i) 年数不被4除尽是平年。(ii) 年数被4除尽但不被100除尽是闰年。(iii) 年数被100除尽但不被400除尽，是平年。(iv) 年数被400除尽，是闰年。(v) 闰年366天，平年365天．证明圣诞节在星期三的概率不是1/7。

B-4. 有一个正柱体，它的横截面是一椭圆，半轴为a与b，这里$a>b$。柱体很长，由很轻的均匀物质做成。柱体横放在水平地面上，它与地面相切于一直线，这条直线是各个横截面的短轴的下端的连线。沿着这些短轴上端点的连线，放一条很重的均匀的直的金属线，长度与柱体同。金属线牢固地与柱体结合。我们不计柱体的重量，金属线的宽度，以及与地面的摩擦。

因为上述系统为对称，所以具有平衡性。这种平衡性可以理解为当b/a很小时是稳定的，当这个比接近1时是不稳定的。考察这个论点，并求稳定与不稳定分界时的比值b/a。

B-5. (i) 已知第n项是s_n+2s_{n-1}的序列收敛，证明序列

$\{s_n\}$也收敛。(ii) 变动一个平面的位置,使之包含一个锥,锥的体积为$\pi a^3/3$,它的曲面的直角坐标方程为$2xy=z^2$。求这个变动平面的包络方程,并将结果应用于一般的二阶锥(即锥面)。

B-6. 考虑闭的平面曲线C_i与C_0,它们的长各为$|C_i|$与$|C_0|$;闭曲面s_i与s_0,它们的面积各为$|s_i|$与$|s_0|$。假设C_i在C_0内而s_i在s_0内(下标i表示在内0表示在外)。证明下面四项之中的正确结论及其他不正确的结论.(i)当C_i是凸的则$|C_i|\leqslant|C_0|$。(ii) 当s_i是凸的则$|s_i|\leqslant|s_0|$。(iii) 当C_0是包含C_i的最小凸曲线则$|C_0|\leqslant|C_i|$。(iv)当s_0是包含s_i的最小凸曲面则$|s_0|\leqslant|s_i|$。可假设C_i与C_0是多边形而s_i与s_0是多面体。

解答

A-1. 在极坐标内,若$r=f(\theta)$以2π为周期且恒正,则它的图形是一个环绕原点的简单闭曲线。由于$a>b>0$故本题正属于这种情形。若$r^2+(r')^2>0$则这样的曲线对于参数θ是非奇异的。这论断对本题亦为真。曲率为

$$\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{[r^2+(r')^2]^{3/2}}=K$$

(只要f是C^2类)。

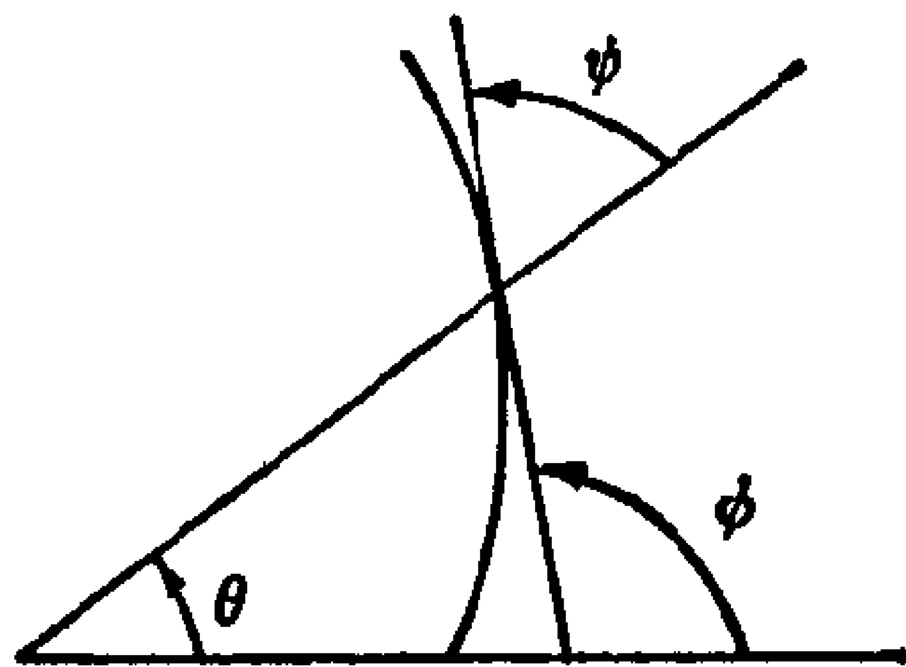


图33

曲线是凸的当且仅当曲率处处非负,即当且仅当$r^2+2(r')^2+rr''\geqslant0$。对于$r=a-b\cos\theta$有$r'=b\sin\theta$ $r''=b\cos\theta$与

$$r^2+2(r')^2-rr''=a^2+2b^2-3ab\cos\theta.$$

此式当且仅当$a^2+2b^2-3ab\geqslant0$时总是非负的(因为a与b是正的,当$\theta=0$时有最小值)。即$(a-2b)(a-b)\geqslant0$。由假设$a-b$

>0故$a\geqslant 2b$。所以当且仅当 $a\geqslant 2b$时蚶线是凸的。

A-2. 对于$n\geqslant 2$有$n^n>n!$因此

$$n\log n>\log(n!)$$

与 $$1/\log(n!)>1/n\log n.$$

级数(i)比级数$\sum_{n=2}^{\infty}1/n\log n$较优。因为

$$\int_2^x \frac{dt}{t\log t}=\log\log x-\log\log 2$$

的广义积分是发散的，得知(i)发散。

级数(ii) 的第n项分母是$3^{1+(1/2)+\cdots+(1/n)}$，而 $1+(1/2)+\cdots+(1/n)\sim\log n$。故 (ii) 的第$n$项约为$1/(3^{\log n})=1/(n^{\log 3})$。当$p>1$时 Σn^{-p}收敛又$\log 3>1$，得知(ii) 收敛。

A-3. 重新排列原递推关系

$$x_{n+1}-x_n=(-1/2n)(x_n-x_{n-1})$$

得 $$x_{n+1}-x_n=(-1/2)^n(1/n!)(x_1-x_0)$$
$$=(-1/2)^n(1/n!)(b-a).$$

而 $$x_{n+1}=x_0+\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)=a+(b-a)\sum_{i=0}^{n}(1/2)^i(1/i!).$$

右边的和数是关于$e^{-1/2}$的幂级数部分和，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)e^{-1/2}.$$

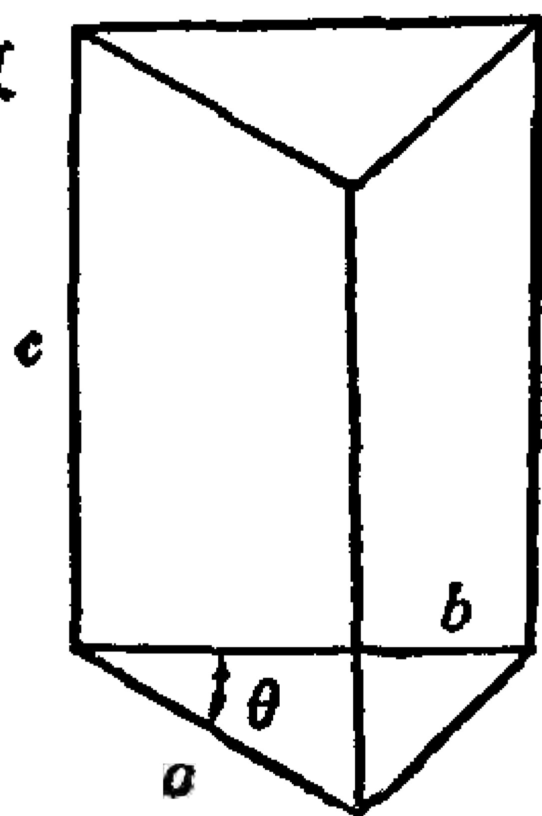


图34

A-4. (i) 设底面三角形两边为a与b，夹角θ。直立棱柱体的高为C。若L为三个面的面积和

$$L=ac+bc+(1/2)ab\sin\theta.$$

体积为 $V=(1/2)ab\sin\theta$。

令$X=ac$，$Y=bc$，$Z=(1/2)ab\sin\theta$分别为三个面的面积，则

$$V^2=(1/2)XYZ\sin\theta.$$

这里X，Y，Z是三个正数，它们的和为L。对于正数有不等式

$$(XYZ)^{1/3}\leqslant(X+Y+Z)/3,$$

故$V^2\leqslant(1/2)(L/3)^3\sin\theta$，即

$$V\leqslant(1/\sqrt{2})(L/3)^{3/2}.$$

仅当$X=Y=Z=(1/3)L$，$\sin\theta=1$时等式成立。但是当所有这些条件成立时，三个面的面积都相等并且彼此垂直。

剩下证明这些条件直立棱柱体能满足，对此仅需取$a=b=2c=\sqrt{2L/3}$，$\theta=\pi/2$即可。

(ii) 式中分子的级数对于所有的x收敛，令它的和为$f(x)$；另知分母的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)(x^2/2)^n=e^{x^2/2}.$$

问题等价于要证明

$$f(x)=e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt. \tag{1}$$

对表示f的级数逐项微分，得

$$f'(x)=1+xf(x). \tag{2}$$

这个一次线性微分方程与初始条件$f(0)=0$一起确定f。于是可用两法得(1)。或者微分(1)的右边，即可看出$f(x)$满足(2)与初始条件；或者用通常的方法解(2)，(对应齐次方程)

$$g'(x)-xg(x)=0$$

有通解$g(x)=ce^{x^2/2}$，则$e^{-x^2/2}$是(2)的一个积分因子。

$$\frac{d}{dx}(f(x)e^{-x^2/2})=e^{-x^2/2}$$

立即得(1)。

A-5. (i) 假设有一个函数D具备所要求的性质，则

$$\frac{D(uv)}{uv}=\frac{D(u)}{u}+\frac{D(v)}{v}. \tag{1}$$

由归纳法得

$$\frac{D(u_1u_2\cdots u_k)}{u_1u_2\cdots u_k}=\sum_i \frac{D(u_i)}{u_i}.$$

因此，当p是素数

$$\frac{D(p^a)}{p^a}=a\frac{D(p)}{p}=\frac{a}{p}.$$

对于任何一个整数$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，$p_i$为素数，有

$$\frac{D(n)}{n}=\sum_i \frac{a_i}{p_i} \tag{2}$$

这个等式表明最多存在一个函数有已给的性质。

另一方面，因为每一个整数$n>1$可分解为某些素因子，若不计次序，则这分解法是唯一的。并且素数的次序不影响(2)的和。我们定义$D(1)=0$；当$n>1$用(2)定义$D(n)$。所以当p是素数$D(p)=1$并且D满足(1)。即

$$D(u,v)=uD(v)+vD(u).$$

所以有唯一的一个具有已给性质的函数。

为了以后参考，应注意对于$n>1$有$D(n)>0$。

(ii) 方程$D(n)=n$等价于

$$\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\cdots+\frac{a_k}{p_k}=1. \tag{3}$$

这里$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$是$n$的素因子分解。若(3)乘以$p_1p_2\cdots p_{k-1}$即看出$p_1p_2\cdots p_k a_k/p_k$是一个整数。因为这些$p$全不相同，故$p_k$除尽$a_k$，所以$a_k/p_k$是一个整数。由(3)显然$k=1$时$a_k=p_k$。故$D(n)=n$的任何一个解有$n=p^p$的形式，这里$p$是素数。反之任何一个这样的$n$是一个解。

(iii) $D(63)=51$ $D^2(63)=D(51)=20$

$D^3(63)=D(20)=24$ $D^4(63)=D(24)=44$

$D^5(63)=D(44)=48$。

$D^m(63)$已开始随着m增加而增加。

假设$n=4k$，这里$k>1$，则

$$D(n)=D(4)k+4D(k)=4(k+D(k))>4k=n.$$

所以当$n>4$且n可以用4除尽，则$D(n)>n$,$D(n)$亦可用4除尽。这就说明序列

$$D(n),\ D^2(n),\ D^3(n),\ \cdots,\ D^m(n),\ \cdots$$

是严格增加的。因为D取整数值，当$n=4k$, $k>1$时$D^m(n)\to\infty$，若$m\to\infty$。

对于上面的情形应用这个结论，知当$m\to\infty$时$D^m(63)=D^{m-2}(20)\to\infty$。

A-6. (i) 假设$f(0.5)=f(1/2)$是一个有理数。为了证明f是一个有理函数，注意到

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots.$$

于是$a_0\cdot a_1a_2a_3\cdots$能当作为$f(1/2)$的二进制展开，当仅且当数是有理数时，这个数的二进制展开终于周期。

(一个二进位的有理数，有两个二进位的表示，它们都终于周期，例如$3/8=0.011000\cdots=0.10111111\cdots$,这种两面性在下面的讨论里不必考虑)。

于是当$f\left(\frac{1}{2}\right)$是一个有理数，则它的二进位展开一定是终于周期的。即存在整数N与k，使得$a_{k+n}=a_n$，对于所有的$n\geqslant N$。则

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$$
$$+x^{N+1}[a_{N+1}+a_{N+2}x+\cdots+a_{N+k}x^{k-1}]$$

$$\cdot[1+x^k+x^{2k}+\cdots]$$
$$=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$$
$$+\frac{x^{N+1}}{1-x^k}[a_{N+1}+a_{N+2}x+\cdots+a_{N+k}x^{k-1}]$$

这就说明f是有理函数，结论(i)得证。

(ii) 证与(ii)相反的形式：当f是一个有理函数，它的幂级数在零处存在，并且每个系数或为0或为1。则$f(1/2)$是有理数。

设 $$f(x)=\frac{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}{c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k}. \tag{1}$$

对于f的已知级数有

$$(c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$
$$=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m.$$

当$k+n>m$时，比较x^{k+n}的系数得

$$c_0a_{n+k}+c_1a_n+k-1+\cdots+c_ka_n=0.$$

因为$c_0\neq0$，能解出 a_{n+k}.

$$a_{n+k}=-\frac{1}{c_0}(c_1a_{n+k-1}+\cdots+c_ka_n). \tag{2}$$

这是用前面k个系数$a_{n+k-1},\cdots,a_k$来表示a_{n+k}的线性递推关系。

假设对于某整数r与s有$r+k>m$与$s>0$，有

$$a_{r+s}=a_r$$
$$a_{r+s+1}=a_{r+1}$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$a_{r+s+k-1}=a_{r+k-1}.$$

由(2)推得$a_{r+s+k}=a_{r+k}$。据归纳法，对任何正数t有$a_{r+s+t}=a_{r+s}$。

因为已知每一个a或者为0或者为1，最多能有2^k个不同的k数组的相继系数，并因此对于$r>m-k$与$s>0$一定有k-数组：

$$(a_r,\ a_{r+1},\ \cdots,\ a_{r+k-1})$$

相同于k数组

$$(a_{r+s}, a_{r+s+1}, \cdots, a_{r+s+k-1}),$$

的确一定会有这样的例子，那里$m-k<r<r+s\leqslant m-k+1+2^k$. 一旦这样一个重复出现，在上面已看到从那点起系数出现周期性，周期为s。于是这些a是终于周期的。故

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum a_i \frac{1}{2^i}.$$

有一个终于周期的二进展开，所以它是一个有理数．结论（ii）得证．

B-1. 设第i个小学生的家的直线坐标是x_i，设小学生的编号为$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$. 因为步行到集中点$z$的总距离是$z$的连续函数，$z\to\pm\infty$，$f(z)\to\infty$，最佳集中点存在，令它为$y$。不论在何处集中，第一个与第$n$个一共至少步行$x_n-x_1$，第二个与第$n-1$个一共至少步行$x_{n-1}-x_2$等等。

当n是偶数$n=2k$，全体小学生至少步行$(x_n-x_1)+(x_{n-1}-x_2)+\cdots+(x_{k+1}-x_k)$。等价于集中点$y$属于每一个区间$[x_1 x_{n-1}]$，$[x_2, x_{n-2}]$，$\cdots[x_{k-1}x_k]$内的情形。因为这些区间是一个套一个的，故$y\in[x_k, x_{k-1}]$。

当n是奇数$n=2k-1$，按上面的配对，第k个学生没有对，他步行至少为0。整个步行距离至少为$(x_n-x_1)+(x_{n-1}-x_2)+\cdots+(x_{k+1}-x_{k-1})+0$，故$y=x_k$。

B-2. 椭圆参数表示为$x=a\cos t$，$y=b\sin t$. 由椭圆的长度公式知长度为

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

为周知的椭圆积分。当b/a接近1时考虑L，置$b=(1+\lambda)a$且考虑

$$L(\lambda)=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(2\lambda+\lambda^2)\cos^2 t}\,dt.$$

显然为λ的一个解析函数．求它的幂级数至二次项

$$L(\lambda)=a\int_0^{2\pi}\Big(1+\frac{1}{2}(2\lambda+\lambda^2)\cos^2 t-\frac{1}{8}(2\lambda+\lambda^2)^2\cos^2 t$$

$$+\cdots\Big)dt$$

$$=2\pi a\Big[1+\frac{1}{4}(2\lambda+\lambda^2)-\frac{3}{64}(2\lambda+\lambda^2)^2+\cdots\Big]$$

$$=2\pi a\Big[1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{16}\lambda^2+\cdots\Big].$$

后者表示式是由$(1+z)^{1/2}$的二项式展开而得的，后来略去λ的三次以上的所有的项。

因为对于较小的λ的值（事实上是当$|2\lambda|+\lambda^2<1$）级数绝对收敛。上面的运算合理。

题中提出的周长近似式是

$$\pi(a+b)=2\pi a\Big(1+\frac{1}{2}\lambda\Big)$$

与 $$2\pi\sqrt{ab}=2\pi a\sqrt{1+\lambda}=2\pi a\Big(1+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2\cdots\Big)$$

因为三个函数有相同的常数项与一次项，所以它们的差别是对于较小的λ的二次项．有

$$L(\lambda)>2\pi a\Big(1+\frac{1}{2}\lambda\Big)>2\pi a\Big(1+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2+\cdots\Big).$$

所以椭圆周长$\pi(a+b)$比$\pi\sqrt{ab}$好，几乎好三倍．事实上

$$L(\lambda)-2\pi a\Big(1+\frac{1}{2}\lambda\Big)\sim\frac{1}{16}\lambda^2,$$

而 $$L(\lambda)-2\pi a\sqrt{1+\lambda}\sim\frac{3}{16}\lambda^2.$$

B-3. 按照已知规律，任何接连400个阳历年中，有303个

平年，97个闰年，共$400\times365+97$天。因为这个数可用7除尽（$400\equiv1$，$365\equiv1$，$97\equiv-1\pmod{7}$）。在400年内有整数个星期（事实上是20,871个星期）。因此圣诞节（或日历中其他一天）在星期中轮流出现的日子是400次。如果N年圣诞节是在星期三，则圣诞节在星期三的概率是$N/400$。但$N/400\neq1/7$，对于任何整数N。

B-4. 因为柱体是长的，仅能作滚动，因此可以将注意力集中到与柱体的轴垂直的平面上，问题成为二维的情形，等价于方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的椭圆，限制在平面上，但是可自由地沿直线$y=-b$滚动。椭圆的重量不计，但有一个重的颗粒加在椭圆的$P=(0,b)$处，重力沿y轴的负向作用，要求确定在稳定的条件下的比例值a/b。假设椭圆从开始的位置滚动很小。当滚动时，P点升高要反抗重力，椭圆在Q点将是稳定平衡。另一种情形，如果轻微的滚动，P点下降，在Q点的平衡是不稳定的。

因此考虑从P点到此椭圆上一可变点Z的距离$|PZ|$来决定平衡是稳定的或者不是稳定的。当这个函数在Q点有严格的局部最小值，则平衡是稳定的。另一方面，若$Z=Q$而$|PZ|$有严格局部最大值，平衡是不稳定的。对$|PZ|^2$考察可得同样结论。

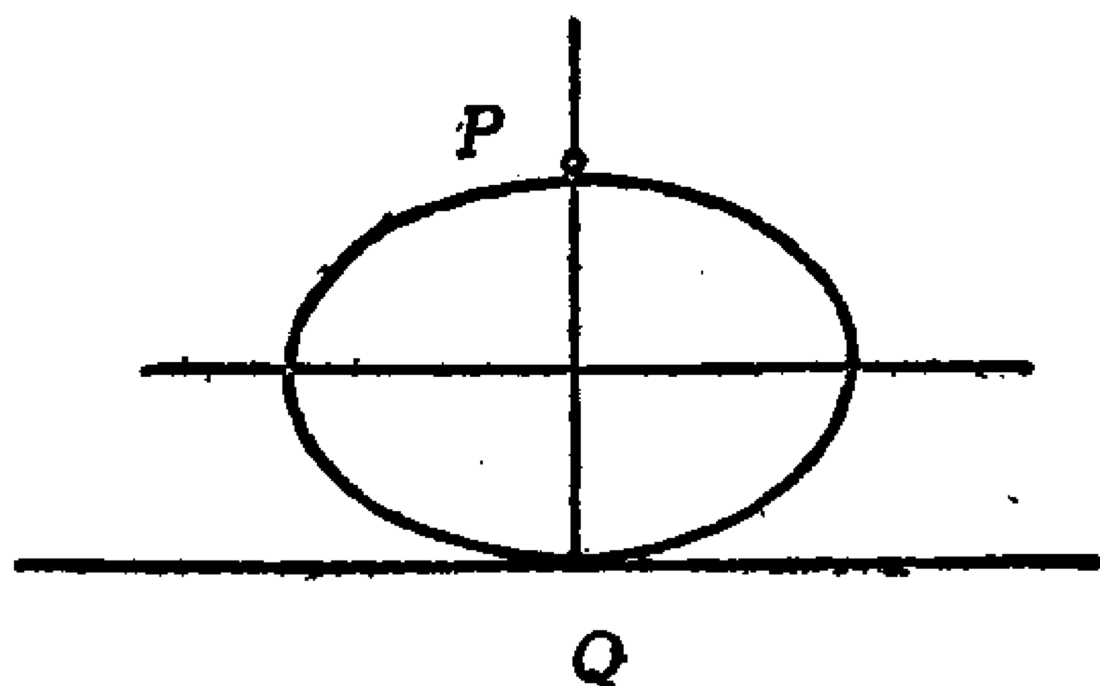


图35

假设Z是点（$a\sin t$，$-b\cos t$）（它在椭圆上），则$t=0$对应$Z=Q$。这时$|PZ|^2=a^2\sin^2t+b^2(1+\cos t)^2$。令$a=rb$上式成

为$b^2[(r^2-1)\sin^2 t+2+2\cos t]$。对于$t$的一阶导数是$b^2[(r^2-1)\sin 2t-2\sin t]$，当$t=0$时为零。二阶导数为$b^2[2(r^2-1)\cos 2t-2\cos t]$，当$t=0$时为$2b^2(r^2-2)$。故当在$t=0$处，若$r^2<2$，则有严格局部极大值，因而是不稳定的。当$r^2>2$，有严格局部极小值，因而是稳定的。所以$a/b$的临界值是$\sqrt{2}/2$。

进一步考虑$r^2=2$的情形。函数变成

$$b^2[\sin^2 t+2+2\cos t]=b^2[4-(1-\cos t)^2]$$

当$t=0$通常有严格局部极大值所以是不稳定的。

B-5. (i) 假设$\lim(s_n+2s_{n+1})=3L$，则$\lim[(s_n-L)+(s_{n+1}-L)]=0$。置$t_n=s_n-L$则$\lim(t_n+2t_{n+1})=0$。要证明$\lim t_n=0$也就证得$\lim s_n=L$，从而得知序列$\{s_n\}$收敛。

给定$\varepsilon>0$，选择k使得$|t_n+2t_{n+1}|<\varepsilon$对所有的$n\geqslant k$成立。对$p$用归纳法得

$$t_k-(-2)^p t_{k+p}=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i(t_{k+i}+2t_{k+i+1}).$$

因此 $$|t_k-(-2)^p t_{k+p}|\leqslant\sum_{i=0}^{p-1}2^i|t_{k+i}+2t_{k+i+1}|<2^p\varepsilon.$$

对$p\geqslant 1$成立。用2^p除得$|t_{k+p}-(-1/2)^p t_k|<\varepsilon$，于是$|t_{k+p}|<\varepsilon+|t_k|/2p$。因此$\limsup\limits_{p\to\infty}|t_{k+p}|\leqslant\varepsilon$。所以$\limsup\limits_{n\to\infty}|t_n|<\varepsilon$。由于$q$是任意的，故$\lim t_n=0$。由前述知这就证明了序列$\{s_n\}$收敛于$L$。

(ii) 作坐标变换 $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}\sqrt{2}(u-v)$。

则uv轴是正交的并且是xy轴旋转$\pi/4$所得。对于新坐标，已知曲面的方程为$z^2+v^2=u^2$，是以u轴为轴的正圆锥。

其次，求由平面从实心锥上割下锥形区域的体积。由旋转的对称性，仅需考虑形为$u=mv+b$的平面。为了平面将割下

一个有界的区域，必须 $|m|<1$. 则割下的区域是具有椭圆为底的锥. 要求锥的高与底面积.

∵ 高是从原点对平面的距离，即 $|b|/\sqrt{1+m^2}$. 底的面积是它在 vz 平面上正投影所得面积的 $\sqrt{1+m^2}$ 倍. 在锥与平面方程之间消去 u，得投影的椭圆方程 $z^2+m^2=(mv+b)^2$. 合并 v 的项并构成完全平方，得

$$z^2+(1-m^2)\left(v-\frac{mb}{1-m^2}\right)=b^2\left(\frac{1}{1-m^2}\right).$$

[注意，因 $|m|<1$ 故确为椭圆]. 这个椭圆的面积为 $A=\pi b^2/(1-m^2)^{3/2}$. 锥的区域的体积是

$$\frac{1}{3}\times 底\times 高$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+m^2}\,\pi b^2\ \frac{1}{(1-m^2)^{3/2}}\right)\left(\frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

$$=\frac{1}{3}\pi|b|^3\ \frac{1}{(1-m^2)^{3/2}}.$$

问题是考虑割出体积为 $(1/3)\pi a^3$ 的这些平面，即 $|b|=a\sqrt{1-m^2}$ 的平面. 这里 m 是平面与 zv 平面之间的角的正切.

现在求所有这些平面的包络 E. 显然构成 E 的平面的分布一定是呈旋转对称的. 所以求 E 的 uv 平面的交 I 即可.

考虑平面 P 在 I 的一点与 E 相切. 因为它保存 E 并在 I 的每一个点不变，故反射在 uv 平面内保存 P. 所以 P 是垂直 uv 平面的. 这样它有一个形为 $u=mv+b$ 的方程，这里 $|b|=a\sqrt{1-m^2}$. P 与 uv 平面的交线 l 显然切于 I. 因此 I 是所有线 l 的包络，有方程为

$$u=mv\pm a\sqrt{1-m^2}. \tag{1}$$

于是包络问题成为2维的.

为了求包络，首先在(1)内取正号，将

$$u = mv + a\sqrt{1-m^2} \tag{2}$$

对于m微分所得的方程与(2) 一起消去m，有

$$0 = v - am/\sqrt{1-m^2}. \tag{3}$$

由(3) 得 $m^2 = v^2/(v^2+a^2)$,

即 $1-m^2 = a^2/(v^2+a^2)$,

方程(2) 成为

$$u = \sqrt{1-m^2}\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}v + a\right)$$

$$= \sqrt{1-m^2}\left(\frac{v^2+a^2}{a}\right).$$

最后得$u^2 = v^2 + a^2$ 为包络I的方程。如果开始取负号也得相同的方程。

三维的包络E，由绕着u轴旋转I得到，因此它的方程为 $u^2 = v^2 + z^2 + a^2$。变回到原坐标轴的方程为$2xy = z^2 + a^2$。

一般的情形，任何一个非退化的二次锥仿射等价于正圆锥。又因为体积的比在仿射变换下不变。用前面的计算导出：如果一族平面，从一个实心的二次锥割去相同的定体积，那末这些平面一定切于一双曲面，它渐近于锥。

B-6. 结论(i)(ii)(iii) 真而(iv) 不真。

(i) 假设c_i是在闭多边形c_0内的闭凸多边形，要证 $|c_i| \leqslant |c_0|$。这里要作点说明，“在内”，“在外”的意思是从c_i的一点画出的每一条无限射线均与c_0相交。

设c_i的顶点依序为A_0，A_1，…，$A_{n-1}A_n = A_0$。在线段$A_{q-1}A_q$上构造一个半无限的矩形带s_q于c_i的外部，它包含开线段$A_{q-1}A_q$但不包含那些无限线段。因为c_i是凸的，故这些带不相交。

考虑$c_0 \cap s_q$在$A_{q-1}A_q$上的正投影。因为若$X \in A_{q-1}A_q$ 不在

这个范围内，则s_q内的射线从X垂直于$A_{q-1}A_q$，不会与c_0相交。故此投射为满射。正投影不增加多边形的长度，所以$|c_0\cap s_q|\geqslant|A_{q-1}A_q|$。因此$|c_0|\geqslant\sum_q|c_0\cap s_q|\geqslant\sum_q|A_{q-1}A_q|=|c_i|$。

(ii) 类似(i)的三维情形也成立（实际上更高维也成立），证明也类似。在凸多面体s_i的第q个面F_q上，竖立一个半无限矩形棱柱P_q于s_i外，它包含开的第q个面但不含那些无限面的点。则这些棱柱是不相交的。$s_0\cap P_q$在F_q上的正投影不增加它的面积。并且投影一定复盖P_q的内部。所以如同(i)有$|s_0|\geqslant\sum_q|s_0\cap P_q|\geqslant\sum_q|F_q|=s_i$。这里绝对值号表示面积。

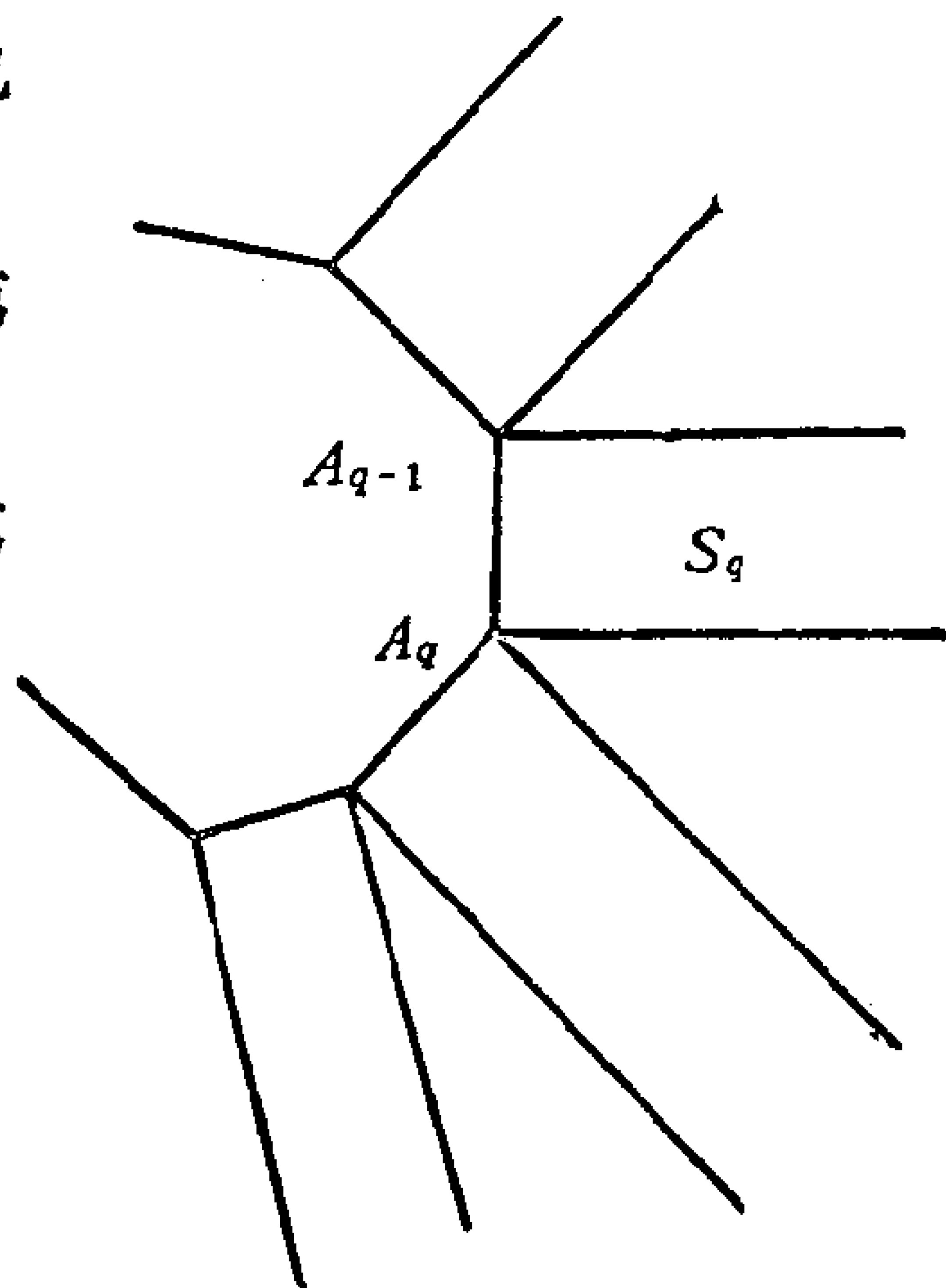


图36

(iii) 令c_0是一个闭凸多边形，顶点依序为$A_0A_1,A_2,\cdots,A_n=A_0$。令$c$是任一闭多边形（可能自行相交）。它的顶点包含所有$A_k$。有

$$|c|\geqslant|c_0|, \tag{1}$$

当且仅当$c=c_0$取等号。

假设此时上式不等号成立，设c_i是一个平面上的闭多边形曲线，而c_0是c_i的凸苞的界，则c_0是多边形，它的顶点包括c_i的顶点，由前述有$|c_i|\geqslant|c_0|$。

现在证明不等式(1)。因为这些A是凸多边形的顶点，设有三个顶点是共线的。若c除A_0A_1，…，A_n外还有顶点，我们可以用一个较短的多边形代替以去掉那个多出来的顶点。因此可设c能表示为B_0,B_1，…B_n，其中$B_n=B_0$。这些B是那些A的一

个排列。

如果这些A与那些A有相同或相反的循环次序，则$c=c_0$。否则，我们将表明如何将这些B再排列得到一个较短闭多边形c'。因为仅有有限多个可能的以这些A为顶点的多边形，一定有一个最短的。因此c_0就是所求的最短多边形。

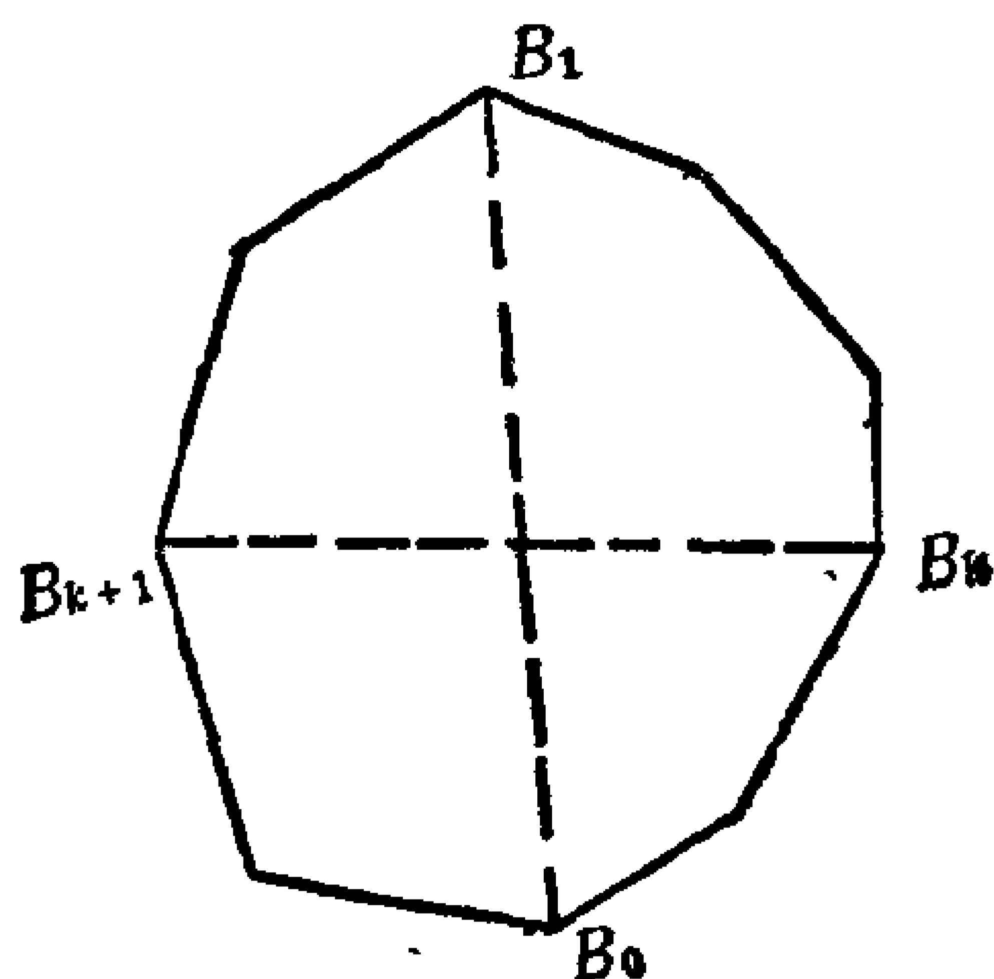


图37

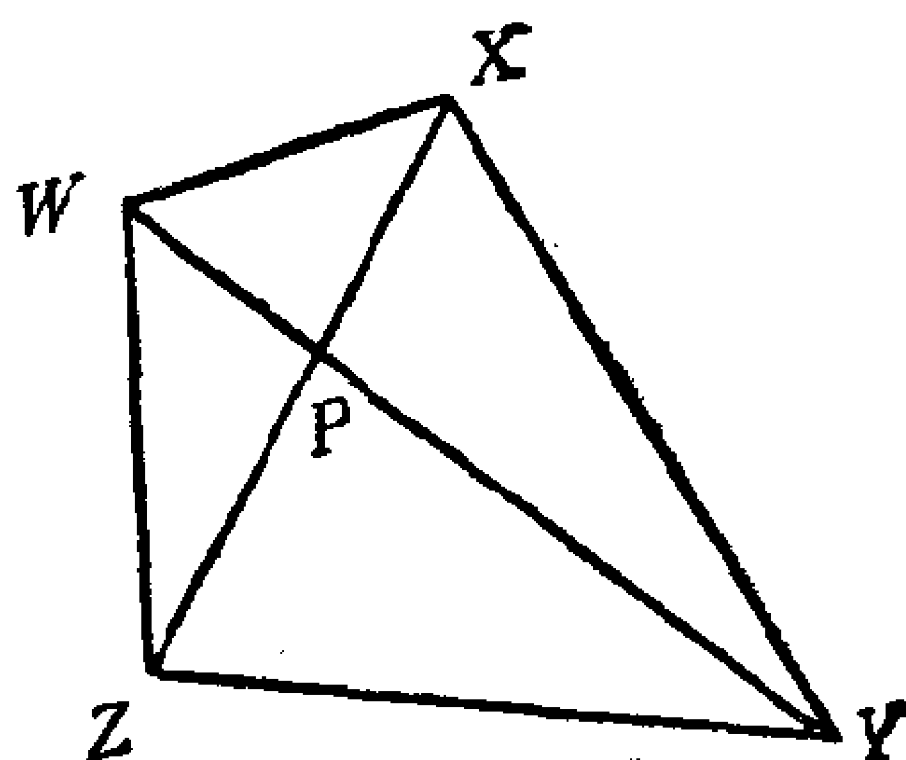


图38

设这些B相继的两个顶点（不妨取B_0与B_1）不是c_0的相继顶点，则线$\overline{B_0B_1}$不是c_0的支撑线，一定有顶点在$\overline{B_0B_1}$的两侧。因此一定有一个整数k，$2\leqslant k\leqslant n-1$，使得$B_k$是在$\overline{B_0B_1}$的一侧，而$B_{k+1}$在另一侧。现在四个点$B_0$，$B_1$，$B_k$，$B_{k+1}$是凸的四边形$Q$的顶点，并且$\overline{B_0B_1}$分开$B_k$与$B_{k+1}$。$Q$的对角线是$B_0B_1$，$B_kB_{k+1}$，因此（证明见后）

$$|B_0B_1|+|B_kB_{k+1}|>|B_0B_k|+|B_1B_{k+1}|. \qquad (2)$$

现在考虑用顶点B_0，B_k，B_{k-1}，…，B_2，B_1，B_{k+1}，B_{k+2}…，B_n表示的多边形闭曲线c'，有

$$|c'|=|c|-|B_0B_1|-|B_k||B_{k+1}|+|B_0B_k|+|B_1B_{k+1}|<|c|.$$

因此c'是具有相同的顶点比c严格短的多边形。(1) 得证。

下面证明(2)，令$WXYZ$是一个凸四边形，对角线交于P，

故有

$$|WY|+|XZ|=|WP|+|PZ|+|YP|+|PX|>|WZ|+|XY|.$$

(iv) 这个结论是错的．设$ABCD$是空间的一个中心为 0 的正四面体，令s是四条边OA，OB，OC与OD的并，包含s的最小凸集显然是四面体$ABCD$。但s的曲面面积为零，s完全不是一个曲面，它可略为扩大而得到一个面积微小的曲面sf，它与s具有同一凸苞。则$|s_0|=|ABCD|>|sf|$。

选择$A'B'C'D'$使得0在AA'，BB'，CC'，DD'的每一条边上，而有$|OA'|=|OB'|=|OC'|=|OD'|=\varepsilon$。这里$\varepsilon$是一个小的正数。令$s_i$是多面体

$$A'B'C'D'\cup AB'C'D'\cup A'BC'D\cup A'B'C'D$$

的曲面。选择ε充分小则可使$|s_i|$任意小。

第十一届(1951年3月31日)

上午试题

A-1。证明：如果a，b，c，d，e，f为实数，则行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

是非负的。

A-2。在平面上，一动点到几个定点的距离的平方和为一常数，问此点的轨迹是什么？又对于此常数必须附加何种限制(用几何语言叙述)方能使所求轨迹为非空集合？

A–3. 求无穷级数的和：

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\cdots.$$

A–4. 画出下列方程表示的曲线：

$$y^4-x^4-96y^2+100x^2=0.$$

A–5. 在平面上考虑由整数点(即坐标为整数的点)构成的点网络．试对具有有理斜率的直线证明下述结论：(i) 这样的直线或者不通过网络点或者通过无穷多个网络点；(ii) 对于每一条这样的直线，都存在一个正数d，使得除去直线上可能有的网络点以外，再没有网络点与直线的距离小于d。

A–6. 试确定抛物线的一条法线弦的位置，使得这条弦截该抛物线所成的弓形有最小面积。

A–7. 证明：如果级数$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$收敛，则级数$a_1+a_2/2+a_3/3+\cdots+a_n/n+\cdots$也收敛。

下午试题

B–1. 设微分方程$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$有一形如$f(xy)$的积分因子，试找出函数M和N必须满足的条件．推导时可以假设M和N具有一切阶的连续偏导数。

B–2. 考虑x的两个可微的且不恒为零的函数．试找出这样两个函数的例子，使得它们之商的导数等于它们的导数之商。

B–3. 证明：如果x为正数，则

$$\log_e(1+1/x)>1/(1+x).$$

B–4. 试研究一个同时与四个不同的同心圆相切的平面椭圆图形的存在性．讨论可以采用任何行之有效的方法．

B–5. 已知通过环面中心的一个平面是环面的切平面． 证

明该平面与环面的交集由两个圆组成。

B-6。设三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$的所有根均为实根。试证最大根与最小根之差不小于$(a^2-3b)^{1/2}$ 或不大于

$$2(a^2-3b)^{1/2}/3^{1/2}.$$

B-7。试求四维超球面 $x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$ 的体积及其内部$x^2+y^2+z^2+t^2<r^2$的超体积。

解答

A-1。假设$f\neq0$。用$\triangle$表示已给行列式，并记$\bar{b}=b/f$ 和 $\bar{d}=d/f$。用f除行列式的第三行和第三列，则得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix}0 & a & \bar{b} & c\\ -a & 0 & \bar{d} & e\\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1\\ -c & -e & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

再从第一行减去第三行的c倍，从第二行减去第三行的e倍，得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix}\bar{b}c & a+\bar{d}c & \bar{b} & 0\\ -a+\bar{b}e & \bar{d}e & \bar{d} & 0\\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1\\ -c & -e & -1 & 0\end{vmatrix};$$

对于列也进行类似的交换，又得

$$\frac{1}{f^2}\triangle=\begin{vmatrix}0 & a+\bar{d}c-\bar{b}e & \bar{b} & 0\\ -a+\bar{b}e-\bar{d}c & 0 & \bar{d} & 0\\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & a+c\bar{d}-\bar{b}e \\ -a+\bar{b}e-c\bar{d} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a+c\bar{d}-\bar{b}e)^2.$$

从而$\triangle=(af+cd-be)^2$，所以对任意选取的实数a，b，c，d，e和f，$\triangle$是非负的.

请注意，如果$f=0$，矩阵便有更多的零元素，应用行列式的拉普拉斯展开定理就得$\triangle=(cd-be)^2$.（另一方面，在上述公式$\triangle=(af+cd-be)^2$中令$f\to 0$也得到这个结果.）更一般地说，由于$\triangle$显然是关于矩阵表值的一个多项式，所以在计算$\triangle$时假定$f\neq 0$实际上不失掉一般性. 用代数语言来说，计算实际上是在域$Q(a, b, c, d, e, f)$内作出的，这里a，b，c，d，e和f都是未定元. 在这个域内$f\neq 0$.

A-2. 设已给定点为$\{(x_i, y_i)\}$，$i=1,2,\cdots,n$. 令(x, y)是轨迹上的一点，则所要求的条件是

$$\sum[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]=C,$$

其中C是一个常数. 这个条件可改写为$nx^2-2(\sum x_i)x+\sum x_i^2+ny^2-2(\sum y_i)y+\sum y_i^2=C$，配平方后便有如下形式：

$$\left(x-\frac{\sum x_i}{n}\right)^2+\left(y-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2=\frac{C}{n}+\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2-\frac{\sum x_i^2}{n}-\frac{\sum y_i^2}{n}.$$

因此，若上式右边为负，则轨迹是一个空集；若右边为零，则轨迹是一个点（即给定点组之形心$((1/n)\sum x_i, (1/n)\sum y_i)$）；若右边为正，则轨迹是以形心为圆心的一个圆. 如果把给定点组之形心取作坐标原点，则有一实的非空轨迹的条件为

$$C\geqslant\sum(x_i^2+y_i^2)=\sum r_i^2,$$

这里r_i是第i个定点到新原点的距离。这就是说，C必须至少是与各定点到其形心的距离的平方和一样大。最后这个公式是下述一般事实的一个特例：一平面质量对于经过质心而且垂直于该平面的一条轴的惯性矩为最小。

A-3. 首先证明

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\cdots=\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}.$$

事实上，对任何$t\neq-1$有

$$\frac{1}{1+t^3}=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}t^{3n-3}+\frac{(-1)^k t^{3k}}{1+t^3}.$$

从0到1积分得

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}-\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{3n-3}dt=(-1)^k\int_0^1\frac{t^{3k}dt}{1+t^3}.$$

因此
$$\left|\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\right|=\left|\int_0^1\frac{t^{3k}dt}{1+t^3}\right|$$
$$\leqslant\int_0^1 t^{3k}dt=\frac{1}{3k+1}.$$

令$k\to\infty$便得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}.$$

这个积分可用部分分式积分法计算如下：

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{1+t}+\frac{2-t}{1-t+t^2}\right]dt$$
$$=\frac{1}{3}\Big[\log(1+t)-\frac{1}{2}\log(1-t+t^2)+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left[\log 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

A-4. 原方程配方后化为

$$(x^2-50)^2-(y^2-48)^2=14^2.$$

令$X=x^2$，$Y=y^2$，则得

$$(X-50)^2-(Y-48)^2=14^2,$$

在XY平面上这个方程表示的图形显然为一直角双曲线，其中心在(50，48)处，渐近线是

$$\begin{cases}X+Y=98\\X-Y=2.\end{cases}$$

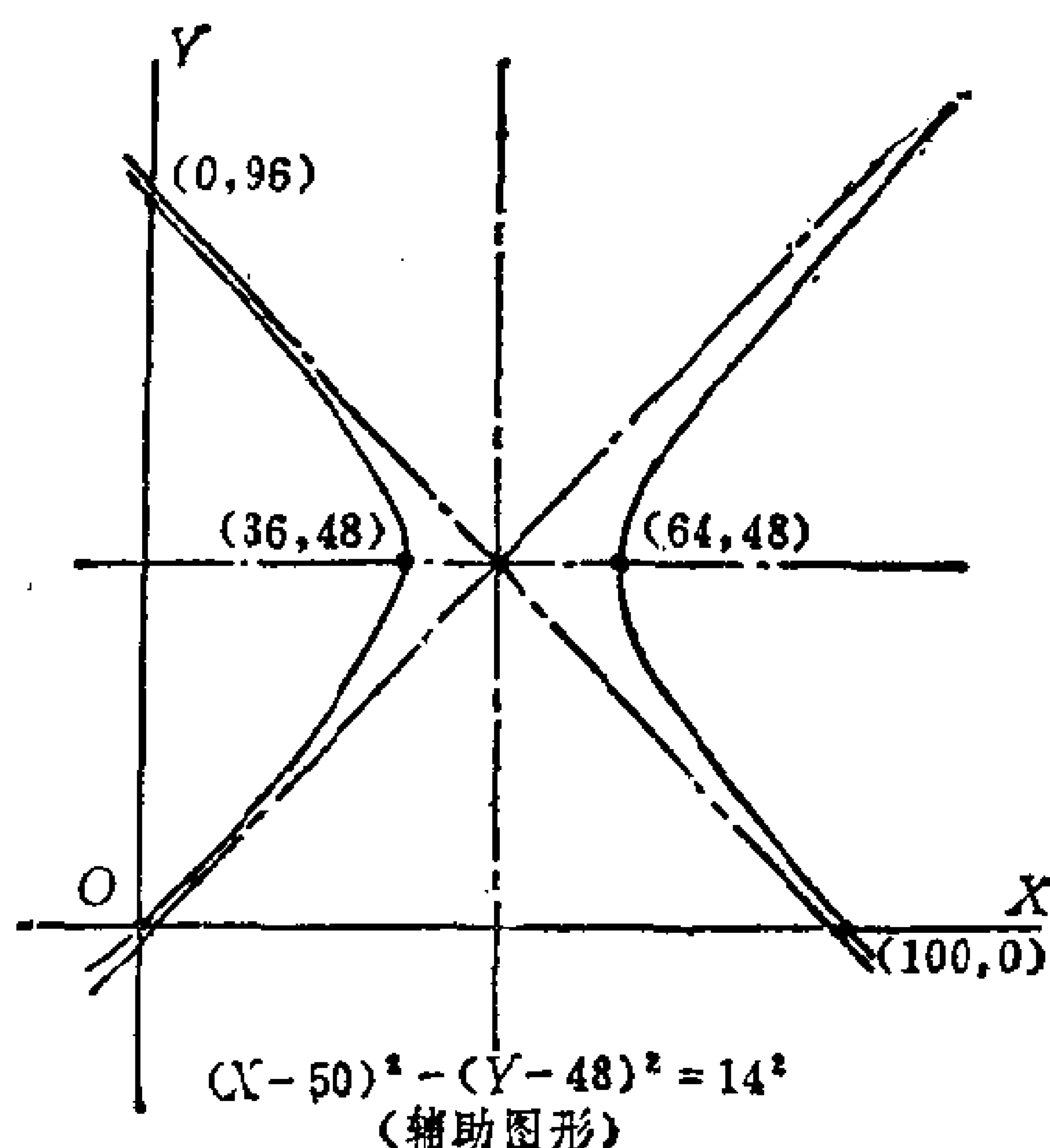


图39

今考察XY平面的第I象限．对第I象限内的每个点(X,Y)，所求轨迹L上对应有四个点，即$(\pm\sqrt{X},\pm\sqrt{Y})$．因为把$xy$平面的每个象限都映成$XY$平面的第I象限的变换$(x,y)\longmapsto(X,Y)$是双方可微的，故辅助图形的光滑弧必对应于$L$的光滑弧．在辅助图形上又在第I象限边界上的三个点(0，0)，(0，96)和(100，0)对应于L的五个点(0，0)，$(0,\ \pm\sqrt{96})$，$(\pm 10,0)$，对这些点要给予特殊考虑．

函数$f(x,\ y)=y^4-x^4-96y^2+100x^2$有梯度

$$\nabla f=(-4x^3+200x,\ 4y^3-192y).$$

因为∇f在点$(0,\ \pm\sqrt{96})$，$(\pm 10,\ 0)$处不等于零，所以曲线L

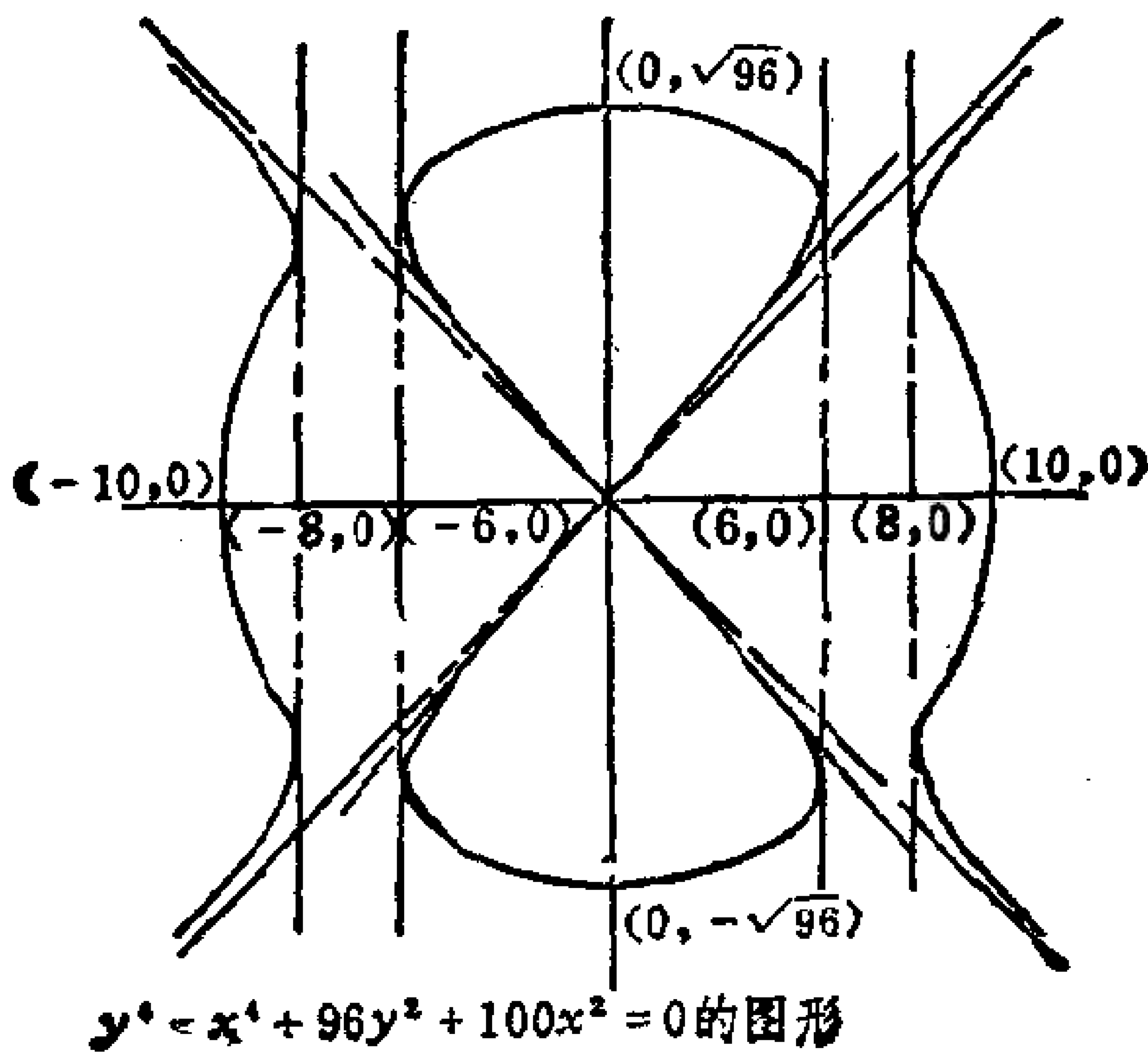
在这些点是光滑的。因为∇f的第一个分量在$(0, \pm\sqrt{96})$处等于零，所以L在这两点必有水平切线。因为∇f的第二个分量在$(\pm 10, 0)$处等于零，所以L在这两点必有竖直切线。因为∇f的两个分量在原点处均等于零，所以在原点处必须考虑f的二次项$100x^2-96y^2$。因为这些二次项构成一个非退化二次型，它沿直线$y=\pm(100/96)x$等于零，故曲线L在原点处自行相交，它的两支都与此两直线相切。

分析表明，∇f的第一个分量在L的任何其他点处都不等于零，所以L没有更多的水平切线，但∇f的第二个分量等于零的点另外还有八个，即$(\pm 6, \pm\sqrt{48})$，$(\pm 8, \pm\sqrt{48})$，对应于辅助图形上的竖直切线，L在这些点处也有竖直切线。

因为直线$X-Y=2$是助辅双曲线的一条渐近线，故沿着这条双曲线在第I象限内的无界弧有$X-Y\to 2$。对应地，沿着L在第I象限内的无界弧有

$$x-y=\sqrt{X}-\sqrt{Y}=\frac{X-Y}{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}\to 0.$$

所以在第I象限内L渐近于直线$y=x$，根据对称性，在第III象限



$y^4-x^4+96y^2+100x^2=0$的图形

图40

内L也渐近于$y=x$，而在第II和第IV象限内L渐近于$y=-x$。

因为在带形$36<X<64$内没有辅助轨迹上的点，故在带形$6<x<8$和$-8<x<-6$内没有L的点。所以得到$f(x, y)=0$的图形如图40所示。

A-5. (i) 若L是一条具有有理斜率的直线，则其方程可以写为$ax+by+c=0$，其中a和b都是不为零的整数。设(x_1, y_1)是此直线上的一点，且x_1和y_1均为整数。由于

$$a(x_1+kb)+b(y_1-ka)+c=ax_1+by_1+c=0,$$

故知形式为(x_1+kb, y_1-ka)，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$的点也全在此直线上。所以，如果在具有有理斜率的一直线上有一个整数点，则其上就有无穷多个整数点。

(ii) 从点(p, q)到直线L：$ax+by+c=0$的距离为

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

因为L有有理斜率，故a和b均可选为整数。于是$ap+bq$只取整数值。所以，如果c是一个整数，则d或等于零，或至少等于$1/\sqrt{a^2+b^2}$。如果c不是一个整数，则d至少等于$e/\sqrt{a^2+b^2}$，其中e是从c到最接近的整数的距离。

A-6. 选取坐标系，使得抛物线的方程为$4ay=x^2$，$a>0$。

把点$P(2as, as^2)$连接到点$Q(2at, at^2)$的弦有方程

$$y=\frac{1}{2}\left(t+s\right)x-ast. \tag{1}$$

在$(2at, at^2)$处的切线有斜率t。因此，直线(1)为抛物线在Q处的法线必须而且只须

$$\frac{1}{2}t(t+s)=-1, \quad \text{即} s=-\frac{2}{t}-t.$$

所以s和t有相反的符号。取$s<0$和$t>0$。则由弦截出的面积是

$$\int_{2as}^{2at}\left[\frac{1}{2}(t+s)x-ast-\frac{1}{4a}x^2\right]dx=\frac{1}{3}a^2(t-s)^3.$$

当$t-s$为最小时此面积将为最小。但

$$t-s=2t+\frac{2}{t}=2\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+4\geqslant 4,$$

等号仅当$\sqrt{t}=1$时成立，从而$t=1$。

因此，在抛物线轴右方的一切法线中，经过点$(2a,a)$的法线截出最小面积，其值为$64a^2/3$。根据对称性，在轴左方的一切法线中，经过点$(-2a,a)$的法线截出最小面积。故临界法线具有与轴相交成45°角的特征。

A-7。本题是阿贝尔求和定理的一个特殊情形：如果级数$\sum a_n$的部分和有界，且序列$\{b_n\}$单调下降趋于零，则$\sum a_n b_n$收敛。

这一定理可证明如下：设$s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$，设$M$为$\{|s_k|\}$的一个上界。则

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\&=s_1b_1+(s_2-s_1)b_2+\cdots+(s_n-s_{n-1})b_n\\&=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+\cdots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+\\&\qquad+s_nb_n,\end{aligned}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}s_i(b_i-b_{i+1})+s_nb_n.$$

因为
$$|s_i(b_i-b_{i+1})|\leqslant M(b_i-b_{i+1}),$$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i-b_{i+1})$收敛于$b_1$，故级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}s_i(b_i-b_{i+1})$绝对收敛。

又因为$\{s_n\}$有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_nb_n=0$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(b_i - b_{i+1}).$$

因而明所欲证。

作为特殊情形，只须取$b_n = 1/n$,便直接得到本题要证的结果。

B-1. 如果已给方程有一形如$f(xy)$的积分因子，则

$$f(xy)M(x, y)dx + f(xy)N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

必是一闭微分形式(即局部正合微分形式)。为此必须成立

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[f(xy)M(x, y)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(xy)N(x, y)\Big], \qquad (2)$$

即成立 $$xf'M + f\frac{\partial M}{\partial y} = yf'N + f\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (3)$$

由此得 $$\frac{f'}{f} = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right), \qquad (4)$$

这里假定$f(xy) \neq 0$和$xM - yN \neq 0$。

今(4)之左边是(xy)的一个函数，故右边也必是(xy)的一个函数。于是，当$xM - yN \neq 0$时，方程有所述积分因子的必要条件是存在一单变量函数R，使得

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = R(xy).$$

反之，如果这样一个函数R存在，则由下式

$$f(xy) = \exp\int^{xy} R(t)dt$$

给出的函数无疑将满足(2)，所以它是一个积分因子。

B-2. 必须找出函数f和g，使得成立

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g'}, \qquad (1)$$

(1) 实质上等价于

$$g(g'-g)f'-g'^2f=0. \tag{2}$$

今若选择任一区间I和任一函数g，使得$g, g'-g$和g'在I上都不等于零，则(2)是在I上对于f的一个非奇的一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=C\exp\int^x\frac{g'^2}{g(g'-g)}dt. \tag{3}$$

任意常数$C\neq 0$，函数f和g都将满足(1)且不恒等于零。

为明确起见，试令$I=R$和$g(x)=e^{\lambda x}$。于是(2)变成

$$(\lambda-1)f'-\lambda^2f=0,$$

因而若$\lambda\neq 1$，便可取

$$f(x)=\exp\left(\frac{\lambda^2}{\lambda-1}\right)x.$$

例如选择$\lambda=2$时便有$f(x)=e^{4x}$，$g(x)=e^{2x}, f(x)/g(x)=e^{2x}$，且$(f/g)'=2e^{2x}=f'/g'$。

B-3. $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_x^{1+x}\frac{dt}{t}>\int_x^{1+x}\frac{dt}{1+x}=\frac{1}{1+x}$.

B-4. 解法一 我们证明：从靠近一（非圆的）椭圆中心的任何一点P可以作出该椭圆的四条不同的法线。然后证明：如果P又不在椭圆的两条轴上，则这些法线的长度全不相同。因此，以任一个这样的点P为圆心，便可作出与给定椭圆相切的四个不同的同心圆。于是所言之图形一定存在。

设椭圆的中心为O，长轴AC的长为$2a$，短轴BD的长为$2b$，这里$a>b$。

设P是任意一点，使得$|OP|<\frac{1}{2}(a-b)$。则由三角形定律有

$$|PA| \geqslant |OA| - |OP| > \frac{1}{2}(a+b),$$

$$|PB| \leqslant |OB| + |OP| < \frac{1}{2}(a+b),$$

$$|PC| > \frac{1}{2}(a+b), \tag{1}$$

$$|PO| < \frac{1}{2}(a+b).$$

所以，当X沿着椭圆变动时，$|PX|$沿弧DAB必在某点A'有一极大值，沿弧ABC必在某点B'有一极小值，沿弧BCD必在某点C'有一极大值，沿弧CDA必在某点D'有一极小值。由于不等式(1)，这些极值之中无论哪个都不会在所提到的弧的端点取得，从而线段PA'，PB'，PC'，PD'都是椭圆的法线。

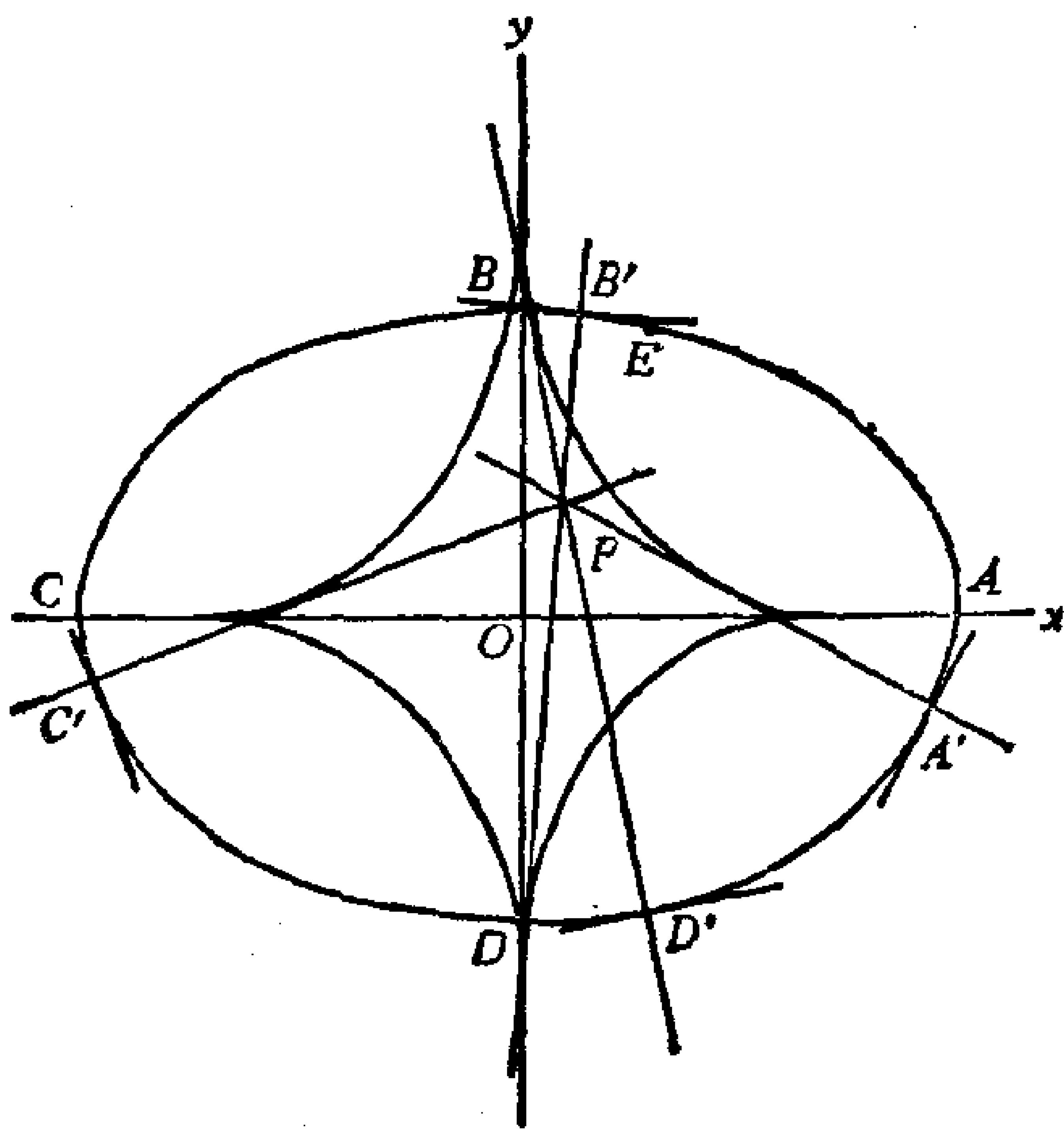


图41

今再设P不在长轴上。为确定起见，设P在$\overleftrightarrow{AC}$上方。令E是D'对于$\overleftrightarrow{AC}$的反射点。则E在椭圆上；且由于AC是$D'E$

的中垂线，P 和 E 都在 $\overleftrightarrow{AC}$ 的同一侧，故有 $|PE|<|PD'|$。因为当 X 沿着包含 E 的椭圆弧 ABC 变动时，$|PX|$ 的最小值是 $|PB'|$，故又有 $|PE|\geqslant|PB'|$。所以有 $|PB'|<|PD'|$。

如果 P 不在短轴上，类似地可证得 $|PA'|\neq|PC'|$。

由不等式(1)及 A',B',C',D' 的取法即知 $|PA'|>\frac{1}{2}(a+b)$，$|PB'|<\frac{1}{2}(a+b)$，$|PC'|>\frac{1}{2}(a+b)$ 和 $|PD'|<\frac{1}{2}(a+b)$。因此 $|PA'|,|PB'|,|PC'|,|PD'|$ 全不相同。这就完成了图形存在性的证明。

函数 $|PX|$ 的四个临界点很容易用分析方法确定出来。若椭圆有方程 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$，P 有坐标 (h,k)，则

$$|PX|^2=(x-h)^2+(y-k)^2.$$

取 λ 为拉格朗日乘子，考虑

$$(x-h)^2+(y-k)^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

令其偏导数等于零，得到

$$(x-h)=\lambda\frac{x}{a^2},\quad (y-k)=\lambda\frac{y}{b^2}.$$

消去 λ，则看出四个临界点是椭圆与（可能退化的）双曲线

$$(a^2-b^2)xy=a^2hy-b^2kx$$

的交点。因为 $h=k=0$ 时有四个交点，故当 h 和 k 靠近零时也必有四个交点。

利用椭圆的渐屈线可具体看出：从渐屈线内部一点 P 能够作出渐屈线的四条切线，这四条切线都是椭圆的法线。

解法二：我们证明：给定任意四个不同的同心圆，必有一个椭圆与四个同心圆都相切。

令C_1, C_2, C_3, C_4是圆心为O，半径分别为$r_1<r_2<r_3<r_4$的四个同心圆。在C_1上固定一点A(利用旋转对称性．可认为椭圆与C_1相切于A)。设l是过A所引的C_1之切线，设Q_1和Q_2均是由l及半直线AO所界的四分之一个平面．既是Q_1的边界又在l上的半直线记为l_1。从点$B=l_1\cap C_3$在Q_1内引C_2之切线BD，又从l_1上的且在C_3外面的任一点X在Q_1内引C_2之切线XY。

有一个单参数二次曲线族与l相切于A，与$\overleftrightarrow{XY}$相切于Y。因而所有曲线既与C_1相切又与C_2相切．这个族的退化元包括连结A到Y的二重线及直线$\overleftrightarrow{XY}$与l的并集。考虑到连续性，便知必有该族的一元$K(X)$与C_3相切于$Q_1\cap C_3$的一点$P(X)$。

当$X\to B$时，$K(X)$退化成$l\cup\overleftrightarrow{BD}$；所以对靠近$B$之$X$，$K(X)$是一双曲线（它有一支在图形的左下方）．当$X\to\infty$时，$K(X)$趋向对称于$\overleftrightarrow{OA}$的一椭圆，因此在$Q_2$内必再一次与$C_3$相切；但这一椭圆根本不与$C_4$相交。假设$K(X)$连续依赖于$X$，则必有一个$X$值，使得$K(X)$与$C_4$在$Q_2$内相交于一个二重点；即$K(X)$与$C_4$必相切．显然此二次曲线没有点在$C_4$外面，所以它是一个椭圆。于是找到了与所有四个给定圆都相切的一个椭圆。

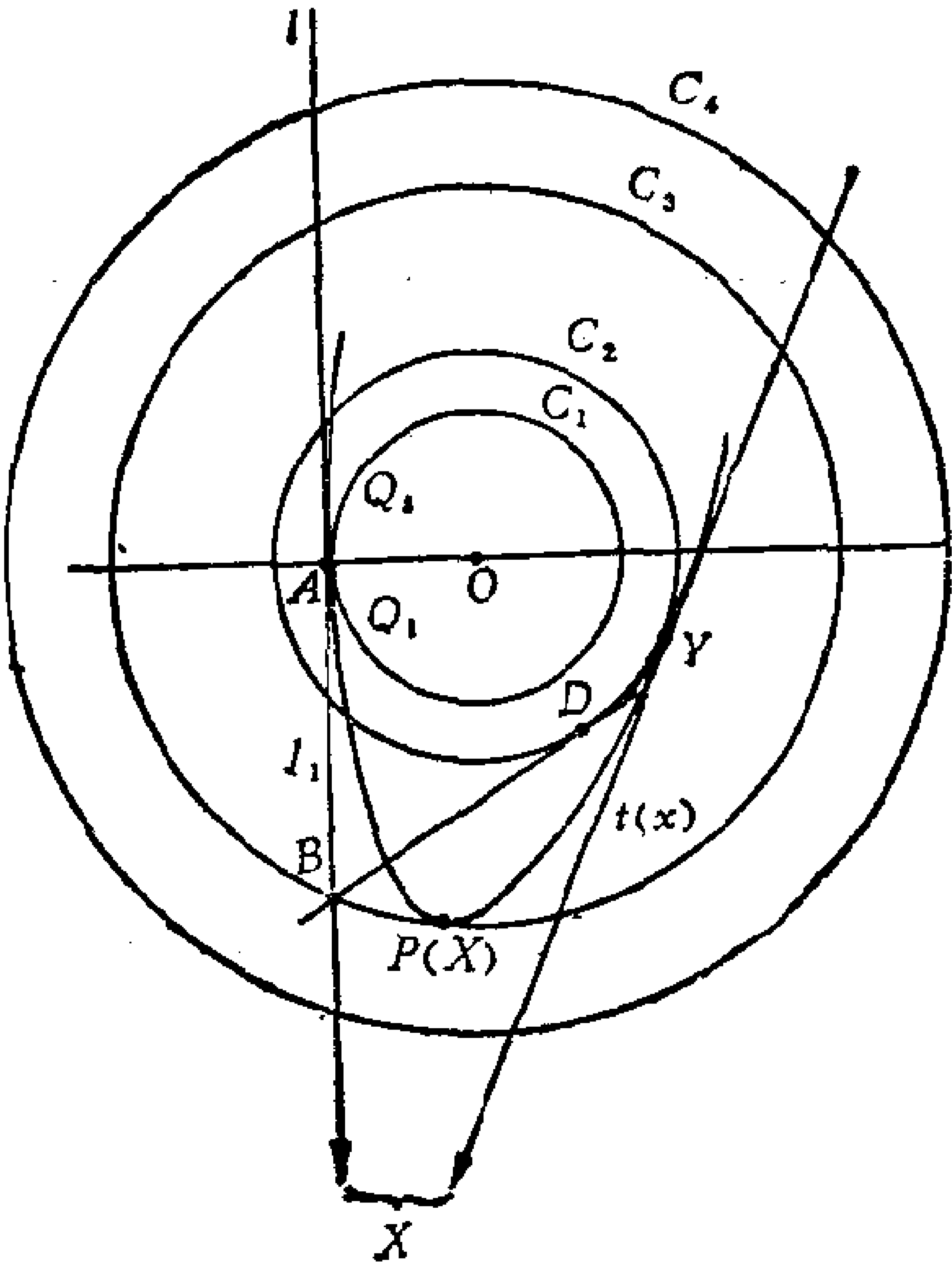


图42

B–5． 取环面的中心为原点，旋转对称轴为z轴。建立坐标系。则环面方程为

$$[\sqrt{(x^2+y^2)}-a]^2+z^2=b^2,$$

其中$a>b>0$。设Π是环面在点Q处的切平面．绕z轴旋转坐标系

使Q位于xz平面内。于是Π与xz平面的交线为一直线 $z=\lambda x$。不失一般性，可设$\lambda>0$。

过Q垂直于xz平面之直线是环面的切线，故位于 Π 内。所以Π的方程为$z=\lambda x$。

根据对称性，显然Π也是环面在另一点Q' 处的切平面。用c表示从O到Q的距离。则有$c^2+b^2=a^2$和$\lambda=b/c$。

Π与环面之交集I必定包含以下六点：在y轴上形如（$0,\pm a\pm b,0$)的四点以及Q和Q'两点。注意到集合 I对于y轴也是对称的。因此，若I由两个圆组成，则必是平面Π内以（$0,\pm b,0$)为圆心，以a为半径的两个圆（参看图44)。

第一个圆的参数方程为

$$
\begin{aligned}
y&=b+a\sin\theta,\\
x&=c\cos\theta,\qquad\qquad (1)\\
z&=b\cos\theta.
\end{aligned}
$$

事实上，因为这些值既满足$x^2+(y-b)^2+z^2=a^2$，又满足$z=\lambda x$；所以(1)表示的一条闭曲线既在球心为$(0,b,0)$，半径为a的

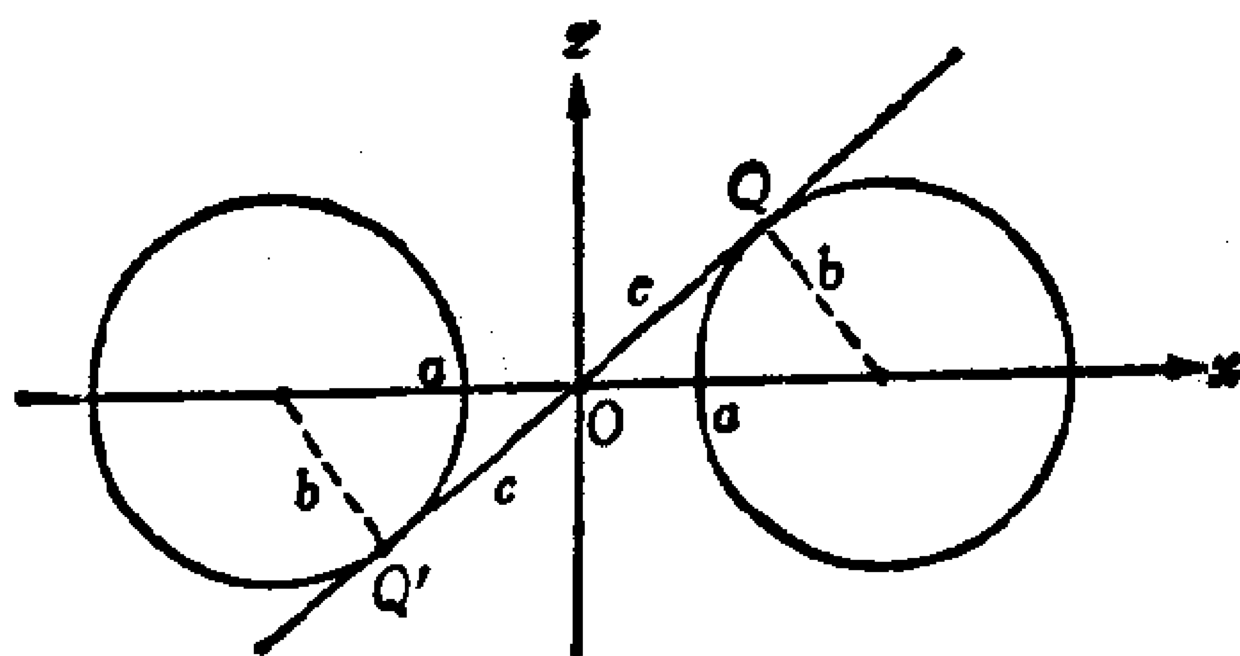


图43

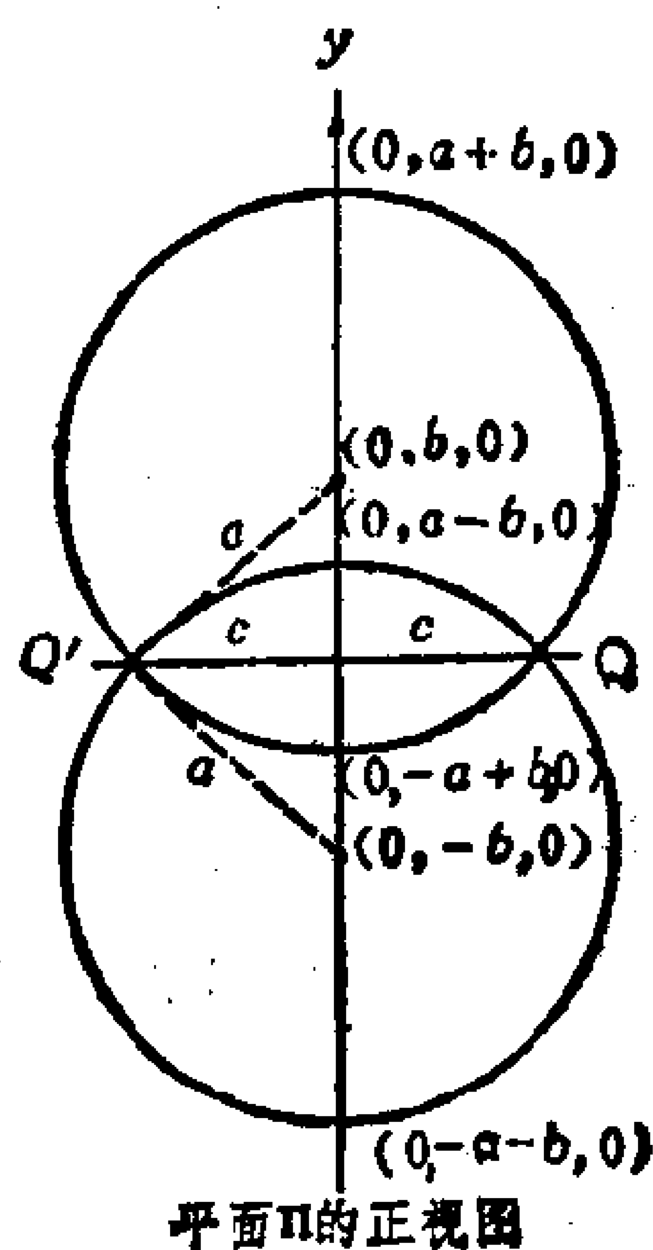


图44

球面上，又在平面$z=\lambda x$上。(将b反号，就恰得第二个圆的方程。)

其次证明这两个圆都在环面上。对于(1)上的任一点，有

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2&=c^2\cos^2\theta+b^2+2ab\sin\theta+a^2\sin^2\theta\\
&=(a^2-b^2)\cos^2\theta+b^2+2ab\sin\theta+a^2\sin^2\theta\\
&=a^2+2ab\sin\theta+b^2\sin^2\theta=(a+b\sin\theta)^2.
\end{aligned}
$$

因为$a>b$，$a+b\sin\theta>0$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=a+b\sin\theta$。故

$$[\sqrt{x^2+y^2}-a]^2+z^2=b^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=b^2,$$

这正是定义环面的方程。于是，第一个圆在环面上。同理可证明第二个圆也在环面上。

B-6。设三个根为r_1,r_2,r_3，且$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$；又设$r_2=r_1+u$，$r_3=r_2+v$，其中$u$和$v$为非负数。则有

$$a=-(r_1+r_2+r_3),\qquad b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1;$$

于是
$$
\begin{aligned}
a^2-3b&=\frac{1}{2}[(r_1-r_2)^2+(r_2-r_3)^2+(r_3-r_1)^2]\\
&=\frac{1}{2}[u^2+v^2+(u+v)^2]=(u+v)^2-uv.
\end{aligned}
$$

因为u和v为非负数，故有

$$a^2-3b\leqslant(u+v)^2.$$

因为$u+v$即是最大根与最小根之差，所以这个差至少为$(a^2-3b)^{1/2}$。

另一方面，又有

$$u^2+v^2=\frac{1}{2}[(u+v)^2+(u-v)^2]\geqslant\frac{1}{2}(u+v)^2,$$

故
$$a^2-3b\geqslant\frac{3}{4}(u+v)^2,$$

所以这个差$u+v$又至多为$(2/\sqrt{3})(a^2-3b)^{1/2}$。

B-7。令$V_4(r)$是超球面内部的超体积，即半径为r的四维球

的超体积。如果超体积可垂直于x轴"切割"，则有

$$V_4(r)=\int_{-r}^{r}V_3(\sqrt{r^2-x^2})dx,$$

其中$V_3(\rho)=(4/3)\pi\rho^3$是半径为ρ的三维球的通常体积。所以

$$V_4(r)=(4/3)\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)^{3/2}dx.$$

作代换$x=r\sin\theta$，则

$$V_4(r)=\frac{4\pi r^4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi r^4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta,$$

为简化积分，这里两次用到了倍角公式 $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$. 所以四维球的超体积为

$$V_4(r)=\frac{\pi r^4}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi^2 r^4}{2}.$$

令$A_4(r)$是半径为r的超球面的三维体积。如果我们通过考虑同心球壳来计算$V_4(r)$，则A_4与V_4可如下联系起来：

$$V_4(r)=\int_0^r A_4(\rho)d\rho.$$

因此，由微积分基本定理有$\frac{d}{dr}V_4(r)=A_4(r)$，故

$$A_4(r)=2\pi^2r^3.$$

第十二届 （1952年3月22日）

上午试题

A-1. 设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$为整系数$n$次多项式。若$a_0$，$a_n$及

$f(1)$均为奇数，证明$f(x)=0$没有有理根。

A-2. 试证方程 $(9-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(9-y^2)$

的积分曲线是一族与一个固定的正方形相切的二次曲线。

A-3. 试求保证r_1,r_2,r_3与r_1^2,r_2^2,r_3^2都是方程$x^3+ax^2+bx+c=0$的根的充要条件。

A-4. 联合国的会旗由地球的"极坐标"地图构成，以北极作为中心（极点），伸展到南纬45°。那些"平行"的纬线是同心圆，其半径分别与它们的余纬度成比例。澳大利亚挨近地图的边缘，被南纬30°线所横贯。试问在这个纬度附近，东西单位距离与南北单位距离在图上长度的比是多少？

A-5. 设$a_j(j=1,2,\cdots,n)$是完全任意的数，没有一个等于1，试证

$$a_1+\sum_{i=2}^{n}a_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j)=1-\prod_{j=1}^{n}(1-a_j).$$

A-6. 某人有一块长方形木料，尺寸为$m\times n\times r$立方英寸（m,n,r为整数）。他将表面漆上油漆，然后切成1立方英寸一个的小块，发现恰好有半数小块完全没有油漆。求证具有这种特性而实质上不同的木块的数目是有限的（不必将它们都列举出来）。

A-7. 从某个圆的圆心引出一族方向线，其角度为0，±1，±2，±3，…（从初始方向开始以弧度来量度）.设这些线交圆周于$P_0,P_1,P_{-1},P_2,P_{-2},\cdots$。试证在圆周上不存在那样的区间，它不含有上述任何一个P点（已知π是无理数）。

下午试题

B-1. 给定一个三角形的两边与夹角，有个笨人想到用余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$去求第三边a。他这样用对数：求$\log b$并二倍之；加到$\log c$的二倍上；减去2、b、c、$\cos A$的对数之和；将结果除以2；再取反对数。虽然他的做法易受怀疑，但他竟获得了正确得数。试问就三角形而论，这种做法能产生正确结果的充要条件是什么？

B-2. 试求由$\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{zx}=\dfrac{dy}{xy}$的积分曲线族与圆$y^2+z^2=1$，$x=0$相交所生成的曲面。

B-3. 找出方程

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1-x & a_2-x \\ -a_1-x & 0 & a_3-x \\ -a_2-x & -a_3-x & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad (a_i\neq 0)$$

有重根的充要条件。

B-4. 一个均匀的固体物件是由一个高为h半径为r的圆柱与一个半径为r的半球吻接而成。这物件以半球的顶点朝下放在水平桌面上，圆柱的轴处于竖直位置，因之容易摆动。我们显然直觉到若r比h大，这平衡是稳定的；而若r比h小，这平衡是不稳的。试问，要使此物件成随遇平衡，比值r/h的临界值应是多少？

B-5. 设数列$\{a_n\}$是单调的，而且$\sum\limits_1^\infty a_n$收敛，试证$\sum\limits_1^\infty n(a_n-a_{n+1})$收敛。

B-6. 试证内接于椭圆的三角形中，面积为最大的三角形

的充要条件，是它的形心与椭圆的中心重合。

B-7．给定任意实数N_0，而$N_{j+1}=\cos N_j$，证明$\lim\limits_{j\to\infty} N_j$存在并且不依赖于$N_0$。

解答

A-1．设$f(p/q)=0$，式中p与q是互素的整数，则

$$q^n f(p/q)=a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n=0. \quad (1)$$

由此推知q整除a_0而p整除a_n，所以p与q都是奇数．因此

$$a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n\equiv a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n=f(1)\equiv 1 \pmod 2,$$

这与(1)矛盾。

A-2。方程(1) 在开正方形

$$S: \ -3<x<3, \quad -3<y<3$$

内和在四个角域

$$Q_1: \ 3<x, \ 3<y$$

$$Q_2: \ x<-3, \ 3<y$$

$$Q_3: \ x<-3, \ y<-3$$

$$Q_4: \ 3<x, \ y<-3$$

内确定一个双值方向场。令U是这五个开区域的并。这方向场可以伸展到U的边界，但不包括边界线的交点$(\pm3,\pm3)$．剩下四个开的宽度为 6 的半无限条形根本没有方向场。我们首先在开区域U内讨论微分方程的解。

双值方向场U 可以分解为由微分方程

$$\frac{dy}{dx}=+\sqrt{\frac{9-y^2}{9-x^2}} \quad (2) \quad 与 \quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{9-y^2}{9-x^2}} \quad (3)$$

给出的两个通常方向场。这两个方程右边在U 上连续可微，所

以穿过U 的每一点每个方程有唯一的最大解。由于方程可分离变量，这些解显然能求出来。在S内，方程(2)化为

$$\frac{dy}{\sqrt{9-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

解得

$$\arcsin\frac{y}{3}=\arcsin\frac{x}{3}+C. \tag{4}$$

因为arcsin取$-\pi/2$到$\pi/2$之间的值，C必定在$-\pi$与π 之间。同理，在S内由方程(3)解出

$$\arcsin\frac{y}{3}=-\arcsin\frac{x}{3}+D \tag{5}$$

其中$-\pi<D<\pi$。

在各角域上(2) 成为

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-9}}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$$

解之得

$$\operatorname{arch}\frac{1}{3}|y|=\operatorname{arch}\frac{1}{3}|x|+E, \tag{6}$$

式中E 可有任意的值。解方程(3)得

$$\operatorname{arch}\frac{1}{3}|y|=-\operatorname{arch}\frac{1}{3}|x|+F. \tag{7}$$

对(4)的两边取正弦且用加法公式，就得

$$\frac{y}{3}=\frac{x}{3}\cos C+\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\sin C.$$

去根号，化简得

$$x^2+y^2-2xy\cos C=9\sin^2 C \tag{8}$$

对(5),(6),(7)作类似的变换得

$$x^2+y^2+2xy\cos D=9\sin^2 D, \tag{9}$$

$$x^2+y^2-2|xy|\operatorname{ch}E=-9\operatorname{sh}^2 E, \tag{10}$$

$$x^2+y^2+2|xy|chF=-9sh^2F. \qquad (11)$$

因$|xy|=+xy$或$-xy$穿过任意单个的角域Q_i，这些方程表明在开区域U上作为(2)与(3)的所有的解的那些积分曲线是单参数曲线族

$$x^2+y^2-2\lambda xy=9(1-\lambda^2) \qquad (12)$$

的一部分。

从我们的论证推知至少有族(12)的两条曲线穿过U的每一点。事实上恰好有两条，因为给定(x,y)，当且仅当(12)作为λ的多项式其判别式取正值时，恰好有λ的两个值满足(12)。这条件可化简为$(x^2-9)(y^2-9)>0$，当且仅当$(x,y)\in U$时此式成立。

除$\lambda=\pm1$以外，曲线族(12)是与直线$x=\pm3$及$y=\pm3$相切的圆锥曲线。后一事实是显而易见的，作为例子，若我们在(12)内令$x=3$并解出y，我们得到二重根$y=3\lambda$。当$\lambda=\pm1$时，这些圆锥曲线退化为直线$(x-y)^2=0$与$(x+y)^2=0$。若我们互换x与y或者$-x$与y，方程(12)保持原状。所以这些圆锥曲线关于直线$y=x$和$y=-x$都是对称的。当$|\lambda|<1$时，(12)的判别式为负值，所以这些曲线是位于$\overline{S}$内的椭圆（当$\lambda=0$时是圆）。当$|\lambda|>1$时，判别式为正值，故曲线为双曲线，其每个分支位于闭角域$\overline{Q_i}$之一上(参看图45)。

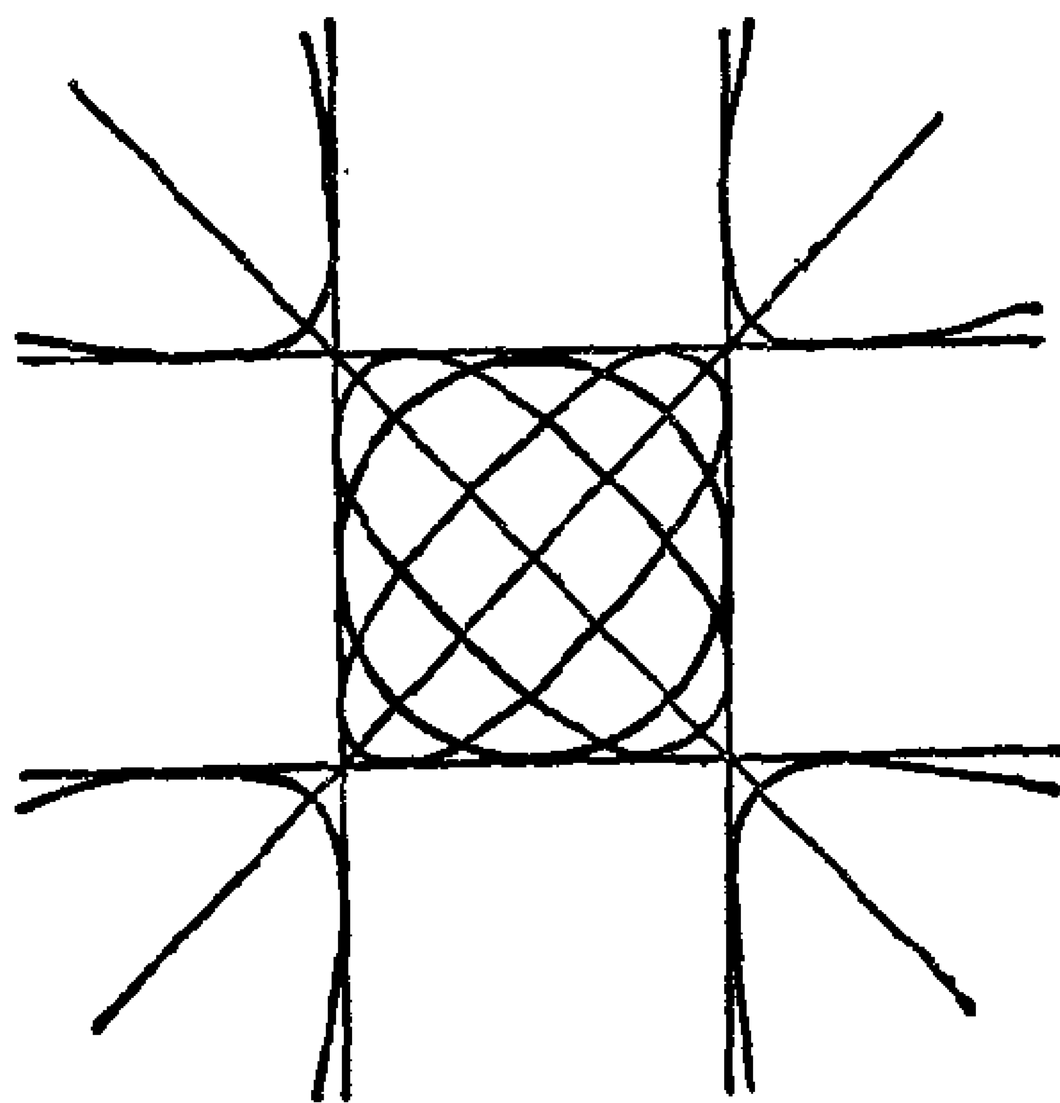


图45

族(12)自然是适合本题的圆锥曲线族。值得注意的是我们可以直接从(12)导出微分方程(1)。对(12)按隐函数求导得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-\lambda y}{y-\lambda x}.$$

所以
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(x^2+y^2-2\lambda xy)+(\lambda^2-1)y^2}{(x^2+y^2-2\lambda xy)+(\lambda^2-1)x^2}$$
$$=\frac{9(1-\lambda^2)+(\lambda^2-1)y^2}{9(1-\lambda^2)+(\lambda^2-1)x^2}=\frac{9-y^2}{9-x^2},$$

它实质上等价于(1)。

现在我们转而注意在闭域$\overline{U}$上(1)的解。因为(2)与(3)的右边不代表在$\overline{U}$上处处可微的函数，解的唯一性可能在U的边界点上被破坏。例如$y=3$与$y=\sqrt{9-x^2}$都是(1)的通过(0,3)的解。我们可以将在U内适合(1)的原解与直线$y=\pm 3$的各部分拼接起来，以得到(1)的解簇。于是

$$y=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{当}-3<x<0,\\ 3 & \text{当}0\leqslant x\leqslant 4\frac{1}{2},\\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-9)} & \text{当}4\frac{1}{2}<x,\end{cases}$$

确定一个适合于(1)的解，它的图形包括在S_1内的圆的四分之一以及在Q_1内(对应于$\lambda=3/2$)的双曲线的一部分(参看图46)。

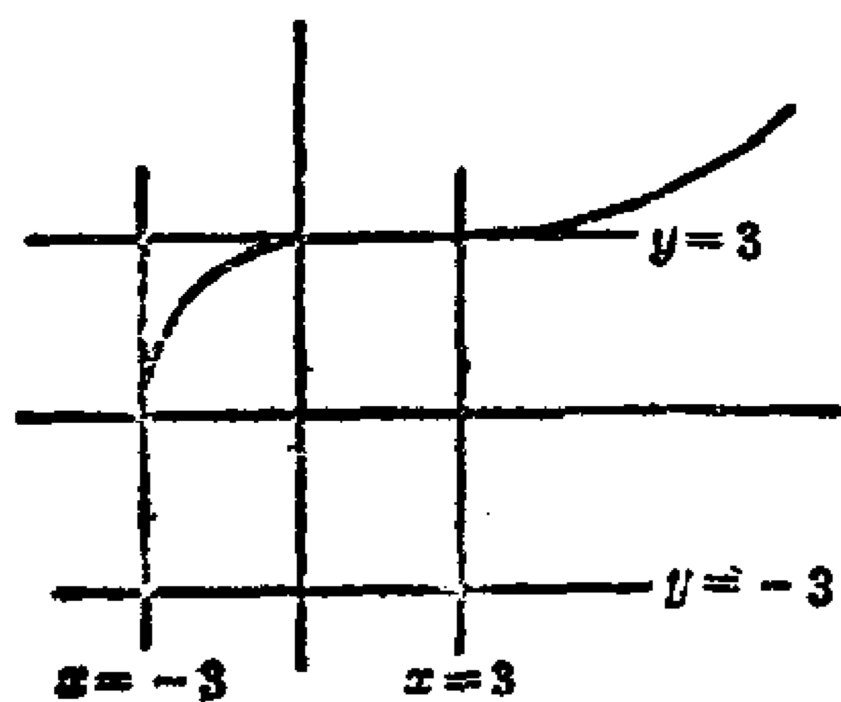


图46

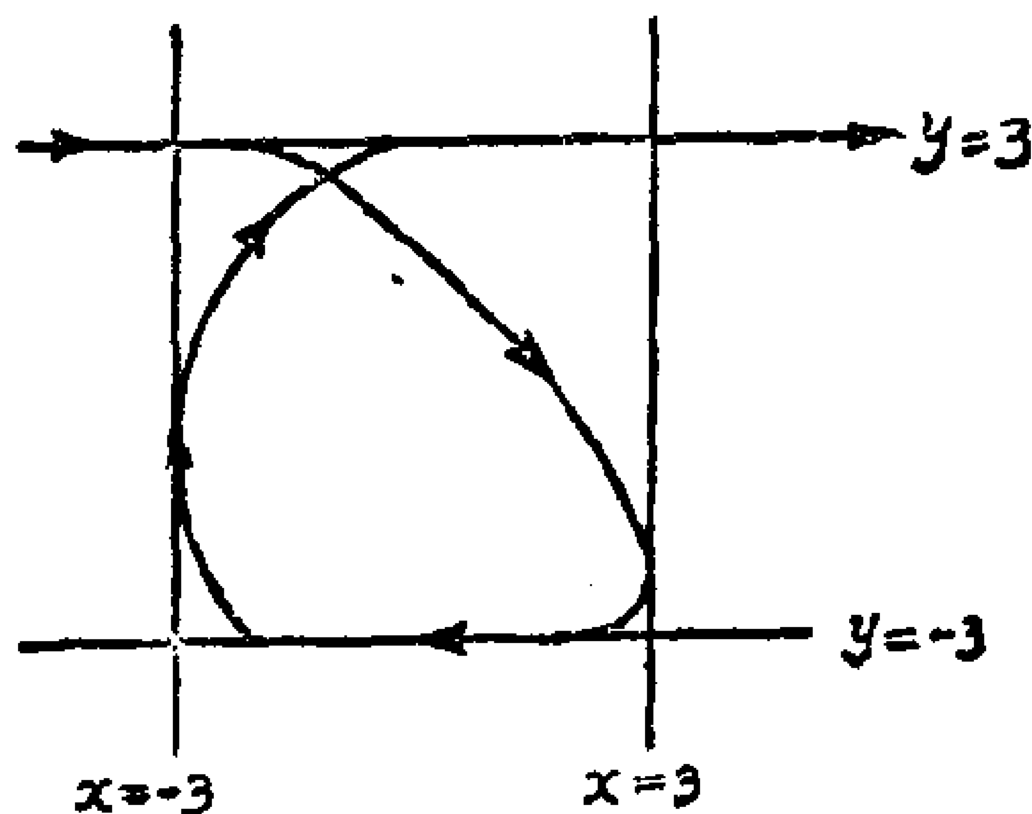


图47

若我们将(1)解释为对于平面曲线(包括可能不是这函数的

图形的曲线）的一个微分方程，则由(12)确定的任一圆锥曲线的整体是一积分曲线。在这种解释下我们也可分出竖直线 $x=\pm 3$的小段拼入得到的积分曲线，这种曲线是在$\overline{S}$内以一种复杂的方式环绕着，如图47所示的那样。

A-3. r_1,r_2,r_3都是方程的根在代数意义上即

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3).$$

然而题意究竟指r_1^2,r_2^2,r_3^2必须也是方程的全部根，或仅是根当中的一部分？就不那么清楚。例如，$x(x-1)(x+1)=0$有根$r_1=0, r_2=1, r_3=-1$；而此时$r_1^2=0, r_2^2=1, r_3^2=1$是根的一部分而不是全部根。下面我们将对每一种解释求出所有的多项式。

解释1. r_1^2,r_2^2,r_3^2是根的全部.

存在实质上不同的三种方式使得r_1,r_2,r_3与r_1^2,r_2^2,r_3^2一致，即可以排出下列三组对应关系

(i)　$r_1^2=r_1,\ r_2^2=r_2,\ r_3^2=r_3,$

(ii)　$r_1^2=r_1,\ r_2^2=r_3,\ r_3^2=r_2,$

(iii)　$r_1^2=r_2,\ r_2^2=r_3,\ r_3^2=r_1.$

从(i)得$r_i=0$或$1(i=1,2,3)$。这对应于四个多项式x^3，$x^2(x-1)$，$x(x-1)^2$，$(x-1)^3$，可依次记为f_1,f_2,f_3,f_4。

从(ii)得$r_1=0$或1，又$r_2^4=r_2$。若$r_2=0$或1，则$r_3=r_2^2=r_2$，这样得出的多项式已包含在(i)中。但还有两个新的解$r_2=w$或w^2，此处w是1的复立方根之一。这可得$x(x^2+x+1)$及$(x-1)(x^2+x+1)$，分别记为f_5,f_6。

从(iii)得$r_1^8=r_1$，即$r_1(r_1-1)(r_1^6+r_1^5+r_1^4+r_1^3+r_1^2+r_1+1)=0$。其平凡根$r_1=0$或1导出的情况已考虑过了。若令$\alpha=\exp(2\pi i/7)$，即1的七次方根，则可得$r_1=\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5,\alpha^6$。这六种情况导致两个多项式，其一有根$\alpha,\alpha^2,\alpha^4$而另一有根

$\alpha^3,\alpha^5,\alpha^6$。这两个多项式必为

$$f_7(x)=x^3+\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x^2+\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x-1,$$

$$f_8(x)=x^3+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)x^2+\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)x-1.$$

解释2. $r_1{}^2,r_2{}^2,r_3{}^2$是根的一部分.

除了已在解释1求得的解以外，还要添加下面几种情况

(iv) $r_1{}^2=r_2{}^2=r_1$, $r_3{}^2=r_3$,

(v) $r_1{}^2=r_2{}^2=r_1$, $r_3{}^2=r_2$,

(vi) $r_1{}^2=r_2{}^2=r_3$, $r_3{}^2=r_1$,

(vii) $r_1{}^2=r_2{}^2=r_3{}^2=r_1$.

关系式(iv) 仅当$r_1=1$, $r_2=-1$以及$r_3=0$或1时产生新的多项式，为$x(x^2-1)$与$(x^2-1)(x-1)$。

关系式(v) 当$r_1=1,r_2=-1$以及$r_3=\pm i$时产生新的多项式，为$(x^2-1)(x-i)$与$(x^2-1)(x+i)$。

关系式(vi)要求$r_3{}^4=r_3$。其中根$r_3=0,1$给出原先已得的多项式。根$r_3=w$, $r_1=w^2$, $r_2=\pm w^2$以及$r_3=w^2$, $r_1=w$, $r_2=\pm w$(这里w是1的复立方根之一),产生四个新的多项式.

关系式(vii)产生一种新的情况$r_1=1$, $r_2=r_3=-1$, 对应的多项式为$(x+1)^2(x-1)$。

因此在解释2的情况下所得新多项式为

$f_9=x(x^2-1)$,

$f_{10}=(x^2-1)(x-1)=(x+1)(x-1)^2$,

$f_{11}=(x^2-1)(x-i)$, $f_{12}=(x^2-1)(x+i)$,

$f_{13}=(x-w^2)(x-w^2)(x-w)=(x^2+x+1)(x-w^2)$,

$f_{14}=(x-w^2)(x+w^2)(x-w)=(x^2+x+1)(x+w^2)$,

$f_{15}=(x-w)(x-w)(x-w^2)=(x^2+x+1)(x-w)$,

$f_{16}=(x-w)(x+w)(x-w^2)=(x^2+x+1)(x+w)$,

$f_{17}=(x+1)^2(x-1)$。

A-4。令地球上具有余纬度α及经度θ的一点对应于旗帜地图上具有极坐标$k\alpha$及θ的一点，这里k是比例常数。

令地球的半径为R。在地球表面一条经线长度为πR而在完整的旗帜地图上由长为πk的线段表出。则在南北方向上一段短距离d对应于旗帜地图上的距离$d_1=kd/R$。

在地球表面南纬30°(＝余纬度$2\pi/3$）的小圆对应于旗帜地图上半径为$2\pi k/3$而周长为$4\pi^2k/3$的圆。在地球表面该圆的周长为$2\pi R\sin(2\pi/3)=\pi R\sqrt{3}$。

因而东西方向上一段短距离d对应于旗帜地图上的距离是

$$d=\frac{4\pi^2k/3}{\pi R\sqrt{3}}=\frac{4\pi kd}{3\sqrt{3}R}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}d_1。$$

所以在南纬30°附近，东西单位距离与南北单位距离在图上长度的比是$4\pi:3\sqrt{3}\approx 2.42$。

A-5。题目的结论当$n=1$(表明空的和为0）及$n=2$时是真确的。设当$n=k$时为真，即

$$a_1+\sum_{i=2}^{k}a_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)。$$

则 $$a_1+\sum_{i=2}^{k+1}a_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j)=a_1+\sum_{i=2}^{k}a_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j)+a_{k+1}$$

$$\prod_{j=1}^{k}(1-a_j)\ =1-\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)+a_{k+1}\prod_{j=1}^{k}(1-a_j)$$

$$=1-\left|\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)\right|(1-a_{k+1})\ =1-\prod_{i=1}^{k+1}(1-a_i)。$$

于是当$n=K+1$时结论亦真。根据数学归纳法推知对任何正整

数 n 都是真确的。

A-6．未沾油漆的立方块砌成尺寸为 $(m-2)\times(n-2)\times(r-2)$的长方块．因而问题的条件可表为

$$mnr=2(m-2)(n-2)(r-2),$$

即 $$\frac{1}{2}=\frac{m-2}{m}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r-2}{r}.$$

假定$m\leqslant n\leqslant r$。则

$$\left(\frac{m-2}{m}\right)^3\leqslant\frac{1}{2}<\frac{m-2}{m}.$$

故 $$\frac{1}{2}<\frac{m-2}{m}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

可得$4<m<10$。于是最小的正整数m只能取几个可能的值。

固定m，方程成为

$$\frac{m}{2(m-2)}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r-2}{r}.$$

同上述理由，有

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\leqslant\frac{m}{2(m-2)}<\frac{n-2}{n},$$

由此得

$$\frac{m}{2(m-2)}<\frac{n-2}{n}<\left(\frac{m}{2(m-2)}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}<1. \qquad (1)$$

于是对于一个固定的 m，只有有限个 n 适合．显然，对于固定的m与n，至多有一个整数r能满足方程．所以总数有限．注意，去掉有序的假定$m\leqslant n\leqslant r$之后，解的总组数至多为上面的6倍．

A-7．各点 $P_0, P_{\pm1}, P_{\pm2}, \cdots$必互异，否则$\pi$将是一有理数

（因为从$P_i=P_j$推出$j-i$是2π的整数倍。）

令I为圆周上给定的一段弧，长度为ε。选取N使得$\varepsilon>2\pi/N$。点$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{N-1}$互异，将圆分为$N$段弧，每段长度至多为$2\pi/N$。因此有指标$m$与$m+K(K>0)$使得$P_m$与$P_{m+K}$界于长为$\delta<\varepsilon$的一段弧内。设$q$是$2\pi/\delta$内最大的整数，则$P_m$，$P_{m+K}$，$P_{m+2K},\cdots,P_{m+qK}$分圆周为每段长不超过$\delta$的$q+1$段弧。因为$I$比其中任一段弧都长，它一定包含（1）的某一点。

B-1. 要使这笨人的运算程序也得到边长a的正确答案，当且仅当

$$\frac{b^2c^2}{2bc\cos A}=b^2+c^2-2bc\cos A。$$

化为
$$(b-2c\cos A)\left(b-\frac{c}{2\cos A}\right)=0。$$

故 $b=2c\cos A$ 或 $c=2b\cos A$。

条件 $b=2c\cos A$ 蕴涵D(是自B所作的高的垂足)是$\overline{AC}$的中点，从而$\angle A=\angle C$。

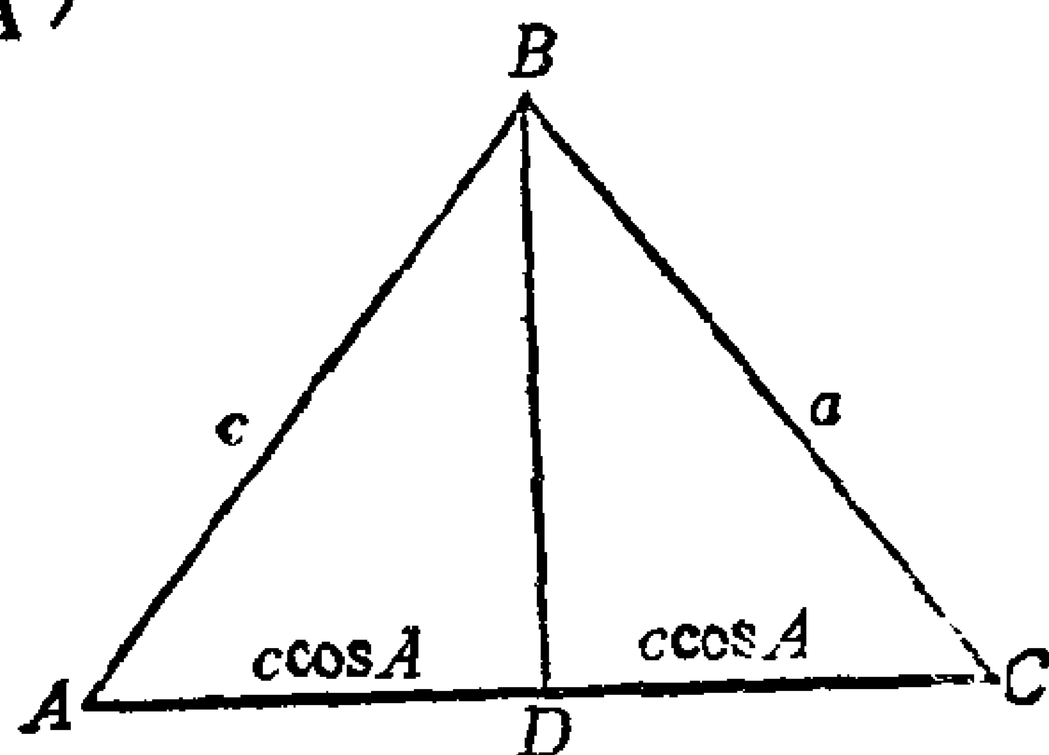


图48

反之，若$\angle A=\angle C$，则$b=2c\cos A$。

同理，条件$c=2b\cos A$等价于$\angle A=\angle B$。

所以，为了使得这笨人的运算程序导致正确的答案，其充要条件是ABC为等腰三角形其一底角为A。

B-2. 给出的微分方程组意味着在点(x,y,z)线素有方向数yz,zx,xy，而我们寻求的曲线在每一点以规定的线素作为切线。然而在坐标轴上的点没有规定线素，因为$0,0,0$不是方向数组。此外，方向场不能连续开拓到坐标轴上，因为在坐标平面上规定的线素总是垂直于平面。在空间其余部分，方程组显

然确定一族光滑的线素，因而通过定义域的每一点有唯一的最大积分曲线。我们来求这些曲线。

以 $2xyz$ 乘方程组得

$$2xdx = 2ydy = 2zdz.$$

积分，得 $x^2 = y^2 + c_1 = z^2 + c_2$. (1)

一般这组方程表示两个双曲柱面的交集，它们分成四条连通的光滑曲线，其中每一条都是这微分方程组的最大积分曲线。例如，取 $c_1 = -\alpha^2, c_2 = -\beta^2, \alpha\beta \neq 0$时，(1) 的两曲面都过点 $(0, \alpha, \beta)$ 且形如

$$y^2 = x^2 + \alpha^2, \quad z^2 = x^2 + \beta^2. \tag{2}$$

它们的交集的四条曲线由下式给出

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \alpha^2}, \quad z = \pm\sqrt{x^2 + \beta^2}. \tag{3}$$

这些曲线中的一条过 $(0, \alpha, \beta)$。若 $\alpha = 0$ 而 $\beta \neq 0$，有两条过 $(0, 0, \pm\beta)$ 的每一点. 由于这些点不在原方程组的定义域内，在这种情况下除去这些点之后，(3) 的四条曲线的每一条都分为两条最大积分曲线.

现在来求由与圆 C: $y^2 + z^2 = 1, x = 0$ 相交的积分曲线形成的曲面。显然这些解由(2)和 $\alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha\beta \neq 0$ 给出，因而它们位于曲面

$$y^2 + z^2 = 2x^2 + 1 \tag{4}$$

上。这是关于 x 轴旋转对称的单叶双曲面方程. 因 C 的四点必须从所考虑的条件下除去，我们期望这双曲面的一部分由过 C 的积分曲线来生成。事实上，若 (x, y, z) 在(2)上，因为 α^2 与 β^2 为正，则

$$y^2 > x^2, \quad z^2 > x^2. \tag{5}$$

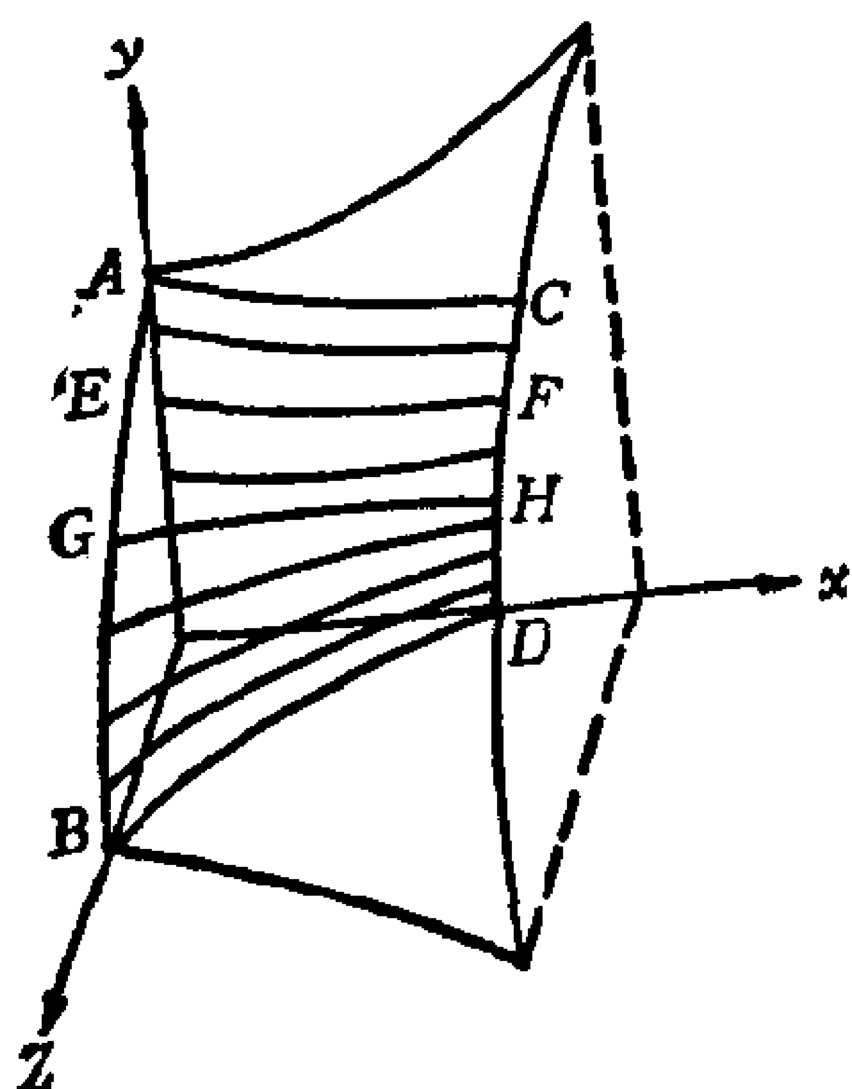
反之，若 (x, y, z) 满足(4)与(5)，则能选择正数 α 与 β 满足(2)和 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. 依赖于符号的适当选择，点 (x, y, z) 将位于交圆

C 于点$(0, \pm\alpha, \pm\beta)$之一的曲线(3)上. 所以由方程(4)及不等式(5)给出所求的曲面.

曲线 C 在各象限的四段分别生成所求曲面的一部分，这四部分以下列奇积分曲线

$y=\pm x$, $z=\pm\sqrt{x^2+1}$ 和 $y=\pm\sqrt{x^2+1}$, $z=\pm x$ 为界.

穿过图中所示象限内的 C 的积分曲线生成单叶双曲面的一部分，这部分位于两条奇积分曲线之间.



单叶双曲面: $y^2+z^2=2x^2+1$
$A(0,1,0)$与$B(0,0,1)$ 是被除去的点.
曲线AC与BD为奇积分曲线. 曲线EF, GH等为常积分曲线.

图49

B-3. 给出的行列式是

$$-2x^3+2(a_1a_2+a_2a_3-a_1a_3)x=0.$$

它有重根的充要条件是

$$a_1a_2+a_2a_3-a_1a_3=0.$$

若 $a_1a_2a_3\neq0$, 还可化为形如

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}.$$

B-4. 因为物件是均匀的，故重心与形心相同. 选定坐标系使 $z=0$ 是半球与圆柱相连部分的平面方程(此时物件竖直地放着); 桌面的方程为 $z=-r$.

由圆柱面的对称性，只要考虑垂直于桌面且过接触点的截

面就够了。若物件稍许倾斜，在相接触的点法向力 N 将通过点 O起作用。

如果物件的形心位于O之上方，则由N和重力W形成的力偶将产生一个引起倾倒的转动。如果物件的形心位于O之下方，则这力偶将产生一个可恢复的转动。所以题目相当于确定r与h的比值使得形心位于O。

由对称性我们只须考虑形心的z-坐标。圆柱的形心的z坐标是$h/2$，而质量为$\pi r^2 h$。至于半球，其质量为$(2/3)\pi r^3$，而其形心的z坐标为

$$\bar{z}=\frac{\int_{-r}^{0} z\pi(r^2-z^2)dz}{(2/3)\pi r^3}=-(3/8)r.$$

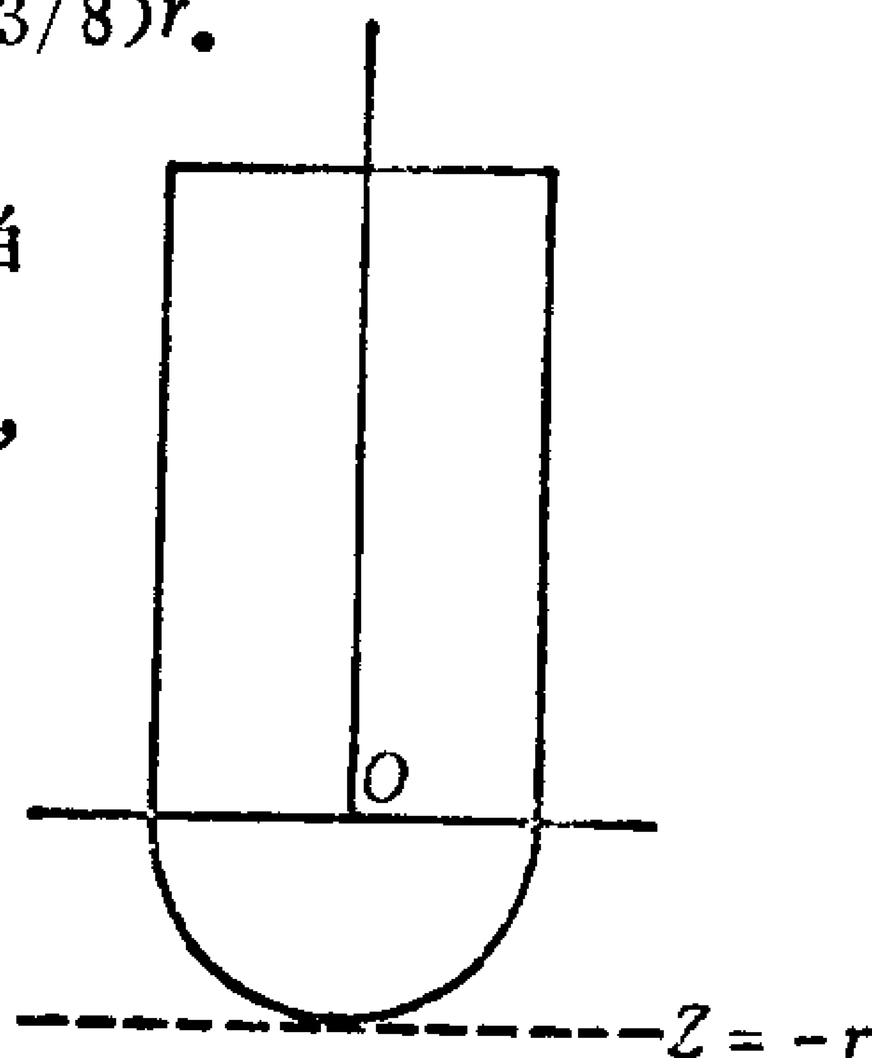


图50

所以整个物件的形心位于原点当且仅当

$$(\pi r^2 h)\frac{h}{2}-\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)\left(\frac{3r}{8}\right)=0,$$

即 $r^2=2h^2$。故 $r/h=\sqrt{2}$ 为所求的比值。这种形状的物件其重心位于支承点的正上方，无论何时这物件都静止于这半球面的任意一点处，所以是随遇平衡。

有关稳定平衡的问题还可参看第四届 A-7b 和第十届 B-4 题。

B-5。因Σa_n收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。又因数列单调，我们或者有

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0,$$

或有 $$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant 0.$$

在第二种情形我们可以改变每项的符号。于是我们只须考虑所

有的 a 非负且递降于零的情形而不失一般性。

令 $$S_K=\sum_{n=1}^{K}n(a_n-a_{n+1}).$$

则 $$S_K=a_1+a_2(2-1)+\cdots+a_K(K-(K-1))-Ka_{K+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{K}a_n-Ka_{K+1}.$$

现在因 $\sum_{1}^{\infty}a_n$ 收敛，由柯西准则推知 $\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n})=0$。但 $a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}\geqslant na_{2n}$，故 $\lim_{n\to\infty}2na_{2n}=0$，由此得 $\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=0$。

在表达式 $S_K=\sum_{n=1}^{K}a_n-Ka_{K+1}$ 中两个极限 $\lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}a_n$ 与 $\lim_{K\to\infty}(Ka_{K+1})$ 都存在，所以

$$\lim_{K\to\infty}S_K=\lim_{K\to\infty}\sum_{1}^{K}a_n-\lim_{K\to\infty}(Ka_{K+1})=\lim_{K\to\infty}\sum_{1}^{K}a_n.$$

B-6. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

作仿射变换 $u=x/a$，$v=y/b$。则 xy 平面的椭圆变成 uv 平面的圆 $u^2+v^2=1$。

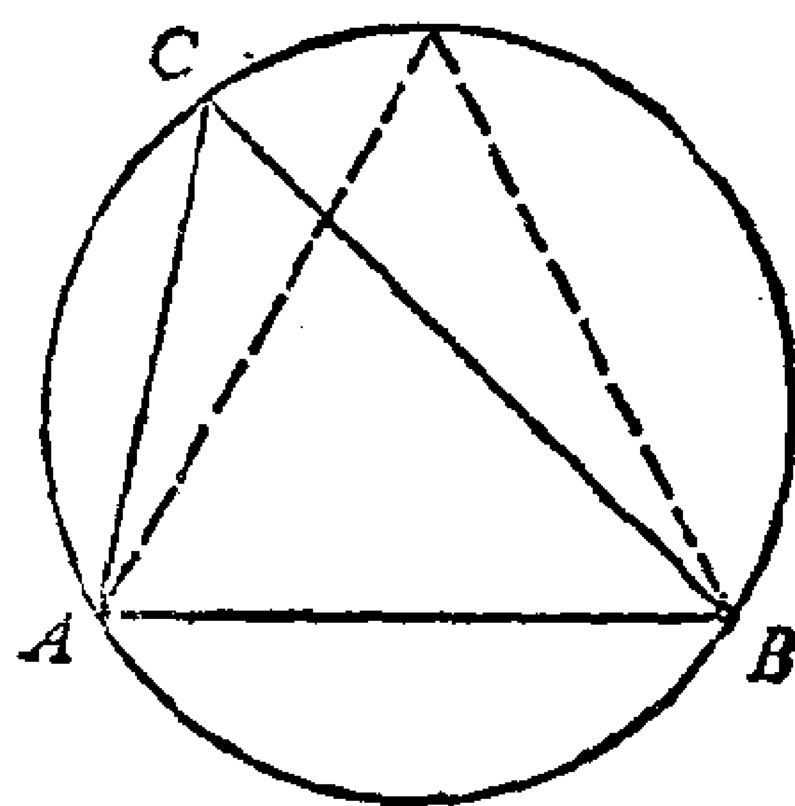


图51

在仿射变换下，内接于椭圆的三角形变为内接于圆的三角形；线段的中点变为线段的中点；三角形的形心变为三角形的形心；椭圆的中心变为圆的中心；

而所有三角形的面积都被变为乘以某个常数所得的积。所以我们只须证明：

（*） 内接于圆的三角形有最大面积的一个充要条件是它的形心与圆心重合。

现在要证的命题是圆的内接三角形当且仅当为等边时有最大面积。

事实上，从图上显见若固定圆内接三角形ABC的一边AB，则当AB上的高最大时其面积最大，而这在$AC=BC$时发生。因而如果存在一个面积最大的内接三角形，它必定是等边的。

至于最大面积的内接三角形之所以存在，是因为：圆是紧致的，而面积是顶点的连续函数。

显然一等边三角形的形心与其外接圆的中心重合。反之，若一三角形的形心与其外接圆圆心重合，则这三角形等边。这可证明如下：设形心与外接圆心共点，则三角形的每一条中线与对应边上的中垂线有两个公共点，即边的中点与形心。因为形心必为三角形的内点，故这两点不能重合，所以每条中线与中垂线重合，因而三角形是等边的。

B-7。从关于递推的图解法（在P.93阐释过）清楚可见，

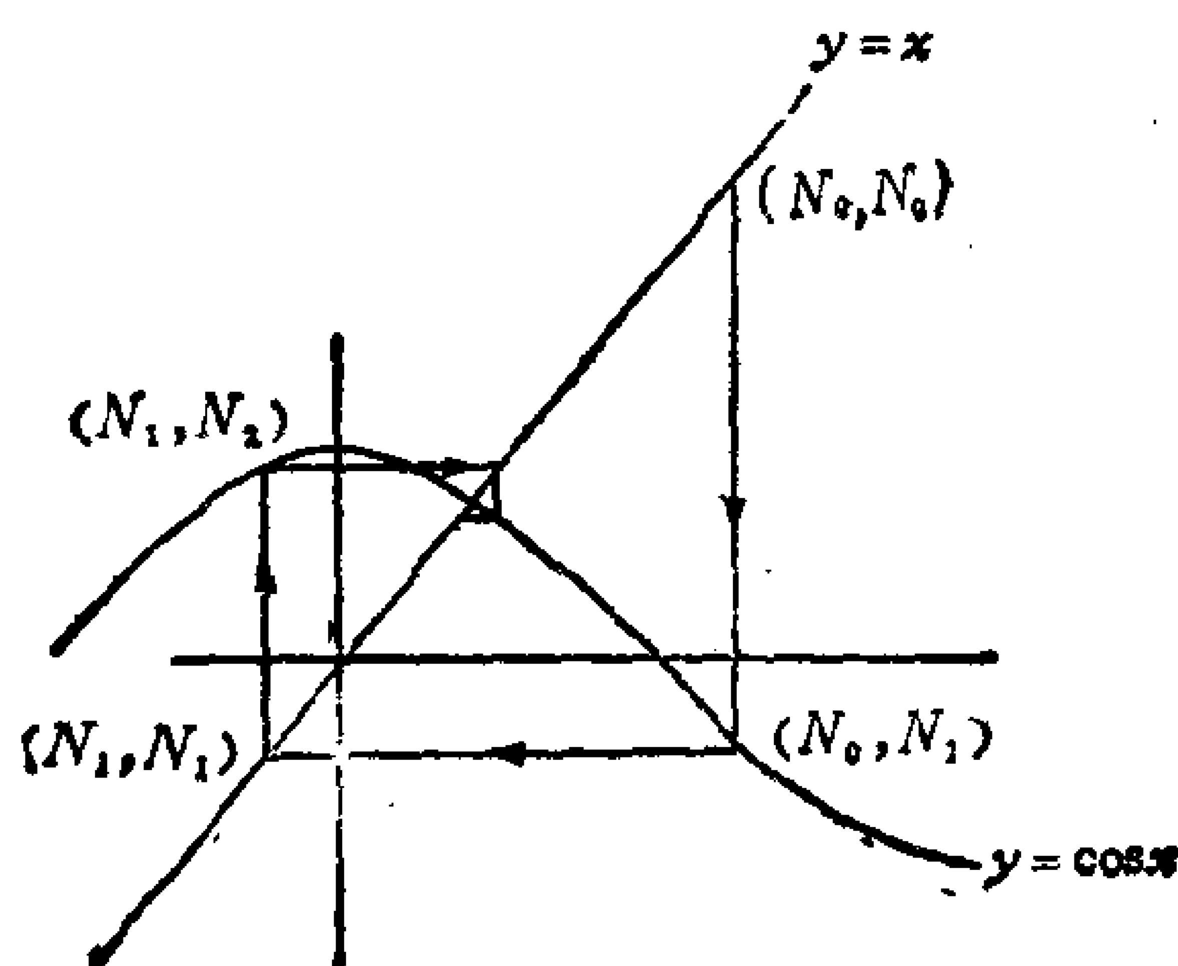


图52

对于任意所选的N_0，这数列收敛于方程 $x=\cos x$ 的唯一根。我们将这种分析形式化。

因为$f(x)=x-\cos x$定义一个严格增函数（它的导数非负仅在孤立点为零），$f(0)<0$，而 $f(1)>0$，故在$(0,1)$内存在唯一的数 ξ 使得 $f(\xi)=0$，即 $\cos\xi=\xi$。

由中值定理，对于任意的 x 存在一个 η 位于 x 与 ξ 之间使得

$$\cos x-\cos\xi=-(\sin\eta)(x-\xi).$$

若$x\in[0,1]$，则$\eta\in(0,1)$并且$|\sin\eta|<\sin 1$，所以

$$|\cos x-\cos\xi|\leqslant(\sin 1)|x-\xi|. \tag{1}$$

现在 $N_1=\cos N_0\in[-1,1]$，$N_2=\cos N_1\in[0,1]$，并且由归纳法当$j\geqslant 2$时$N_j\in[0,1]$. 所以从（1）得

$$|N_{j+1}-\xi|=|\cos N_j-\cos\xi|\leqslant(\sin 1)|N_j-\xi|$$

当$j\geqslant 2$时成立，从而

$$|N_j-\xi|\leqslant(\sin 1)^{j-2}|N_2-\xi|$$

当$j\geqslant 2$时成立. 因为$\sin 1<1$，推知 $|N_j-\xi|\to 0$，所以

$$\lim_{j\to\infty}N_j=\xi.$$

第十三届（1953年3月23日）

上午试题

A-1. 试证对于每个正整数 n，有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

A-2. 空间中六点没有三点共线，也没有四点共面. 连结

每两点所得的十五条线段中有一部分是红线，其余是蓝线。求证存在一个三角形，以六点中的某三点为顶点，而它的边是同一种颜色。

A-3. 设实数x_1, x_2, x_3其任意两数之和大于三，求证

$$\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{3} x_j^2 > \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + x_1 x_2 x_3.$$

A-4. 试从恒等式

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x dx = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x dx + \int_0^{\pi/2} \ln 2 dx,$$

推算 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$

的值。

A-5. 设从一点P能向抛物线作出三条法线。试证这三条法线的倾角之和与连结P及焦点的直线之倾角相差π的倍数。

A-6. 证明数列

$$\sqrt{7},\ \sqrt{7-\sqrt{7}},\ \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\ \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\ \cdots$$

收敛，并计算其极限值。

A-7. 假定$x^3+px^2+qx+r=0$的根都是正实数。试求p, q, r之间的一个关系式，使得该式是这些根是一个三角形的三内角的余弦值的充要条件。

下午试题

B-1. 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

收敛吗？试证明你的断语。

B-2．若$a_0,a_1,\cdots,a_n$为实数而$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$。假设对每个整数$i$，$f(i)$为整数。求证$n!a_K$对于每个$K$都是整数。

B-3．求解方程组

$$\frac{dy}{dx}=z(y+z)^n,\quad \frac{dz}{dx}=y(y+z)^n,$$

其初始条件为：当$x=0$时$y=1,z=0$。

B-4．试确定三维笛卡儿空间内一个具有如下性质的曲面方程：(a) 它通过点(1,1,1)；(b) 若在曲面上任一点P作切平面，分别与各坐标轴交于A,B,C点，则P是三角形ABC的垂心。

B-5．试证若将方程(1) $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根适当编号，则它们满足关系式

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4},$$

这里假定 $a^2d=c^2\neq 0$。

B-6．P与Q是圆(C)（其圆心为C）内满足$CP=CQ$的任意两点．试确定(C)上一点Z的位置，使$PZ+QZ$为最小。

B-7．设W为无理数，$0<W<1$。试证W有唯一的收敛的展开式：

$$W=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_0p_1}+\frac{1}{p_0p_1p_2}-\frac{1}{p_0p_1p_2p_3}+\cdots,$$

式中$p_0,p_1,p_2,\cdots$为整数且$1\leqslant p_0<p_1<p_2<\cdots$，如果$W=\frac{1}{2}\sqrt{2}$，试求$p_0,p_1,p_2$。

解 答

A-1. 对于正整数K及 $K-1\leqslant x<K$，我们有$\sqrt{K}>\sqrt{x}$，所以$\sqrt{K}>\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\,dx$。相加，则得

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\int_{0}^{n}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

因为$\sqrt{x}$的图形向下凹，由图53可清楚地看出

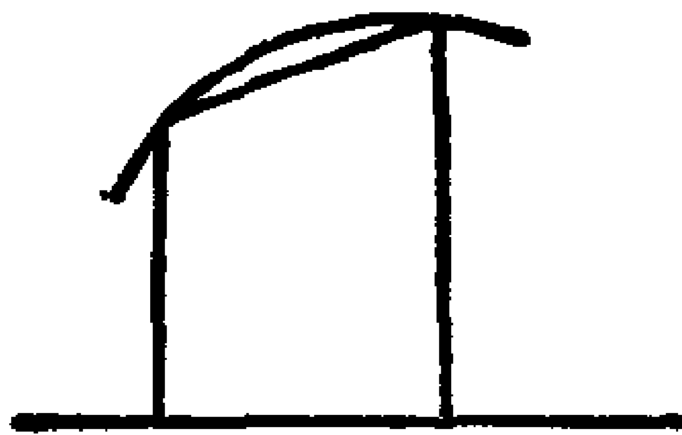


图53

$$\frac{1}{2}(\sqrt{K-1}+\sqrt{K})<\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\,dx \qquad (1)$$

(即梯形面积接近积分值而小于该值)。所以

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}=\frac{1}{2}(\sqrt{0}+\sqrt{1})$$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$<\int_{0}^{n}\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{n}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

当然，不等式（1）是可用解析方法证明的。我们要用到关于梯形法作为一个积分的近似值的误差估值定理：

设f在闭区间$[a,b]$上连续而f''在开区间(a,b)内存在。则在

(a,b)内存在一点η使得

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

$$-\frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3.$$

就本题而言，可取 $f(x)=\sqrt{x}, a=K-1, b=K$。由于$f''$在$(0,\infty)$上为负，就推得不等式（1）。

A-2。设P为六点中任一点。以P为端点的五条线段中，至少有三条（比方说PQ, PR, PS）必定有同样的颜色（如兰色）。那么，如果线段QR, RS, SQ的任一条是兰色，我们便得到一个兰色的三角形，否则QRS就是红色三角形。于是在任何情况下至少存在一个各边同色的三角形。

A-3。要证的不等式等价于

$$2(\Sigma x_i)(\Sigma x_i^2)>3\Sigma x_i^3+3x_1x_2x_3. \qquad (1)$$

置 $2a=x_2+x_3-x_1$，$2b=x_3+x_1-x_2$，$2c=x_1+x_2-x_3$。

则 $x_1=b+c$，$x_2=c+a$，$x_3=a+b$。

于是 $\Sigma x_i=2\Sigma a$

$$\Sigma x_i^2=2\Sigma a^2+2\Sigma ab$$

$$\Sigma x_i^3=2\Sigma a^3+3\Sigma a^2b$$

$$x_1x_2x_3=\Sigma a^2b+2abc$$

这里 Σa^2b 表示

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$

对于别的和式也有类似的说明。（1）的左边是

$$8(\Sigma a)(\Sigma a^2+\Sigma ab)=8(\Sigma a^3+2\Sigma a^2b+3abc) \qquad (2)$$

而（1）的右边是

$$6\Sigma a^3+12\Sigma a^2b+6abc \qquad (3)$$

因为a，b，c都是正数，显然(2)大于(3)。

A-4. 令 $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx$.

(自然，这是一个广义积分，我们现在假定它是存在的。)作替换$x=\pi/2-u$及$x=\pi-v$，得

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos u du=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin v dv.$$

所以 $\int_0^{\pi}\ln\sin v\, dv=\int_0^{\pi/2}\ln\sin v dv+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin v dv=2I.$

作替换$v=2w$ 我们又有

$$\int_0^{\pi}\ln\sin v\, dv=2\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2w dw.$$

则 $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2w\, dw=\int_0^{\pi/2}\ln 2 dw+\int_0^{\pi/2}\ln\sin w dw$

$$+\int_0^{\pi/2}\ln\cos w dw=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I.$$

故 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

为了证明上述推导的正确性，注意

当$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x\leqslant 1$，

从而 $\ln x-\ln\frac{\pi}{2}<\ln\sin x\leqslant 0.$

现在 $\int_\varepsilon^1\ln x dx=-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon.$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\ln x dx=-1.$

故推知广义积分

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/2}\ln\sin x dx$$

存在.因而上面使用的几个替换现在都能按常规证明其正确性。

A-5. 令抛物线的参数方程为 $x=at^2$, $y=2at$. 则在点 $(at^2,2at)$ 的法线方程为 $tx+y-at^3-2at=0$, 斜率为 $-t$.

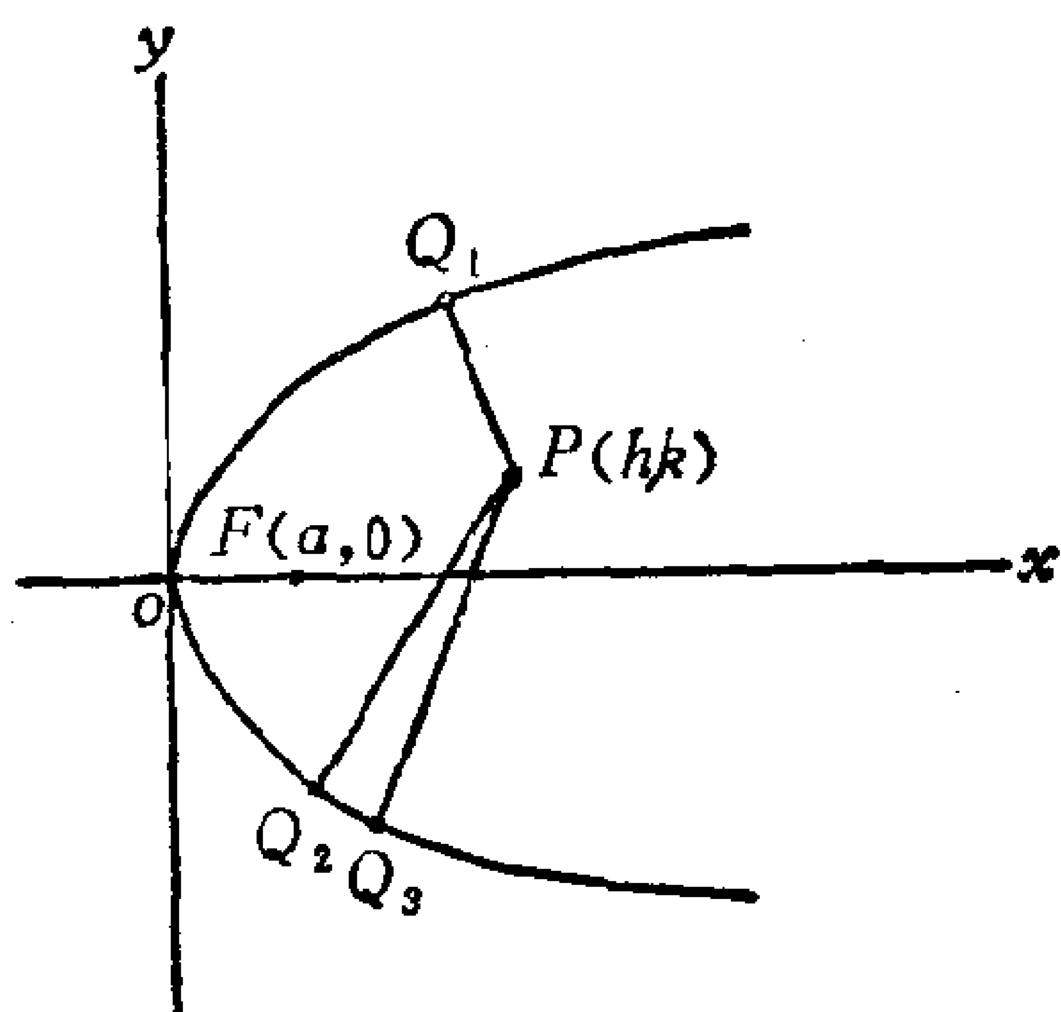


图54

现在若在点 $Q_i(at_i^2,\ 2at_i)$ $(i=1,2,3)$ 的法线过 $P(h,k)$, 则 t_i 必须是三次方程 $at^3+(2a-h)t-k=0$ 的根,因而 $t_1+t_2+t_3=0$, $t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3=(2a-h)/a$, $t_1t_2t_3=k/a$.

令 Q_iP 的倾角为 α_i 而 PF 的倾角为 β. 则对于某个整数 n, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta+n\pi$ 当且仅当 $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\operatorname{tg}\beta$. 但是

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_3}$$

$$=\frac{-(t_1+t_2+t_3)+t_1t_2t_3}{1-(t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3)}$$

$$=\frac{\frac{k}{a}}{1-\frac{2a-h}{a}}=\frac{k}{h-a}=\operatorname{tg}\beta.$$

A-6. 令 $x_0=\sqrt{7}$, $x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}$, $x_2=\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$, …. 该数列的通项由递推公式

$$x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}\quad 当 n\geqslant 0$$

给出. 故有两个形如 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的联锁递推公式, 此处

$$f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}.$$

方程的图解法(见 $P.93$) 表明对于以 f 的定义域内任意点为

起点，这递推公式收敛于2，它是f的唯一不动点。下面我们给

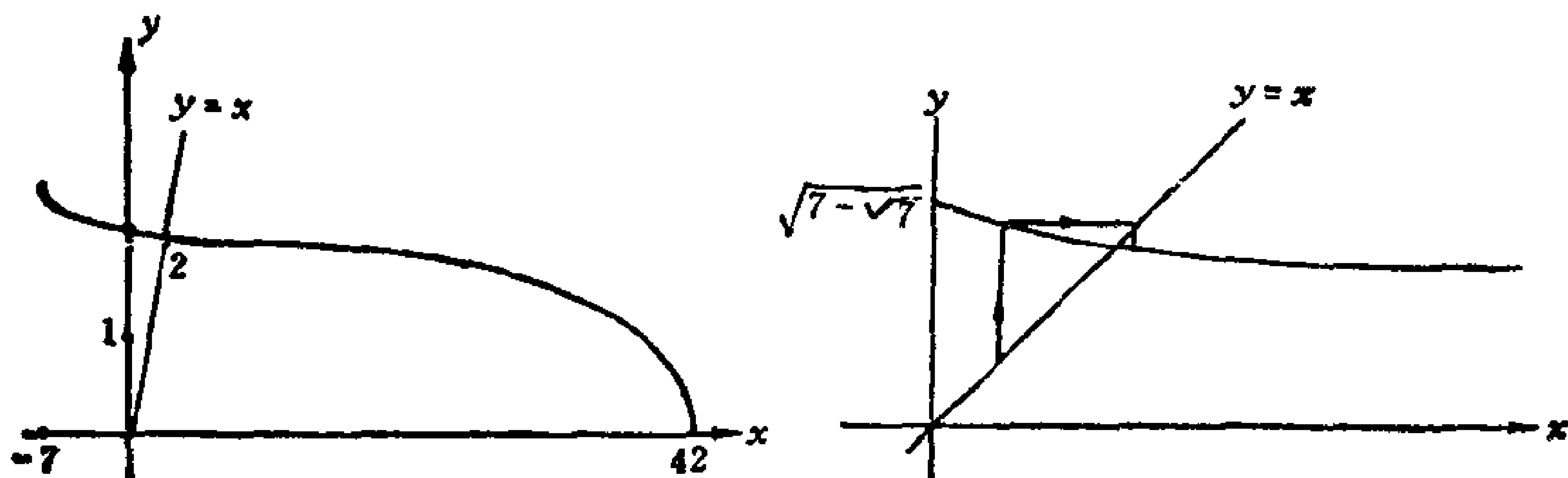


图55

予解析的证明。

由中值定理有

$$|f(x)-2|=|f(x)-f(2)|=|f'(\xi)||x-2|$$

对于2与x之间的某个ξ成立。若$0\leqslant x\leqslant 7$，则必定$0\leqslant\xi\leqslant 7$ 而且

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\sqrt{7+\xi}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{7-\sqrt{14}}\sqrt{7}}=a<1. \qquad (1)$$

所以当$0\leqslant x_n\leqslant 7$时

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant a|x_n-2|.$$

由于x_0与x_1都在这区间内，故$0\leqslant x_n\leqslant 7$对所有$n$成立，从而

$$|x_{2k}-2|\leqslant a^{2k}|x_0-2| \text{与} |x_{2k+1}-2|\leqslant a^{2k}|x_1-2|$$

对所有正整数k成立。因为$a<1$，就从这些不等式推知当$n\to\infty$时$x_n\to 2$。

A-7. 对任意三角形ABC，有

$$a=b\cos C+c\cos B,\quad b=c\cos A+a\cos C,$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

这是a,b,c的三元齐次线性方程组，因有非零解故

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$。 (1)

若方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (2)

的根是$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, 则

$$-p = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$q = \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$$

$$-r = \cos A\cos B\cos C$$

故(1)成为 $P^2 - 2q - 2r = 1$, (3)

因而这是一个必要条件。

现在设(3)成立并且(2)的根(记为x_1, x_2, x_3)都是正实数。则

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2x_3 = 1。 \quad (4)$$

从这里看出每个根位于0与1之间，故有唯一的一组锐角A, B, C使得$x_1 = \cos A$, $x_2 = \cos B$, $x_3 = \cos C$。

为了证明这些角是一三角形的内角，只要证明$A + B + C = \pi$。代入(4)得

$$\cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B。$$

将左边配成完全平方，得

$$(\cos C + \cos A\cos B)^2 = \sin^2 A\sin^2 B。$$

因这些角都是锐角，取正的平方根给出

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B,$$

从而 $\cos C = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$$= -\cos(A + B) = \cos(\pi - A - B)。$$

由于C与$\pi - A - B$都在$(0, \pi)$内，所以$C = \pi - A - B$，得所欲证。

这就是说，若(2)的根都是正实数，则(3)是这些根为某个

三角形各内角的余弦的充要条件.

B-1. 对于每个正整数n，$n<2^n$. 所以$n^{1/n}<2$，故

$$\frac{1}{n^{(n+1)/n}}>\frac{1}{2n}.$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(n+1)/n}}$发散.

B-2. 对于定义在R上的任意函数g，令Δg是由

$$\Delta g(x)=g(x+1)-g(x)$$

定义的一阶差分. 又令$\Delta^2 g=\Delta(\Delta g)$，$\Delta^3 g=\Delta(\Delta^2 g)$ 等等. 则如果f是次数$\leqslant n$的一个多项式，便有

$$f(x)=f(0)+(\Delta f(0))x+\frac{1}{2!}(\Delta^2 f(0))x(x-1)$$

$$+\frac{1}{3!}(\Delta^3 f(0))x(x-1)(x-2)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta^n f(0))x(x-1)\cdots(x-n+1). \quad (1)$$

(这是有限差分的泰勒级数. 为证明(1)的真确性，令$g(x)$表示(1)的右边. 则显然g是次数至多为n 的多项式. 并且 $\Delta^i g(0)=\Delta^i f(0), i=0,1,\cdots,n$. 又由数学归纳法推知$g(i)=f(i)$，$i=0,1,\cdots,n$. 但是两个次数至多为$n$的多项式在$n+1$ 个点相等必然恒等，故$f=g$.)

由于给定的多项式f对于自变量的整值取整值，显然$\Delta^i f(0)$是整数 ($i=0,1,2,\cdots$). 则从(1)易知$n!f(x)$是关于x的整系数多项式. 但是一个函数的多项式表达式的系数是唯一的 (如果那样的表达式存在)，故$n!a_k$是一个整数 ($k=0,1,\cdots,n$.)

B-3. 令$u=y+z$. 将两个给定的方程相加，得

$$\frac{du}{dx}=u^{n+1},\tag{1}$$

这里当$x=0$时$u=1$。

我们暂时假定$n\neq 0$。用分离变量法及初始条件得

$$u^n=\frac{1}{1-nx}\tag{2}$$

对于$-\infty<x<1/n$(当$n>0$)以及对于 $1/n<x<\infty$(当$n<0$)成立。

现在令$v=y-z$并将原来的方程相减，

$$\frac{dv}{dx}=-vu^n=\frac{-v}{1-nx},\tag{3}$$

这里当$x=0$时$v=1$。再用分离变量法及初始条件，得

$$v^n=1-nx.$$

所以
$$y=\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}[(1-nx)^{-1/n}+(1-nx)^{1/n}]\tag{4}$$

$$z=\frac{1}{2}(u-v)=\frac{1}{2}[(1-nx)^{-1/n}-(1-nx)^{1/n}]$$

对于$-\infty<x<1/n$(当$n>0$)以及对于$1/n<x<\infty$(当$n<0$)成立.

$n=0$的情况可用同法解之。在这种情况$du/dx=u$，$dv/dx=-v$，所以$u=e^x$，$v=e^{-x}$，从而

$$\begin{aligned}y&=\text{ch}x\\ z&=\text{sh}x\end{aligned}\tag{5}$$

对于所有的x成立。

若n是一个非负整数，原来的方程组在整个R^3是实解析的。然而对于n的别的值，沿着平面$y+z=0$方程组显示某种病态

(pathology)，所以解的唯一性的某些讨论是必要的．记区域 $y+z>0$ 为 S，微分方程组在 S 上是实解析的因而在 S 内的一积分曲线不能“分裂”．解(4)处于 S 内而且当 $x\to 1/n$ 时无界，推知它是这给定的微分方程满足初始条件的唯一的最大解．注意若 $-1<n<0$，则(2)不给出(1)的最大解，因为这解能被用当 $x\leqslant 1/n$ 时置 $u=0$ 的办法延拓到左边．

B-4．考虑穿过坐标轴上三个不同点 A,B,C 的任意平面 Π，且令 P 是三角形 ABC 的垂心．将这些点作为从原点发出的向量处理，用“(,)”表示两向量的内积，因坐标轴互相垂直，故 $(A,B)=(B,C)=(C,A)=0$。则垂心的性质成为

$$(P-A,B-C)=(P-B,C-A)=(P-C,A-B)=0.$$

利用内积的线性性质，得

$$(P,B-C)=(P,C-A)=(P,A-B)=0.$$

于是向量 P 正交于平面 Π。这意味着点 P 是从原点 O 向 Π 所引垂线的垂足．

在曲面上，这条件就是所有的法线通过原点。显然球面

$$x^2+y^2+z^2=3 \qquad (1)$$

具有这样的性质并且通过所需要的点(1,1,1)．

然而这种满足原来条件的曲面不能包含任一个坐标平面的点，因为由上面的分析，使得那样的点是一个顶点在各坐标轴上的三角形的垂心是不可能的．我们将证明满足这些条件的最大连通曲面是球面(1)的满足 $x>0,y>0,z>0$ 的部分．（我们只考虑连通曲面，因为没有这种限制的话，我们能随意将别的一些球的部分加起来．）在这曲面上这个条件是形如

$$xdx+ydy+zdz=\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2)$$

的微分在曲面上为零。于是我们得出结论：$x^2+y^2+z^2$ 是常数。

因这曲面要包含点(1,1,1)，故它必定是球面(1)的一部分。又因（如我们已经看到的）它不能包含坐标平面的点，故它必定完全位于第一卦限。

B-5. 兹证对于任意的具有根r_1, r_2, r_3, r_4的四次方程(1)，有

$$(r_1r_2-r_3r_4)(r_1r_3-r_4r_2)(r_1r_4-r_2r_3)=a^2d-c^2. \quad (2)$$

将左边乘出来，得

$$\sum r_1^3r_2r_3r_4-\sum r_1^2r_2^2r_3^2,$$

其中每个和号表示遍及由置换下标得到的全部不同项来求和。另一方面，因为

$$a=-\sum r_1,\quad c=-\sum r_1r_2r_3,\quad d=r_1r_2r_3r_4,$$

故有
$$a^2d-c^2=(\sum r_1^2+2\sum r_1r_2)r_1r_2r_3r_4$$
$$-(\sum r_1^2r_2^2r_3^2+2\sum r_1^2r_2^2r_3r_4)=\sum r_1^3r_2r_3r_4$$
$$-\sum r_1^2r_2^2r_3^2.$$

于是(2)得证。

给定 $a^2d=c^2$，我们知道

$$(r_1r_2-r_3r_4)(r_1r_3-r_4r_2)(r_1r_4-r_2r_3)=0,$$

所以必有一因子为零．只要重新整理根的编号，就能得到

$$r_1r_4-r_2r_3=0.$$

因$d\neq0$故没有一个根为零，从而可用r_2r_4除各项得

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4}.$$

B-6. 解法一. 设PQ的中垂线交 (C) 于 A 及 B。因 $|CP|=|CQ|$，故C位于AB上，并按$|AP|\leqslant|BP|$来标记A，B两点。

考虑当X沿着(C)变化时的函数

$$X\longmapsto|PX|+|XQ|.$$

由于对称性，它以A与B为临界点。设Z是任意别的临界点。以

P与Q为焦点而过Z的椭圆(E)必与(C)相切于Z。故(E)在Z的法线为$\overleftrightarrow{CZ}$。若P,Q与Z共线，则$\overleftrightarrow{PQ}$是(E)在Z的法线，所以C在$\overleftrightarrow{PQ}$上。假定P,Q与Z不共线，令(D)为过P，Q及Z的圆。由椭圆的反射性知$\overleftrightarrow{CZ}$平分$\angle PZQ$。它交(D)于$\widehat{PQ}$的中点，这点在$\overleftrightarrow{AB}$上。因Z不在$\overleftrightarrow{AB}$上，故$\overleftrightarrow{CZ}$与$\overleftrightarrow{AB}$相异，因而必仅交于一点，此点必为C。于是P,Q,Z,C共圆。

于是，我们可用下面的作图法来找到任何不同于A,B的临界点。作过P,Q,C的圆（或直线）。若这圆不与（C）相交或只交于点A，就没有别的临界点。然而如果这圆（或直线）交（C）于两点Z与Z'，则这些点都是临界点，因为上段的论证不难倒过去证明焦点在P与Q而过Z的椭圆是切(C)于Z和Z'。

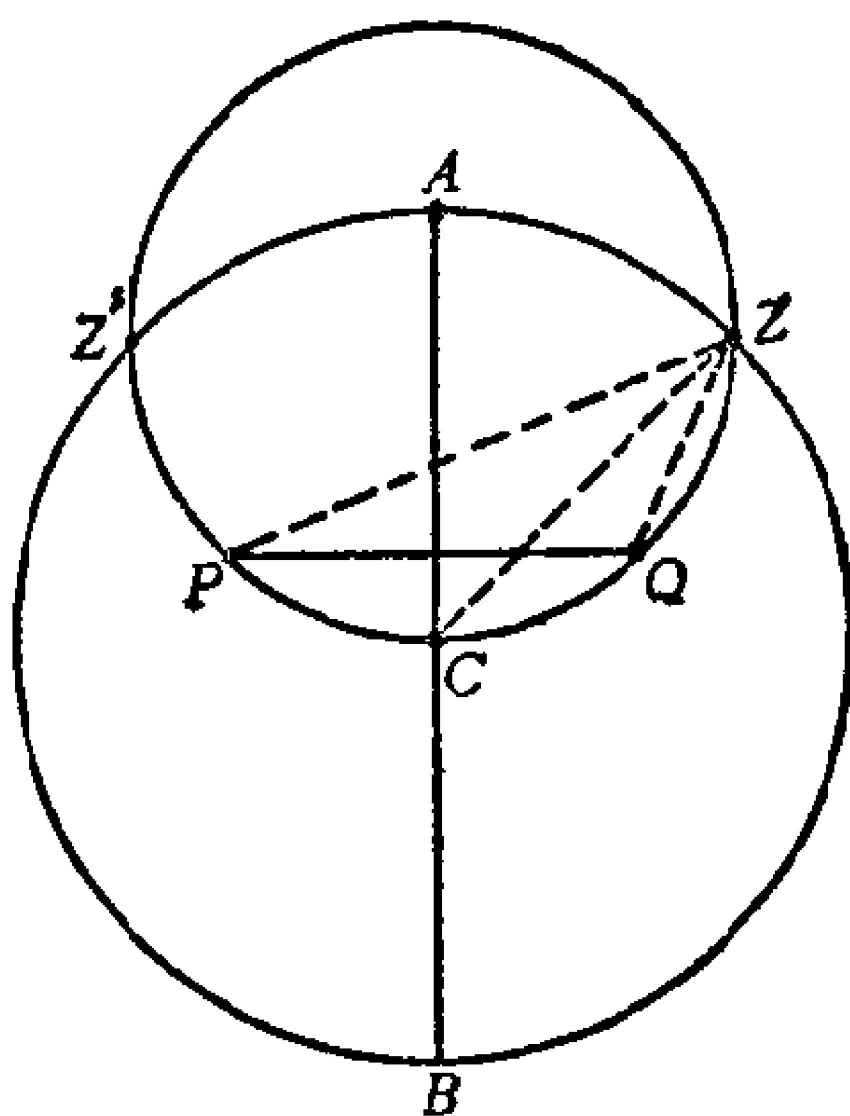


图56

剩下的任务是确定这些新的临界点的性质。我们首先指出：若一椭圆与一圆切于两个不同点，则除了切点以外这两条曲线之一完全位于另一条的内部〔这可以解析地证明：令圆方程为$x^2+y^2-a^2=0$，连结两切点的直线为$L=bx+cy-d=0$。则任意在这两点与圆相切的二次曲线为$x^2+y^2-a^2+\lambda L^2=0$。如果这二次曲线有一点在圆内，则在该点$x^2+y^2-a^2<0$，$L^2>0$，故$\lambda$必为正数。同理，如果这二次曲线有一点在圆外，则$\lambda<0$。所以，除了切点以外，整个二次曲线或者位于圆内或者位于圆外〕。在非共线的情形，椭圆(E)一定至少有一点在(C)内，即Z对$\overleftrightarrow{PQ}$的反射点，故圆在椭圆的外面从而有

$$|PB|+|BQ|>|PA|+|AQ|>|PZ|+|ZQ|.$$

在共线的情形，$|PB|+|BQ|>|PA|+|AQ|>|PZ|+|ZQ|$. 由于我们的函数在两个临界点之间必为单调，所以在上述两种情形Z都是一个极小值点。由对称性，Z'也如此。

〔用托勒米（Ptolemy）定理的现代说法，也可证实上述结论。因为$|CP|=|CQ|<|CZ|=|CZ'|$，点P和Q使C分别与Z和Z'隔开. 考虑在(C)上任一点X。根据托勒米定理：

$$|PX|\cdot|CQ|+|QX|\cdot|CP|\geqslant|CX|\cdot|PQ|$$

式中等号当且仅当P,Q,C,Z四点共圆或共线并且P和Q分隔C与X时成立，即当且仅当$X=Z$或Z'时成立。我们注意到$|CP|=|CQ|$及$|CX|=r$，r为(C)的半径，故有

$$|PX|+|QX|\geqslant r|PQ|/|CP|$$

式中等号当且仅当$X=Z$或Z'时成立。〕

总之，若过P,Q,C的圆（或可能是直线）交(C)于两点，则这两点为极小值点。若不交于两点，则极小值点必是PQ的中垂线与(C)的交点中较近的一点。

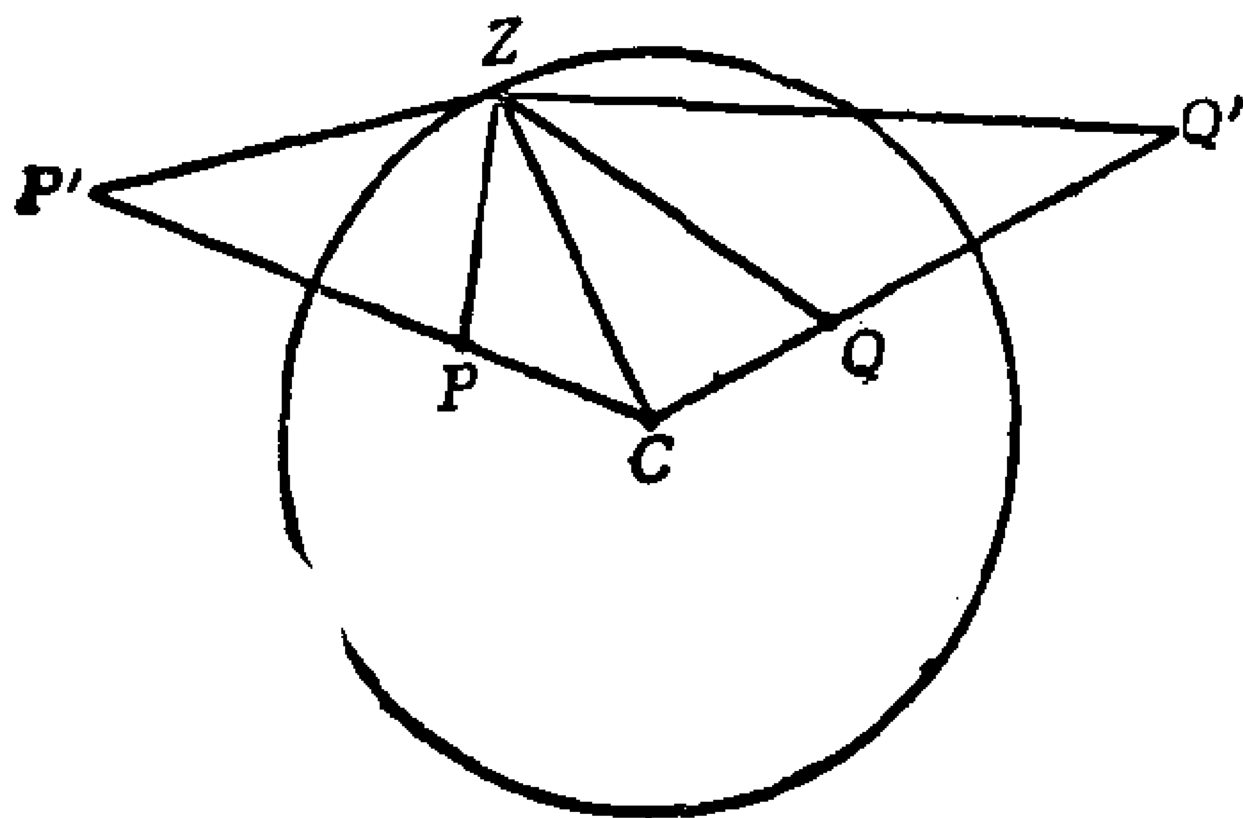


图57

解法二. 反演法使得前面的解法变得非常简洁.

设圆(C)有半径r，又设$\lambda=|PC|/r=|QC|/r$. 在$\overleftrightarrow{CP}$上选

P'且在$\overleftrightarrow{CQ}$上选Q'使得$|CP'|\cdot|CP|=|CQ'|\cdot|CQ|=r^2$（即将$P,Q$各就此圆反演.）令$Z$是$(C)$的任一点。因为$\triangle CZP'\sim\triangle CPZ$以及$\triangle CZQ'\sim\triangle CQZ$，我们有

$$\lambda=\frac{|PC|}{|ZC|}=\frac{|PZ|}{|ZP'|}=\frac{|QZ|}{|ZQ'|}=\frac{|PZ|+|QZ|}{|ZP'|+|ZQ'|}.$$

所以很清楚地看出在(C)上选择Z使得$|PZ|+|QZ|$极小与$|ZP'|+|ZQ'|$极小是一样的。但是下面问题的解是显然的：若$\overleftrightarrow{P'Q'}$与$(C)$相交，则极小值在两个（可能只一个）交点中之任何一点达到。若$\overleftrightarrow{P'Q'}$不与$(C)$相交，这极小值在$(C)$最接近于直线$\overleftrightarrow{P'Q'}$的$A$点处达到.（当如果$l$是切$(C)$于$A$的切线时，则$|AP'|+|AQ'|<|ZP'|+|ZQ'|$对于$l$的所有的别的点$Z$成立，当然对于$(C)$的所有别的点$Z$也成立。）

直线$P'Q'$是解法一中所作圆(C)的反演。

B-7。在开始构造之前我们先考察一下。

若某无理数a适合$0<a<1$，则存在唯一的整数P使得

$$\frac{1}{P+1}<a<\frac{1}{P}, \tag{1}$$

并且P是正数，$1-Pa$是无理数，$0<1-Pa<1/(P+1)$

现在归纳地定义一个 0 与 1 之间的无理数的数列w_0，w_1，$w_2\cdots$以及一个正整数列：

令$w_0=w$且设P_0为整数使得

$$\frac{1}{P_0+1}<w_0<\frac{1}{P_0}.$$

令$w_1=1-P_0w_0$（这是一个无理数，根据(1)，它位于0与1之间）又设P_1为整数使得

$$\frac{1}{P_1+1}<w_1<\frac{1}{P_1}.$$

在w_{k-1}与P_{k-1}已经如下定义

$$\frac{1}{P_{k-1}+1}<w_{k-1}<\frac{1}{P_{k-1}} \tag{2}$$

之后，令$w_k=1-P_{k-1}w_{k-1}$，这是0与1之间的无理数，且令P_k是整数使得

$$\frac{1}{P_k+1}<w_k<\frac{1}{P_k}.$$

从(1)与(2)知$w_k<\dfrac{1}{P_{k-1}+1}$

故$P_k \geqslant P_{k-1}+1$。所以这些P严格递增。现在

$$w_k=\frac{1}{P_k}-\frac{w_{k+1}}{P_k} \quad 当k=0,1,2\cdots.$$

故对于所有的k

$$w=w_0=\frac{1}{P_0}-\frac{w_1}{P_0}=\frac{1}{P_0}-\frac{1}{P_0P_1}+\frac{w_2}{P_0P_1}$$

$$=\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{P_0P_1\cdots P_n}+(-1)^{k+1}\frac{w_{k+1}}{P_0P_1\cdots P_k}. \tag{3}$$

这些P严格递增，故$P_0P_1\cdots P_k \geqslant (k+1)!$ 而且这些w有界，故(3)的最后一项当$k\to\infty$时趋于0。

所以

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{P_0P_1\cdots P_n}.$$

下面证明唯一性。设

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{q_0q_1\cdots q_n} \tag{4}$$

式中$P_0,P_1,P_2,\cdots$是正整数的一个严格递增数列。我们来证明，

若利用上述构造法，则$p_n=q_n$对所有的n成立。

因为(4)为各项绝对值严格递减的交错级数，我们有

$$\frac{1}{q_0}>w_0>\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}\geqslant\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0(q_0+1)}=\frac{1}{q_0+1}.$$

故$p_0=q_0$,而 $w_1=1-p_0w_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{q_1q_2\cdots q_n}$.

归纳地反复进行这种论证求得$p_{k-1}=q_{k-1}$而

$$w_k=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^{n-k}}{q_kq_{k+1}\cdots q_n}$$

对于$k=1,2,3,\cdots$成立。这就证明了展开式的唯一性。

如果 $w_0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$，则$p_0=1$.

$$w_1=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}，\text{故}p_1=[2+\sqrt{2}]=3,$$

$$w_2=1-3\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{1}{4+3\sqrt{2}},$$

故 $P_2=[4+3\sqrt{2}]=8$.

第十四届（1954年3月6日）

上午试题

A-1. 设n为大于1的奇数，A为$n\times n$对称矩阵，其每行每列均由整数1，2，…，n的某个排列构成。求证整数1，2，…，n必定都在A的主对角线上出现。

A-2. 在边长为 1 的正方形内任取五点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. 用d_{ij}表示点P_i与P_j之间的距离. 试证至少有一个距离$d_{ij}<\sqrt{2}/2$. 又题目中之$\sqrt{2}/2$能否用一个更小的数来取代?

A-3. 试证如果微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),\quad p(x)\cdot q(x)\neq 0$$

的积分曲线族被直线$x=K$所截，则在各交截点处的所有切线交于同一点。

A-4. 一根均匀连杆AB长为$2K$重为W，其上端A撑在一堵光滑竖直的墙上，而下端B以长为$2b$的绳子BC系着，C点固定在墙上A点的正上方. 如果这系统处于平衡状态，试确定角ABC的大小。

A-5. 设实函数$f(x)$定义于$0<x<1$，以$f(x)=o(x)$ 表示

$$\text{当}x\to 0\text{时}\quad \frac{f(x)}{x}\to 0.$$

试证下面的论断：若

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0\text{以及}f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=o(x),$$

则 $\quad f(x)=o(x)$.

A-6. 设实数列u_0, u_1, u_2, …满足

$$u_n=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{1}$$

试证若Σu_n收敛，则对于所有的k有$u_k=0$。

A-7. 证明方程

$$x^2+3xy-2y^2=122 \tag{1}$$

没有整数解。

下午试题

B–1．证明对于任何正整数a，方程$x^2-y^2=a^3$总有整数解。

B–2．如所周知，交错调和级数

$$1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+\cdots \quad (1)$$

收敛，用s表示它的和．将（1）重排如下

$$1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+1/9+1/11-1/6+\cdots (2)$$

如所知（2）也收敛，用S表示它的和．分别记（1）与（2）的前k项部分和为s_k与S_k．试证下列表达式

(i) $S_{3n}=s_{4n}+\frac{1}{2}s_{2n}$; (ii) $S\neq s$.

B–3．设a与b为适合$a<b$的实数，记号$[a,b]$表示包括端点a，b的闭区间．令$[a_1, b_1]$，…，$[a_n, b_n]$为一给定的闭区间集，其中任意两个区间都至少有一公共点．求证必存在一点，它是所有这些区间的公共点．

B–4．给定一抛物线P的焦点f与准线D以及一条直线L，试用欧氏作图（即尺规作图）找出L与P的交点，并加以证明．讨论L与P在何种情形下没有交点．

B–5．令$f(x)$为定义于$-1<x<1$的实值函数，且$f'(0)$存在，又a_n，b_n是两个数列，满足

$$-1<a_n<0<b_n<1,\ \lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

证明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

B–6．试证每一个正有理数均可由级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

$+\frac{1}{n}+\cdots$中有限多个相异项的和来表示。

B-7. 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{S=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^{n} \qquad (a>0)$$

介于e^{a}与e^{a+1}之间。

解答

A-1. 给出的集合中的每个整数在矩阵A中都出现n次。由矩阵的对称性，与主对角线平行的"斜线"都成双出现。因为n是奇数，所以每个整数必定在主对角线上至少出现一次；但主对角线上只有n个数，所以每个整数在主对角线上恰好出现一次。

A-2. 设这正方形被分成每边长为$\frac{1}{2}$的四个小正方形。将每个小正方形作为闭集考虑，五点中必有两点落在同一个小正方形内，于是该两点的距离小于$\frac{1}{2}\sqrt{2}$。原因是在以平行于正方形的边所作的坐标系上，这两点的纵、横坐标差都小于1/2.

给定$\varepsilon>0$，选取大正方形的中心作为一点，而其它四点取在对角线上且分别落入四个角落的ε范围（直角扇形）内.这五点间的最小距离大于$\frac{1}{2}\sqrt{2}-\varepsilon$。所以没有比$\frac{1}{2}\sqrt{2}$更小的数能够适合本题。

A-3. 光滑曲线$y=f(x)$在点(k, m)的切线方程是

$$y-m=f'(k)(x-k).$$

若f是给定的微分方程的一个解，则上述方程成为

$$y-m=[q(k)-mp(k)](x-k).$$

对于m的任意值，该切线都通过点

$$\left(k+\frac{1}{p(k)},\ \frac{q(k)}{p(k)}\right).$$

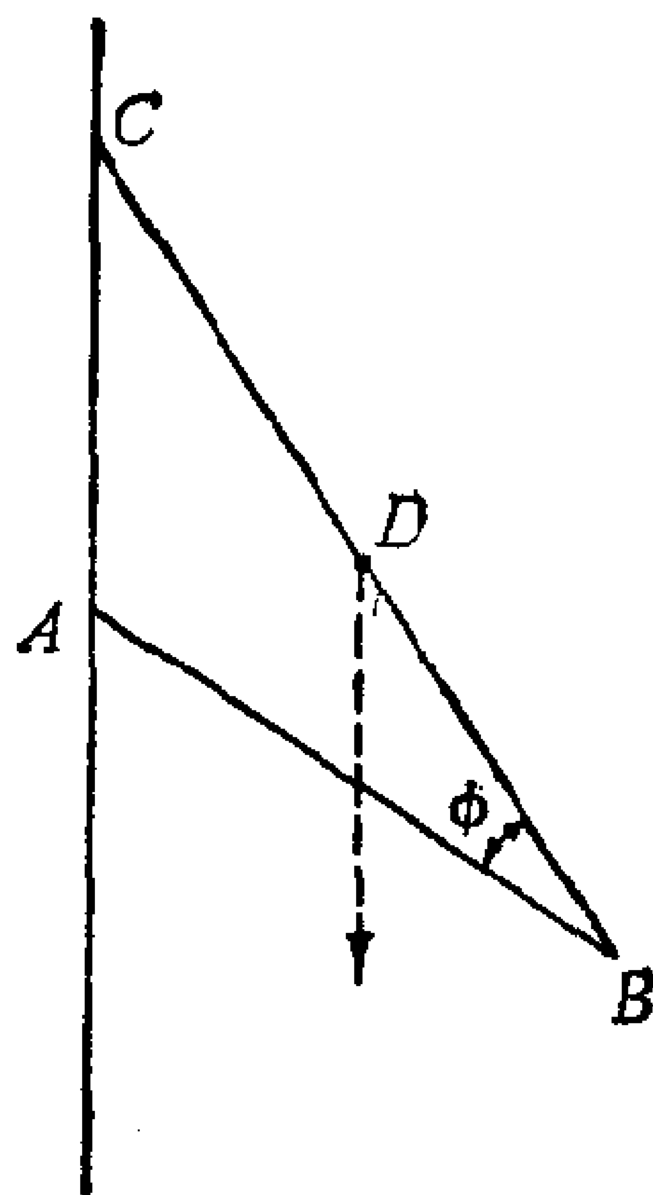


图58

A-4. 若连杆及绳子都竖直，即B点也在墙上从而$\angle ABC=0$，则此系统显然处于平衡状态。

假定连杆在某个非竖直位置也处于平衡状态，如图58所示。令D为BC的中点，绳子的张力与连杆的重力都作用于D点（后者竖直地通过连杆的中点）。故由平衡性知墙的反作用力也必定通过D。因为墙是光滑的，故这力垂直于墙壁。所以得AD垂直于AC从而

$$|AC|^2+|AD|^2=|CD|^2=b^2.$$

由余弦定理得

$$|AC|^2=4k^2+4b^2-8bk\cos\phi$$

$$|AD|^2=4k^2+b^2-4bk\cos\phi.$$

所以 $$\cos\phi=\frac{2k^2+b^2}{3bk}=\frac{2}{3}\frac{k}{b}+\frac{1}{3}\frac{b}{k}.$$

于是 $$\angle ABC=\arccos\left(\frac{2}{3}\frac{k}{b}+\frac{1}{3}\frac{b}{k}\right). \qquad (1)$$

因为$\angle ADB$与$\angle CAB$为钝角，必有$b<2k<2b$。又因为当$\frac{1}{2}<x<1$时有$2x/3+1/3x<1$，故当$1/2<k/b<1$时方程（1）确定唯一的锐角。这样，除了B在墙上以及这个锐角这两种情

况以外，再没有别的平衡位置．

A-5. 给定$\varepsilon>0$，选取δ使得对于所有满足$0<x<\delta$的x有

$$\left|\frac{1}{x}[f(x)-f(x/2)]\right|<\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1}$$

现在固定y，$0<y<\delta$．则

$$f(y)=\left[f(y)-f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+\left[f\left(\frac{y}{2}\right)-f\left(\frac{y}{4}\right)\right]+\cdots$$

$$+\left[f\left(\frac{y}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right]+f\left(\frac{y}{2^n}\right).$$

所以
$$\left|f(y)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{y}{2^{i-1}}\right)-f\left(\frac{y}{2^i}\right)\right|+\left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{y}{2^i}\varepsilon+\left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right|=y\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right|,$$

此处用到（1）．令$n\to\infty$有

$$|f(y)|\leqslant\varepsilon y,$$

因为当$x\to 0$时$f(x)\to 0$．

于是我们证明了：对于所有$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得当$0<y<\delta$时有$|f(y)/y|\leqslant\varepsilon$．由定义，这就是

$$f(x)=o(x).$$

A-6. 从（1）显见项u_n非增且非负．于是，若某项为零，则它的后继项都如此，用（1）由归纳法，则它前面的项也都如此．

假设$\sum u_n$收敛．选P使得$\sum\limits_{n>P}u_n<1$．则从（1），

$$u_p=\sum_{n>p}u_n^2\leqslant\sum_{n>p}u_pu_n=u_p\sum_{n>p}u_n\leqslant u_p,$$

最后一步的等号仅当$u_p=0$时成立．但是，注意最左边和最右

边，则必须全部取等号。于是$u_p=0$从而所有的u都为零。

A-7. 将（1）乘以4并配成完全平方，得

$$(2x+3y)^2-17y^2=488. \qquad (2)$$

若（1）有一整数解，则（2）也有整数解，故得

$$u^2\equiv 488 \pmod{17}. \qquad (3)$$

但是（3）没有解，因为488不是17的一个二次剩余。证实这点的最直接的方法是检验$u=0, 1, \cdots, 8$时的可能性（我们不需考虑$u=9, \cdots, 16$因为$u^2\equiv(17-u)^2$。）我们可交替地用互转律及勒让德符号来计算，得

$$(488/17)=(12/17)=(2/17)^2(3/17)=(3/17)$$
$$=(17/3)=(2/3)=-1,$$

所以488不是17的二次剩余。

〔关于二次互转律及勒让德符号，可参看例如华罗庚：《数论导引》第三章。 ——译者.〕

B-1. 令$x+y=a^2$，$x-y=a$. 则$x^2-y^2=a^3$，而$x=\frac{1}{2}(a^2+a)$，$y=\frac{1}{2}(a^2-a)$. 由于a^2与a同为偶数或奇数，故x与y同为整数，从而对于每个整数a存在一解。

B-2. (i) 我们有

$$S_{4n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n},$$

$$\frac{1}{2}S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots-\frac{1}{4n}.$$

相加，得$S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}$

$$+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}=S_{3n}.$$

(ii) 因为（1）是一个交错级数，其项递减于零，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 存在。并且 $s>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故$s\neq 0$。所以

$$S=\lim_{n\to\infty} S_{3n}=\frac{3}{2}s\neq s.$$

附注。如所周知，$s=\ln 2$。

B-3. 当且仅当$c\leqslant f$及$e\leqslant d$时两个区间$[c,d]$与$[e,f]$交叠。因为这些给定的区间中的任何两个都会交叠，我们有

$$a_n\leqslant b_p \tag{1}$$

对于所有的n和所有的p成立。所以$\{a_n\}$囿于上（且非空），故可令ξ是$\{a_n\}$的上确界。由于（1）表明每个b_p是$\{a_n\}$的一个上界，故对所有的p有$\xi\leqslant b_p$，然而$a_p\leqslant\xi$因为ξ是$\{a_n\}$的一个上界。于是对于每个p有$\xi\in[a_p, b_p]$。

B-4. 回忆一下p是到f及D等距的点的轨迹。

首先假定L既不平行又不垂直于D，则交D于一点O。为方便起见，选择坐标系使得O是原点，D是x轴，f在上半平面，L是第一象限的一条射线其方向角为α，$0<\alpha<\pi/2$。令β是$\overrightarrow{of}$的方向角，则$0<\beta<\pi$。

设L与P交于点q。以q为中心而经过f的圆周C就会与D相切于正半轴的某一点。因为$\overrightarrow{of}$与C相交，故$\beta\leqslant 2\alpha$（参看图59）。于是若$\beta>2\alpha$则没有交点。

现在设$\beta\leqslant 2\alpha$。在这种情形我们将作出$P\cap L$的一点，事实上若$\beta<2\alpha$则有两点。在L上选取任一点q'位于第一象限并引以q'为中心的圆C'与D相切。因为$\beta\leqslant 2\alpha$ 这射线$\overrightarrow{of}$交C'于一点f'（若$\beta<2\alpha$，则两个交点都可选为f'。）如果平面从O点按比值$|of|:|of'|$伸展（或收缩），则f'被映射到f，q'在L上被映射到q，而C'被映射为中心是q过f点且与D相切的圆C。但这蕴涵

q到f与D等距，故$q \in L \cap P$。q的欧氏作图得以实现。

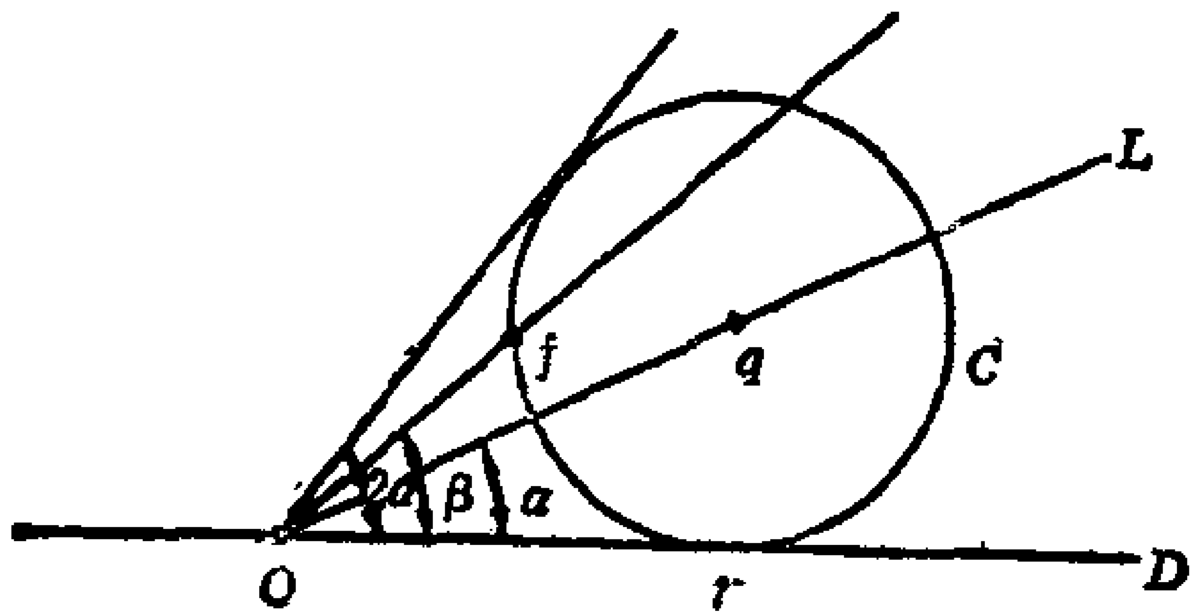


图59

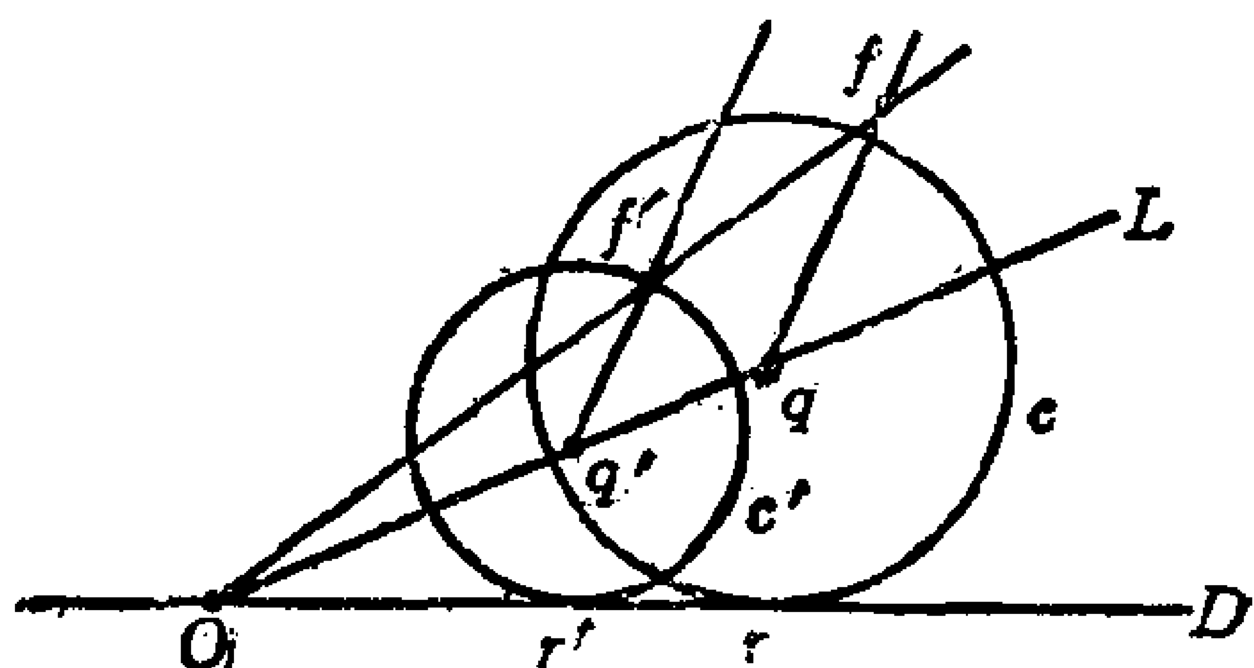


图60

如果$f \notin L$，则q是L与平行于$\overleftrightarrow{q'f'}$且过$f$的直线的交点（参看图60）。如果$f \in L$，需要稍许改变作法。例如，设$r'$是$C'$与$D$的切点，则引$\overleftrightarrow{fr}$平行于$\overleftrightarrow{f'r'}$交$D$于$r$，那么$q$为$L$与一条在$r$点垂直于$D$的直线的交点。

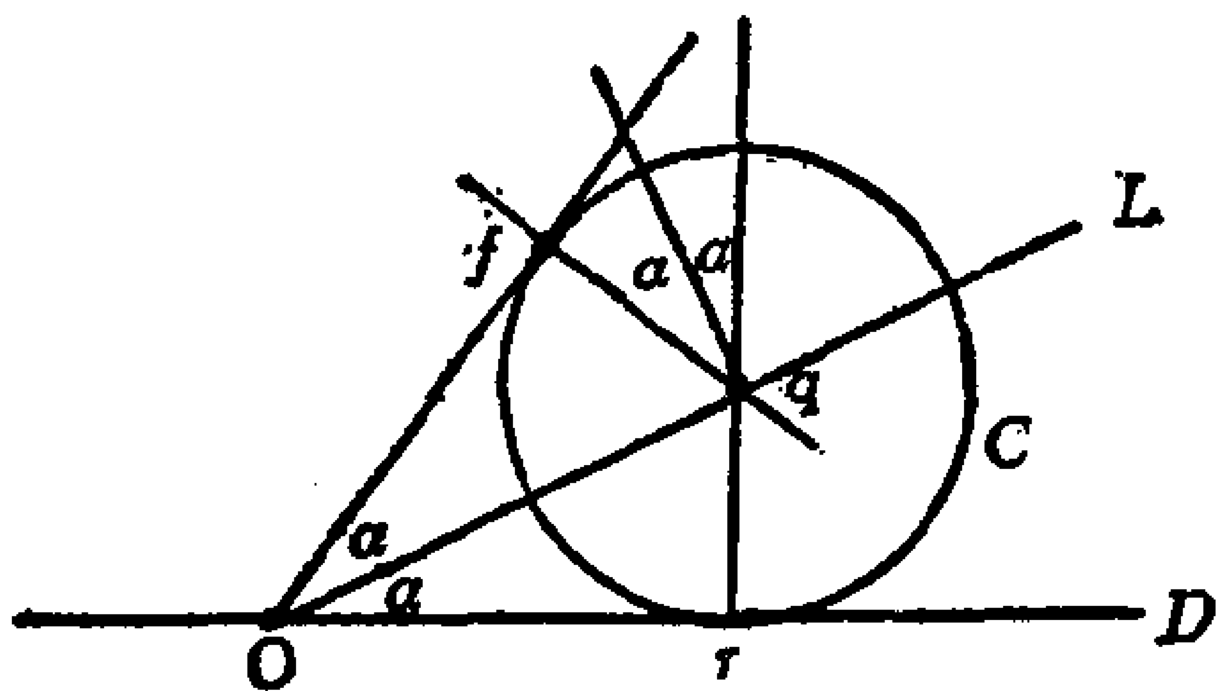


图61

在$\beta < 2\alpha$的情形，对f'有两种选法从而导致$L \cap P$的两个不同点。若$\beta = 2\alpha$，则仅可求得$L \cap P$的一点。在上文第三段对题

目的分析指出$L\cap P$的每点必可由我们的作法而获得，故在这种情形$L\cap P$只一点从而L与P相切。（此外，图61表明在q点所作L的法线平分$\overleftrightarrow{qf}$与在q的竖直射线的夹角。这是抛物线著名的反射性质。）

现在考虑上面未谈到的情况。如果L在O点垂直于D，则L必与P恰有一个交点（这是先前情形的极限情况，$\alpha=\pi/2$，故当然$\beta<2\alpha$）。作法与前面所述一样，但是虽然$\overrightarrow{of}$交C'两次，但交点之一为O从而没有$L\cap P$的第二点。如果$f\in L$，这时也按上面作法就会失败。在这种情况下所求的交点是of的中点。

末了，设L平行（或重合）于D。记其方程为$y=a$，且令b是f的y坐标（我们仍然假定D是x轴且$b>0$）。则可想出一个类似于先前的作法（即任作一个圆心在L上且与D相切的圆，然后沿着L将它作相似变换，如果可能使新的圆通过f，其圆心就是$L\cap P$的点。）但是作一个中心在f半径等于从L到D的距离的圆更容易些。这时显然$E\cap L=L\cap P$。不难看出$L\cap P$含有0，1或2个点，分别按$b>2a$，$b=2a$，或$b<2a$而定。应当注意，这些情形分别是条件$\beta>2\alpha$，$\beta=2\alpha$，$\beta<2\alpha$当L是直线$\overleftrightarrow{OS}$（其中S是上半平面的固定点）沿着D的左射线让$O\to\infty$时的极限形式。

B-5. 给定$\varepsilon>0$，则能选取δ，$0<\delta<1$，使得对于所有适合$0<|x|<\delta$的x，有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon.$$

选取k，使对于所有$n\geqslant k$有

$$|a_n|<\delta \text{和} |b_n|<\delta.$$

则对于$m\geqslant k$有

$$\left|\frac{f(a_m)-f(0)}{a_m}-f'(0)\right|<\varepsilon,\left|\frac{f(b_m)-f(0)}{b_m}\right.$$

$$-f'(0)\Big| < \varepsilon. \qquad (1)$$

但 $\quad |f(b_m)-f(a_m)-(b_m-a_m)f'(0)|$

$$= |(f(b_m)-f(0)-b_m f'(0))-(f(a_m)-f(0)$$
$$-a_m f'(0))| \leqslant |f(b_m)-f(0)-b_m f'(0)|+|f(a_m)$$
$$-f(0)-a_m f'(0)| \leqslant \varepsilon|b_m|+\varepsilon|a_m|=\varepsilon(b_m-a_m).$$

式中倒数第二步是从（1）推出而最后一步从$a_m<0<b_m$推知。

所以 $$\left|\frac{f(b_m)-f(a_m)}{b_m-a_m}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

对于所有的$m>k$成立。既然这对于任意的$\varepsilon>0$是真确的，我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

B-6。首先考虑有理数r，$0\leqslant r<1$。我们来证明r能表为此调和级数的有限个相异项的 和（若 $r=0$ 则为“零个相异项的和”。）

当$r=0$时结论显然为真。若$r=p/q$，（此处p与q是正整数，）则$p=1$时这结论也真。我们作归纳假设当$p<P$时对于所有有理数p/q（<1）可表为所要求的表达式。现在考虑一个有理数$r=P/q<1$。令m是适合$1/m\leqslant P/q$的最小正整数。则由于 $P/q<1$，$m\geqslant 2$，因而

$$\frac{1}{m}\leqslant\frac{P}{q}<\frac{1}{m-1}.$$

故 $mP-P<q\leqslant mP$，$0\leqslant mP-q<P$。令$R=(P/q)-(1/m)$。则$R=(mP-q)/qm$，从而根据我们的归纳假设R是可由调和级数的有限个相异项来表达的。由于

$$R<\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}=\frac{1}{m(m-1)}\leqslant\frac{1}{m},$$

可见用在R的展开式中的项都不能是$1/m$。所以$r=P/q=R+1/m$能表为调和级数的有限个相异项的和。于是具有分子P而小于1的有理数也可表为所要求的表达式。那么由归纳法推知所有小于1的有理数都可表为所要求的表达式。现在假定有理数$r\geq 1$。令S_n为调和级数的前n项和。显然S_n是有理数。由于$n\to\infty$时$S_n\to\infty$，存在一个整数$n\geq 1$使得$S_n\leq r<S_{n+1}$。则$r-S_n$是一个有理数，并且

$$r-S_n<S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}<1. \tag{1}$$

故$r'=r-S_n$能表为调和级数的有限个相异项的和。由(1)，这些项没有一项能在集合$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\right\}$之内。所以$r$是调和级数的前$n$项再配上那些用来表示$r'=r-S_n$的有限个相异项的总和。并且所有这些项都是相异的。

B–7. 可用

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq e^x \tag{1}$$

来计算所求的极限值。上式当$n>0$且$1+x/n>0$时成立。同时

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x \tag{2}$$

对于所有实数x成立。

令 $$S_n=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^n=\sum_{r=0}^{n-1}\left(1+\frac{a-r}{n}\right)^n.$$

由$a>0$及(1)，得

$$S_n\leq\sum_{r=0}^{n-1}\exp(a-r)<\sum_{r=0}^{\infty}\exp(a-r)=\frac{e^{a+1}}{e-1}.$$

所以 $$\limsup_{n\to\infty} S_n \leqslant \frac{e^{a+1}}{e-1}. \quad (3)$$

又，对于固定的k以及$n>k$

$$S_n \geqslant \sum_{r=0}^{k}\left(1+\frac{a-r}{n}\right)^n.$$

由(2)，当$n\to\infty$时右边的极限存在，故

$$\liminf_{n\to\infty} S_n \geqslant \sum_{r=0}^{k}\exp(a-r).$$

由于k是任意的，我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} S_n \geqslant \sum_{r=0}^{\infty}\exp(a-r)=\frac{e^{a+1}}{e-1}. \quad (4)$$

比较（3）与（4），得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{a+1}}{e-1}.$$

显然 $1<\frac{e}{e-1}<e$，故$e^a<\lim\limits_{n\to\infty} S_n<e^{a+1}$。

第十五届（1955年3月5日）

上午试题

A-1. 试证除了0，0，0以外，没有其它整数m，n，p使得$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$。

A-2. $A_1A_2\cdots A_n$是半径为r中心为O之圆的一内接正多边形，P是OA_1延长线上的一点. 试证

$$\prod_{i=1}^{n}\overline{PA_i}=\overline{OP}^n-r^n .$$

A-3. 设 P 表示正项递减收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$（这里 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots$）的一切（有限或无穷）子级数的和数的集合. 求证当且仅当对于每个整数 n 都有

$$x_n\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i, \qquad (1)$$

则 P 是一个区间。

A-4. 在一圆周上选取 n 点，用弦将它们两两连结起来. 假定这些弦除了在端点外，任何三条弦均不共点，试问它们有多少个交点？

A-5. 试用尺规作图法求出平面上一已知抛物线的焦点。

A-6. 试找出使得方程

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0 \qquad (1)$$

有一个有理根的充要条件（此条件指正整数 n 的值）.

A-7. 研究由微分方程

$$f''(x)=(x^3+ax)f(x)$$

及初始条件 $f(0)=1$，$f'(0)=0$ 定义的函数 f. 求证 f 的根有上界而无下界。

下午试题

B-1. 一球沿着两条相交直线滚动，求其中心的轨迹。

B-2. 设函数 f 具有二阶连续导数且 $f(0)=0$. 试证由 $g(0)=f'(0)$，$g(x)=f(x)/x$ $(x\neq0)$ 所定义的函数 g 有一阶连续导数。

B-3. 证明不存在把一球冠映为平面之保距（distance-preserving）映射（在球冠上的距离是沿球面的大圆来度量的）。

B-4. 是否存在1,000,000个连续整数其每一个都含有一个二重的素因子？

B-5. 给定一个由0与1组成的无穷序列和一个固定整数K，设序列中含有K个相邻项的那种K-数组中，彼此形式相异的不多于K组。求证这序列最终必为周期序列。（例如，序列11011010101…中省略未写的项全由0与1交替出现，则该序列就是从第五项开始的周期序列。）

B-6. 证明：若对于所有x有$f(x)>0$且当$x\to\infty$时$f(x)\to 0$，则方程

$$f(m)+f(n)+f(p)=1 \tag{1}$$

至多存在数目有限的正整数解m,n,p。

B-7. 一个物体在四个力作用下处于平衡状态。试证若四个力的作用线互相偏斜，则它们必是一个双曲面的母线。

解答

A-1. (1) 若a为正整数而$\sqrt{a}$不为整数，则$\sqrt{a}$为无理数。这可用反证法证明，从略。

$$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0 \tag{2}$$

而m,n,p均为整数，若n与p都为零，则m也为零。若n与p恰有一个为零，则不是$\sqrt{2}=-m/n$就是$\sqrt{3}=-m/p$，两者均与(1)矛盾。若n与p都不为零，则

$$m^2=(n\sqrt{2}+p\sqrt{3})^2=2n^2+3p^2+2np\sqrt{6},$$

于是 $\sqrt{6}=(m^2-2n^2-3p^2)/2np.$

又与(1)矛盾。故只有$m=0$，$n=0$，$p=0$能使(2)成立。

A-2. 不妨假定这多边形在复平面上，圆心在原点而A_1在正实轴上。则其它顶点是$r\omega, r\omega^2, \cdots, r\omega^{n-1}$这里$\omega$是1的$n$次原根。

设P在点x，则$\overline{PA_i} = |x - r\omega^{i-1}|$，故

$$\prod_{i=1}^{n} \overline{PA_i} = \left|\prod_{i=1}^{n}(x - r\omega^{i-1})\right| = r^n\left|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{r} - \omega^{i-1}\right)\right|$$

$$= r^n\left|\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1\right| = |x^n - r^n| = x^n - r^n$$

$$= \overline{OP^n} - r^n.$$

上面第三步用到因式分解

$$X^n - 1 = \prod_{i=1}^{n}(X - \omega^{i-1}).$$

A-3. 用N表示正整数集合，J是N的子集合。记$S(J)$为$\sum_{i\in J} x_i$。题目要求证明当且仅当(1)成立时S的值域是一个区间。

设(1)对于一个给定的数列不真。令p是使得

$$x_p > \sum_{i>p} x_i$$

的某个下标。选取α使得 $\sum_{i>p} x_i < \alpha < x_p$，则不存在$J$满足 $S(J) = \alpha$。这是因为若$J \cap \{1, 2, \cdots, p\} \neq \phi$，则由那些$x$的单调性有$S(J) \geqslant x_p$，然而若$J \cap \{1, 2, \cdots, p\} = \phi$，则$S(J) \leqslant \sum_{i>p} x_i$。既然$\sum_{i>p} x_i$与$x_p$都在值域$(S)$内，我们看到$(S)$不是一个区间。必要性证毕。

现在设(1)成立且$0 < y < S(N)$。我们将构造一个集合L使得$S(L) = y$。我们归纳地定义一个数列$n_1, n_2, n_3, \cdots$如下：令n_1是

满足$x_{n_1}<y$的最小下标(由于$x_k\to 0$，这样的下标是存在的)假定已选得$n_1,n_2,\cdots,n_k$适合

$$x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}<y,$$

令n_{k+1}是大于n_k的最小下标使得

$$x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}+x_{n_{k+1}}<y.$$

(我们再次声明，这样的下标是存在的。)

令$L=\{n_1,n_2,\cdots\}$。显然

$$S(L)\leqslant y. \tag{2}$$

如果$p\in N-L$,则存在一个最小足标(用“足标”是提醒读者注意与前面“下标”所指对象有别)k使得$n_k>p$.在选定n_k时我们排除了p,故

$$x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_{k-1}}+x_p\geqslant y, \tag{3}$$

从而 $$S(L)+x_p\geqslant y. \tag{4}$$

我们把尚待证的部分分为两种情况.

情况1. 集合$N-L$为有限。注意$N-L\neq\phi$，因为否则$S(L)=S(N)>y$，这与(2)矛盾。所以$N-L$有一个最大的元素，能作为(4)内的p，则

$$L=\{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}\}\cup\{p+1,p+2,\cdots\}.$$

综合(1)与(3)有

$$S(L)=x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_{k-1}}+\sum_{i>p}x_i\geqslant y$$

连同(2)就证得 $S(L)=y$.

情况2. 集合$N-L$为无限。则对于任意的$\varepsilon>0$，我们可取$p\in N-L$使得$x_p<\varepsilon$。则由(4)引出$y\leqslant S(L)+\varepsilon$。由于$\varepsilon$是任意的，得$y\leqslant S(L)$。这样仍有$S(L)=y$.

因为$S(\phi)=0$，推知值域$(S)=[0,S(N)]$。所以(1)是保证

值域(S)是一个区间的充要条件.

A-4. 圆周上任意四点恰好确定在圆内相交于一点的一对弦. 又由题设推知这些交点各不相同, 所以圆内共有$\binom{n}{4}$个交点.

A-5. 分析: 考虑位于平行直线族$\mathscr{F}$上的(抛物线的)一族弦,如所周知这些弦的中点落在平行于抛物线轴的一条直线上,这种直线称为抛物线的直径.一条直径与抛物线只交于一点,记为P, 则族$\mathscr{F}$中过P点的那条直线与抛物线相切. 由抛物线的焦点性质, 过P的直径经在P的切线的镜面反射线必过焦点. 故得

作法: 引抛物线的任一弦又作另一弦平行于它, 求这两弦的中点A,B,作$\overleftrightarrow{AB}$交抛物线于P. 引$\overleftrightarrow{PQ}$平行于原来的弦且求C使得$\angle APQ=\angle QPC$, 这里C与A位于$\overleftrightarrow{PQ}$两旁,焦点必在$\overleftrightarrow{PC}$上. 从不同于上述方向的另一弦开始, 重复这种作法, 又得另一条过焦点的直线. 若与前一直线不同, 则它们的交点就是焦点. 为了避免这两条过焦点的直线重合, 务必使两条初始弦既不平行又不垂直. 因为若两条初始弦成角度α,则作成的两直线就有2α的交角, 所以, 只要$\alpha\neq 0$, $\pi/2$, 这两条直线就不重合.

A-6. 当n为偶数时没有实根,因为左边各项非负且不能同时为零.

当$n=1$, 有唯一的实根$x=-4$.

设n为不小于3的奇数, 展开括号合并同类项,得非负整系数的多项式. 首项系数为1,常数项为2^{n+1}. 则只可能有-2^i形式的根. 若$x=-1$, 则左边三项全为奇数,不适合; 若$x=-2$, 有 $(-2)^n+0+4^n\neq 0$, 也不适合; 若置$x=-2^{p+1}$,$p\geqslant 1$,则(1)的左边为

$$2^n[-2^{pn}+(1-2^p)^n+(1+2^p)^n]$$

$$=2^n\left[-2^{pn}+2\left\{1+\binom{n}{2}2^{2p}+\binom{n}{4}2^{4p}+\cdots\right\}\right].$$

方括号内的表达式$\equiv 2 \pmod 4$，（我们已假定$n\geqslant 3$）故-2^{p+1}不是方程的根（当$p\geqslant 1$）。

总之，当且仅当$n=1$时(1)有一个有理根。

A-7. 先证f的根有上界。令α是使当$x\geqslant\alpha$时有$x^3+ax>0$的一个数。我们来证明，除了零解以外，微分方程

$$y''-(x^3+ax)y=0 \tag{1}$$

的解在$[\alpha,\infty)$内的根不多于一个。用反证法。设g是(1)的非零解且对于$\alpha\leqslant x_1<x_2$有$g(x_1)=g(x_2)=0$。则g在$[x_1,x_2]$上不是处处为零，必要时改变g的符号，不妨假定g在$[x_1,x_2]$的某处为正。设g在$[x_1,x_2]$内的x_3上取得极大值，则由极值判别法有$g(x_3)>0$，$g'(x_3)=0$，$g''(x_3)\leqslant 0$。但是

$$g''(x_3)=(x_3^3+ax_3)g(x_3)>0$$

因为$x_3\geqslant\alpha$。这矛盾说明(1)的一个非零解(特殊地是f)在$[\alpha,\infty)$内至多有一根。所以f的根有上界。

次证f的根无下界。令β是使当$x\leqslant\beta$时有$x^3+ax<-1$的一个数。我们来证明，对于任意选取的$x_0\leqslant\beta$，(1)的每个根都有一根在$(-\infty,x_0]$内。用反证法。设结论非真，则有一解h在$(-\infty,x_0]$上不变号，必要时可改变h的符号，不妨假定h在此区间为正。对于任取的$x_1\leqslant x_0$由推广的中值定理有

$$h(x)=h(x_1)+(x-x_1)h'(x_1)+\frac{1}{2}(x-x_1)^2h''(\xi), \tag{2}$$

式中ξ在x与x_1之间。则若$x\leqslant x_0$，有$\xi<x_0$及$h''(\xi)=(\xi^3+a\xi)h(\xi)<0$，从而

$$h(x)<h(x_1)+(x-x_1)h'(x_1).$$

如果我们能选取x_1使得$h'(x_1)>0$,上式表明对于绝对值大的负

数x有$h(x)<0$，与我们的假定矛盾．故对于所有的$x\leqslant x_0$有$h'(x)\leqslant 0$。但是由这推出当$x\leqslant x_0$时有$h(x)\geqslant h(x_0)$。又因$h''(\xi)=(\xi^2+a\xi)h(\xi)<-h(x_0)$，则由(2)得

$$h(x)<h(x_1)+(x-x_1)h'(x_1)-\frac{1}{2}(x-x_1)^2h(x_0).$$

然而这表明对于绝对值充分大的负数x,$h(x)$为负．这个矛盾说明(1)的每个解(特殊地是f)有绝对值任意大的负根。

B–1．取坐标系使得给出的两条直线位于xy平面而x轴平分它们的一夹角．则两直线的法线式方程分别是

$$x\sin\theta-y\cos\theta=0 \quad 与 \quad x\sin\theta+y\cos\theta=0,$$

式中$0<\theta<\pi/2$。

从点(x,y,z)到两直线的距离的平方分别是$z^2+(x\sin\theta-y\cos\theta)^2$和$z^2+(x\sin\theta+y\cos\theta)^2$。球心必定在到两直线距离都为$r$的地方，故所求轨迹由两个方程

$$z^2+(x\sin\theta-y\cos\theta)^2=r^2$$

$$z^2+(x\sin\theta+y\cos\theta)^2=r^2$$

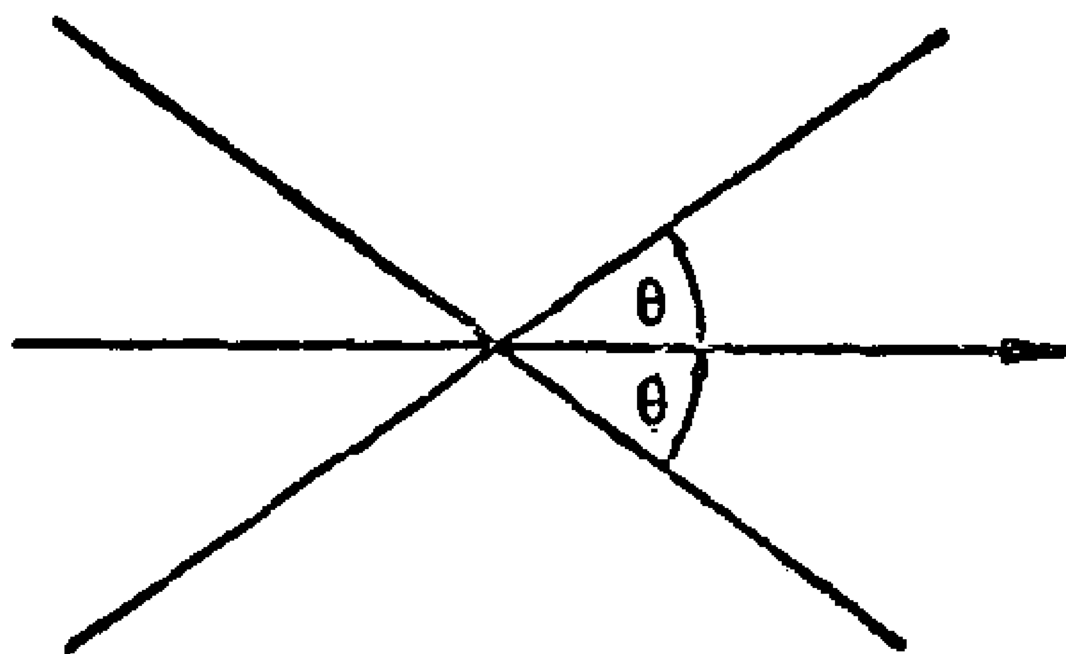


图62

联立给出。将它们相减，得$4xy\sin\theta\cos\theta=0$。可知轨迹位于平面$x=0$与$y=0$的并集上，即$yz$平面与$xz$平面上。在$yz$平面上的那一部分的方程为$z^2+y^2\cos^2\theta=r^2$，是一椭圆；在$xz$平面上的那一部分的方程为$z^2+x^2\sin^2\theta=r^2$，也是一椭圆．所以球心的轨迹就是这两椭圆的并集。

B–2．显然，在$R-\{0\}$上，g有一阶连续导数（甚至二阶连续导数）

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}.$$

现在f在0可微，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=f'(0).$$

因而g在0连续。

为了求$g'(0)$，我们必须考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}.$$

由推广的中值定理，对于每个x存在一个$\theta\in(0,1)$使得

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\theta x),$$

那么 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\theta x)=\frac{1}{2}f''(0)$$

因为f''连续。于是g在0可微且$g'(0)=f''(0)/2$。

由中值定理，对于每个x存在一个$\eta\in(0,1)$ 使得

$$f'(x)-f'(0)=xf''(\eta x),$$

故有 $$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(f''(\eta x)-\frac{1}{2}f''(\theta x)\right)=\frac{1}{2}f''(0),$$

从而g'在0连续。

解法二。注意

$$g(x)=\int_0^1 f'(xt)dt.$$

由于f'有一阶连续导数，我们可在积分号下求导且知g'存在，表达式如下

$$g'(x)=\int_0^1 tf''(xt)dt.$$

因为f''连续，故g'连续。

B-3. 我们用$\rho(A,B)$表示两点A与B之间的球面距离，而通常的欧氏距离用$|AB|$表示。

设$X \longmapsto X'$是将球冠映为平面的保距映射。令A,B,C,D是球冠上的四点使得$ABCD$是三维空间内的一个欧氏正方形。(注意，一个球冠必定含有这样的点集。) 则 $\rho(A,B)=\rho(B,C)=\rho(C,D)=\rho(D,A)$且$\rho(A,C)=\rho(B,D)$。由这些关系式推知

$|A'B'|=|B'C'|=|C'D'|=|D'A'|$ 及 $|A'C'|=|B'D'|$。所以$A'B'C'D'$是一正方形，故$|A'C'|=\sqrt{2}\,|A'B'|$。因为映射是保距的，就有$\rho(A,C)=\sqrt{2}\,\rho(A,B)$。由于$ABCD$是正方形，又有$|AC|=\sqrt{2}\,|AB|$，故

$$\frac{\rho(A,C)}{|AC|}=\frac{\rho(A,B)}{|AB|}. \qquad (1)$$

然而，$\rho(X,Y)/|XY|=\theta/\sin\theta$，式中$\theta$是弧$XY$所对中心角的一半。$\theta/\sin\theta$是$\theta$的一个严格增函数从而也是$|XY|$的严格增函数。又因为$|AC|>|AB|$，所以(1)不能成立。这矛盾证明了不存在将球冠映为平面的保距映射。

B-4. 令$p_1,p_2,\cdots,p_s$是s个相异素数，根据中国剩余定理(即孙子定理)，下列同余式组

$$x\equiv -1 \pmod{p_1^2}$$
$$x\equiv -2 \pmod{p_2^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x\equiv -s \pmod{p_s^2}$$

有一解，记为n。则s个连续整数$n+1,n+2,\cdots,n+s$每个有一个二重素因子，原因是p_i^2整除$n+i$。既然我们可以取$s=1,000,000$，故确实存在1,000,000个连续整数的数列，其每一项含有一个二重素因子。

B-5. 以下的证明是关于K运用归纳法。显然，若至多存在

一种1-数组，则这数列是常数列，即周期为 1 的周期序列。

设每个至多具有K种不同的K-数组的无穷序列最终是周期的。则给定一个至多具有$K+1$种不同的$(K+1)$-数组的无穷序列，研究当每一个这样的组在右边删去一数时会发生什么。若我们用这方法得到小于$K+1$种不同的K-数组，则这给定的序列至多有K种不同的K-数组，从而由归纳假设知所给的序列最终是周期的。

另一方面，若我们得到$K+1$种不同的K-数组。则每个K-数组有某个唯一的扩张为$(K+1)$-数组的添加数。那么在原给定的序列内，对于某个i，若第i个与第$(i+p)$个K-数组是相同的(这里$p>0$)，就推知第$(i+K)$与第$(i+p+K)$项是相同的。所以第$(i+1)$个与第$(i+p+1)$个K-数组是相同的，从而由归纳法推知序列是周期的，从第i项开始，周期为p。因为在这序列内至多存在$K+1$个不同的K-数组，故在前$K+2$个组中必定出现一个重复组，所以周期性必定在不后于第$(K+1)$项开始。

B-6. 首先考虑(1)的也满足

$$f(m)\geqslant f(n)\geqslant f(p) \tag{2}$$

的解。因f仅取正值，对于任意那样的解有

$$\frac{1}{3}\leqslant f(m)<1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(1-f(m))\leqslant f(n)<1-f(m), \tag{4}$$

$$f(p)=1-f(m)-f(n). \tag{5}$$

由于当$x\to\infty$时$f(x)\to 0$，所以仅仅存在有限多的整数m满足(3)；对于每个那样的m仅仅存在有限多的整数n满足(4)；而对于每个那样的数耦m,n仅仅存在有限多的整数p满足(5)。

于是(1)的解中只有有限多个也满足(2)。但是(1)的所有别

的整数解是将这有限多个解的m,n,p置换而得，所以(1)总共只有有限多个正整数解。

B-7. 令四个力F_1,F_2,F_3,F_4分别沿直线l_1,l_2,l_3,l_4作用，并假定它们均不为0.

由于平衡，这些力关于任意直线m的总力矩必定为零。考虑一条与l_1,l_2,l_3中每一条都共面的直线m，力F_1,F_2,F_3关于m分别有零力矩，故F_4也必定关于m有零力矩，则m也与l_4共面。

因而相互偏斜的直线l_1,l_2,l_3,l_4具有下述性质：任意与前三线的每一线共面的直线也与第四线共面。从这里推知它们是某个非退化二次曲面的母线。兹将证明略述如下。

非退化直纹二次曲面，通常分为单叶双曲面与双曲抛物面两类。前者有心，后者无心。用仿射的术语，我们可以说后者是那样的非退化直纹二次曲面，其母线的每一族平行于一固定平面。

可举出处于平衡状态的四个力沿着一个双曲抛物面的母线作用的例子。如$F_1=\vec{j}$作用于(0, 0, 0)，$F_2=-3\vec{j}-3\vec{k}$作用于(1,0,0)，$F_3=3\vec{j}+6\vec{k}$作用于(2,0,0)，$F_4=-\vec{j}-3\vec{k}$作用于(3,0,0)。它们的作用线是双曲抛物面$z=xy$的母线。

现在开始论证。为简洁起见用射影法处理。文中所称两条共面线总是指相交的。记$p\vee l$表示包含点p与直线l的平面，p是不在l上的一点。

令l_1,l_2,l_3为三条相互偏斜的直线，$\mathscr{M}$是与它们都相交的直线的集合。设$p\in l_1$，则$p\vee l_2$与$p\vee l_3$是不同的平面(因为l_2与l_3相偏斜)，从而任意过p点且与l_2及l_3都相交的直线位于这两平面上。所以$(p\vee l_2)\cap(p\vee l_3)$是过$p$且与$l_2,l_3$都相交的唯一直线。这样，我们看到过$l_1$的每一点都有$\mathscr{M}$的唯一直线。在$\mathscr{M}$内这些直线的并集成为一个非退化二次曲面$Q$，并且$l_1,l_2,l_3$整个地位于

Q上。

令l_4是任意不同于l_1,l_2,l_3的直线，与$\mathscr{M}$的每一直线相交。容易看出l_1,l_2,l_3,l_4是相互偏斜的。我们将证明l_4整个地位于Q上。若$q\in l_4$，则$n=(q\vee l_1)\cap(q\vee l_2)$是一条过$q$交$l_1$与$l_2$的直线。设它交$l_1$于$r$。存在一条直线$m\in\mathscr{M}$过$r$且（由我们关于$l_4$的假定）它与$l_4$相交，记交点为$s$。现在若$q\neq s$，则有两条直线$m$与$n$都过$r$且与$l_2,l_4$都相交。但这样的直线只有一条，就是$(r\vee l_2)\cap(r\vee l_4)$。所以$q=s\in m\subseteq Q$。因而$l_4$整个地位于$Q$上。即这四条直线都是非退化二次曲面$Q$的母线。证毕。

第十六届　（1956年3月3日）

上午试题

A-1. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\ \dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$，

式中$a>0$，$a\neq 1$。

A-2. 试证每一个正整数都有一个包含全部十个阿拉伯数字的倍数。

A-3. 一个质点在竖直平面内受重力以及垂直于它的速度向量且与速度成比例的力的作用，从静止开始下落。试求质点运动的轨道方程，并说明它是何种曲线。

A-4. 设n阶可微的实函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$内至少有$n+1$个不同的零点，而多项式$P(Z)\equiv Z^n+C_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+C_0$只有实零点。求证$(D^n+C_{n-1}D^{n-1}+\cdots+C_0)f(x)$在$[a,b]$内至少有一个零点。式中$D^n$是微分算子$\dfrac{d^n}{dx^n}$。

A-5. 把 n 个物体排为一行. 如果这些物体的一个子集合中任何两元素均不相邻，则称这个子集合为不亲切的. 证明含有k个元素的不亲切子集合的个数是 $\binom{n-k+1}{k}$.

A-6. (i) 设有一个变换把平面映为自身，且保持所有的有理距离不变. 求证它一定是保距变换. (ii) 试证上述理论对于直线不真.

A-7. 证明在任何有限的二项展开式中，系数为奇数的项，其个数一定是 2 的幂.

下午试题

B-1. 设微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

为齐次且恰当的，则它的解$y=f(x)$满足 $xM+yN=C$(常数).

B-2. 设平面上每个点集 X 都有一个叫做它的覆盖的伴随点集$\overline{X}$. 又设

(1) $\overline{X\cup Y}\supset\overline{\overline{X}}\cup\overline{Y}\cup Y$, 式中$\cup$表示点集之和(并) 而$\supset$表示集合之包含.

试证：(i) $\overline{X}\supset X$, (ii)$\overline{\overline{X}}=\overline{X}$, (iii) $X\supset Y$蕴涵$\overline{X}\supset\overline{Y}$.

并证明其逆：(i), (ii), (iii)蕴涵(1).

B-3. 一个球内切于四面体，将每个切点与该点所在面 的三顶点连结起来，这样形成的每面的三个角(以切点为顶点)组成一个集合. 试证这四个集合是相等的.

B-4. 试证若A,B,C是三角形的三内角，均以弧度度量，则$A\cos B+\sin A\cos C>0$.

B-5. 考虑空间$2n$个点的集合 ($n>1$). 设它们之间至少用

n^2+1条线段相连.则至少形成一个三角形。并证明对于每个n，若$2n$个点由n^2条线段连成,则可能有不形成任何三角形的情况。

B-6。给定$T_1=2$，$T_{n+1}=T_n^2-T_n+1$，$n>0$，证明：

(i) 若$m\neq n$，则T_m与T_n没有大于1的公因子。

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{T_i}=1$。

B-7。设复系数多项式$P(Z)$与$Q(Z)$有相同的零点集合但零点的重数可能不同。且

$$P(Z)+1 \quad 与 \quad Q(Z)+1$$

亦具有上述性质，试证$P(Z)\equiv Q(Z)$。

解答

A-1。令 $f(x)=\left[\frac{1}{x}\ \frac{a^x-1}{a-1}\right]^{1/x}$.

则对于$x>0$及$a>1$，有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(a^x-1)}{x}.$$

当$x\to+\infty$时， $\frac{\ln x}{x}\to 0$， $\frac{\ln(a-1)}{x}\to 0$

而 $\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a\to\ln a$。

故 $\ln f(x)\to\ln a$。

另一方面，若$0<a<1$及$x>0$，则

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x},$$

显然当$x\to+\infty$时右边三项都趋于零。

由于exp是连续函数，故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\exp\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\begin{cases}\exp\ln a=a & 当a>1,\\ \exp 0=1 & 当0<a<1.\end{cases}$$

或简记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\max(a,1)$。

A-2. 若n是一正整数而p是任一别的正整数，则下列整数$p+1$，$p+2$，…，$p+n$之一是n的倍数。给定n，选取$p=1234567890\times10^K$，式中K是使得$10^K>n$的整数。则$p+1,p+2$，…，$p+n$都有以1234567890…开始的十进制表示，其中必有一个是n的倍数。

A-3. 设质点在时刻t的位置是$\langle x(t),y(t)\rangle$。则速度向量由$\langle x'(t),y'(t)\rangle$给出，而加速度向量由$\langle x''(t),y''(t)\rangle$给出。我们选取坐标系使得质点初始位置在原点，$x$轴为水平轴，$y$轴为竖直轴。

因为向量$\langle y'(t),-x'(t)\rangle$与速度向量垂直而长度相等，故运动的微分方程为

$$\langle x''(t),y''(t)\rangle=c\langle y'(t),-x'(t)\rangle+\langle 0,-g\rangle, \quad (1)$$

式中c是将质点的质量综合在内的一个常数。初始条件为$x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$。将(1)分为两个方程

$$x''(t)=cy'(t),\quad y''(t)=-cx'(t)-g.$$

对第一个方程求导，得

$$x'''(t)=cy''(t)=-c^2x'(t)-cg.$$

标准形为 $x'''(t)+c^2x'(t)=-cg.$ (2)

(2) 所对应的齐次方程有三个线性无关解$1,\sin ct,\cos ct$。非齐方程的试探解形如kt，容易定出系数k，得(2)的通解

$$x(t)=-gt/c+\alpha+\beta\cos ct+\gamma\sin ct.$$

利用初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ [后者从 $y'(0)=0$ 得

知],故

$$x(t)=-\frac{gt}{c}+\frac{g}{c^2}\sin ct。\qquad (3)$$

所以$y'=x''/c=-g/c\cdot\sin ct$，从而

$$y(t)=\frac{g}{c^2}(-1+\cos ct)\qquad (4)$$

这里用到初始条件$y(0)=0$。

于是(3)与(4)就是所求的运动曲线，为一旋轮线，是由半径为g/c^2的圆沿着x轴下缘以速度$-g/c$滚动时圆周上一点的轨迹。

A-4。首先证明

引理。设f在[a,b]内可微，且在此区间内有$m+1$个不同的零点。则对于任意实数λ，$(D-\lambda)f$在[a,b]内至少有m个不同零点。

证明。运用罗尔定理于恒等式

$$(D-\lambda)f(x)=e^{\lambda x}D(e^{-\lambda x}f(x))$$

的右边，我们看到在f的任意两个相邻零点之间存在$(D-\lambda)f$的一个零点。所以在[a,b]内至少存在m个不同的零点。

现在可用归纳法证明题目的结论了。若$n=1$，这正是引理当$m=1$的情形。

假定当$n=k$时结论为真。设P为$k+1$次多项式而f为$k+1$阶可微且在[a,b]内有$k+2$个不同零点。由于P的根都是实的，可记$P(Z)=Q(Z)(Z-\lambda)$，式中λ是实数而Q是一个k次多项式，其全部根都是实数。则$g=(D-\lambda)f$在[a,b]内k阶可微且在[a,b]内至少有$k+1$个不同的零点(这是根据引理的$m=k+1$的情形而得)。因此由归纳假设，$Q(D)g$在[a,b]内至少有一个零点。但是

$$Q(D)g=Q(D)(D-\lambda)f=P(D)f。$$

于是当$n=k+1$时结论也真。证毕。

A-5　对于n个物体的有序集合的每个子集合S，我们把它

的元素按在 S 中的顺序排成一行，每个元素都记为A，再在空位上补上若干个B，两者总数为n,便成为A与B的一个n级排列。其中如果任何两个A都不相邻，则称这样的排列为不亲切排列。于是一个不亲切子集合对应于一个不亲切排列，从而我们必须证明由k个A与$n-k$个B组成的不亲切排列的总数是$\binom{n-k+1}{k}$.

我们将建立k个A及$n-k$个B组成的所有不亲切排列与 k 个A及$n-2k+1$个B组成的所有排列之间的一个双射对应。

给定k个A与$n-k$个B的一个不亲切排列，把位于前$k-1$个A（即除了最末一个A以外所有的A）的每一个的右边贴邻的 B 取掉。我们用这种方法得到k个A与$n-2k+1$个B的一个排列。

反之，给定k个A与$n-2k+1$个B的一个排列，在每个A(除了最后一个A以外)的后面插入一个B。我们用这种方法得到k个A与$n-k$个B的一个不亲切排列。

显然，这两个变换是互逆的。因而两种排列的数目相同，都是$\binom{n-k+1}{k}$.

A-6.（i）设T是将平面映为自身且保持有理距离的变换，用$d(P,Q)$表示任意两点P，Q之间的距离。

令 A 与 B 是平面上任意两个不同点。给定任意正数 $\varepsilon<d(A,B)$，选取一个有理数r使得

$$d(A,B)-\varepsilon<r<d(A,B)$$

又选第二个有理数s使得$s<\varepsilon$且$r+s>d(A,B)$.则以A为圆心r为半径的圆与以B为圆心 s 为半径的圆相交。令C是一个交点，则$d(A,C)=r$，$d(B,C)=s$。所以$d(TA,TC)=r$，$d(TB,TC)=s$，故

$$r-s=d(TA,TC)-d(TB,TC)$$

$\leqslant d(TA,TB)\leqslant d(TA,TC)+d(TC,TB)=r+s$。

所以 $d(A,B)-2\varepsilon<d(TA,TB)<d(A,B)+\varepsilon$。

由于ε可以取得任意小，这表明

$$d(TA,TB)=d(A,B)。$$

又因为A与B是任意选取的，这就证得了T是保距的。

(ii) 用R表示直线.考虑变换$S(x)=x$(当x是有理数)，$S(x)=x+1$(当x是无理数)。则S对所有有理距离保距，但不对所有的距离保距.例如$d(0,\sqrt{2})=\sqrt{2}$,但$d(S(0),S(\sqrt{2}))=d(0,\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1$。

A-7。$\because(1+x)^2\equiv1+x^2\pmod 2$ 从而由归纳法，当β是2的任意次幂时，$(1+x)^\beta\equiv1+x^\beta\pmod 2$。

令二项式的指数是正整数n，并将n表为

$$n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_s},$$

式中那些α是整数且$0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s$。[注意实际上这是$n$的二进制展开式]。为方便起见，令 $\beta_i=2^{\alpha_i}$。于是我们记有限的二项展开式为

$$(1+x)^n=(1+x)^{\beta_1}(1+x)^{\beta_2}\cdots(1+x)^{\beta_s}$$

$$\equiv(1+x^{\beta_1})(1+x^{\beta_2})\cdots(1+x^{\beta_s})\pmod 2.$$

当最后的表达式乘出来的时候，显然有2^s项，每项有x的不同幂，因为每个非负整数作为2的不同幂的和(可能是空的)的表示法是唯一的，于是，$(1+x)^n$中恰有2^s项以奇数作为系数，这就是说恰有2^s个二项式系数$\binom{n}{i}$ $(i=0,1,\cdots,n)$是奇数.(上述论证表明s是在n的二进制表示法中数字1出现的个数)当$n=0$时结论也有效。

B-1。设M与N都是K次齐次函数，则由欧拉定理，有

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=KM \text{ 及 } x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=KN.$$

若原给定的微分方程是恰当的，则

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

所以，如果两个条件都满足，就有

$$d(xM+yN)=Mdx+Ndy+x\left(\frac{\partial M}{\partial x}dx+\frac{\partial M}{\partial y}dy\right)$$

$$+y\left(\frac{\partial N}{\partial x}dx+\frac{\partial N}{\partial y}dy\right)$$

$$=Mdx+Ndy+\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx$$

$$+\left(x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}\right)dy$$

$$=(K+1)(Mdx+Ndy),$$

在M与N的整个定义域上关系式总成立。

现在设$y=f(x)$(这里f定义在一个区间上,)是给定的微分方程的解(即用$f(x)$替换y就使得$Mdx+Ndy$为零)，则这替换将$xM+yN$变为一个定义在上述区间上的函数g且$dg=0$。所以g是一个常数，记为$g(x)=C$。这就是说$y=f(x)$满足$xM+yN=C$。

B-2. 在(1)内令$Y=X$，则$\bar{X}\supset\bar{\bar{X}}\cup\bar{X}\cup X$由这里显见

$\bar{X}\supset X$，这就是(i)。

从上面注意到$\bar{X}\supset\bar{\bar{X}}$。又在(i)内用$\bar{X}$替换$X$得$\bar{\bar{X}}\supset\bar{X}$。

所以$\bar{\bar{X}}=\bar{X}$，这就是(ii)。

设$Y\subset X$。则$X\cup Y=X$，因而(1)化简为

$$\bar{X}\supset\bar{\bar{X}}\cup\bar{Y}\cup Y.$$

因此$\bar{X}\supset\bar{Y}$，这就是(iii)。

反过来，设(i)，(ii)，(iii)成立，对任意集合$\bar{X}$与$\bar{Y}$我们有

$$X\subset X\cup Y.$$

由(iii)有 $\bar{X}\subset\overline{X\cup Y}$.

故由(ii)有 $\bar{\bar{X}}\subset\overline{X\cup Y}$. (2)

又 $Y\subset X\cup Y$

且由(iii)有 $\bar{Y}\subset\overline{X\cup Y}$. (3)

由(i)得 $X\cup Y\subset\overline{X\cup Y}$,

故 $Y\subset\overline{X\cup Y}$. (4)

现在从(2)，(3)，(4)一起得出

$$\overline{X\cup Y}\supset\bar{\bar{X}}\cup\bar{Y}\cup Y,$$

这就是要求证的(1)。

B-3. 设四面体的顶点为P_i $(i=1,2,3,4)$，又设Q_i是正对着P_i的面与球相切的切点。下文中我们用i，j，k，l表示$\{1,2,3,4\}$的不同元素。

由于P_iQ_j与P_iQ_k是从同一顶点向球所作切线，故$|P_iQ_j|=|P_iQ_k|$。同理$|P_lQ_j|=|P_lQ_k|$. 所以$\triangle P_iQ_jP_l\cong\triangle P_iQ_kP_l$(边.边.边)，则$\angle P_iQ_jP_l=\angle P_iQ_kP_l$。我们以$|il|$表示这种角．显然

$$|il|=|li| \quad (1)$$

由于以Q_i为顶点的三个角相加是2π，故有

$$|23|+|34|+|42|=2\pi,\quad |34|+|41|+|13|=2\pi,$$

$$|41|+|12|+|24|=2\pi,\quad |12|+|23|+|31|=2\pi.$$

将这些方程的前两个相加减去后两个，且利用(1)，得$2\cdot|34|-2\cdot|12|=0$。故$|12|=|34|$，又由对称性得

$$|ij|=|kl|. \quad (2)$$

以Q_1为顶点的角是$|23|$，$|34|$，$|42|$，由(2)，它们分别等于以Q_2为顶点的三个角，即$|41|$，$|34|$，$|13|$。由对称性，在所有四个面上的中心角都有同样的情形。

B-4. 分两种情形研究

情形1. $0<B<\pi/2$。则$\cos B>0$。因$A>0$，故$A>\sin A$。所以$A\cos B>\sin A\cos B$。又$C=\pi-A-B<\pi-B$，及$0<C<\pi$，故$\cos C>\cos(\pi-B)=-\cos B$。因而$\cos B+\cos C>0$。所以

$$A\cos B+\sin A\cos C>\sin A(\cos B+\cos C)>0.$$

情形2. $\pi/2\leqslant B<\pi$。则$\cos B\leqslant 0$，$0<A<\pi/2$，故$A<\operatorname{tg}A$，且$\operatorname{tg}A>0$。因而$A\cos B\geqslant\operatorname{tg}A\cos B$。又$B=\pi-A-C$。故

$$\cos B+\cos A\cos C=-\cos(A+C)+\cos A\cos C=\sin A\sin B>0.$$

所以
$$A\cos B+\sin A\cos C\geqslant\operatorname{tg}A\cos B+\sin A\cos C$$
$$=\operatorname{tg}A(\cos B+\cos A\cos C)>0.$$

B-5. 用记号T_n表示命题：若$2n$个点由至少n^2+1条线段连结，则形成一个三角形。我们用归纳法来证明T_n。

设A,B,C,D四点由至少五条线段连结。则至多还缺少一条连线，记为AB，于是BCD形成一个三角形。因而T_2为真。

现在假定T_k为真。给定$2(k+1)$个点，它们由至少$(k+1)^2+1$条线段连结起来。令A与B是连有线段的两点，又令δ是其余$2k$个点的集合。设δ的p个点与A连结而δ的q个点与B连结。若$p+q>2k$，则δ的某个点C与A及B两者都连结，ABC就是一个三角形。若$p+q\leqslant 2k$，则至多$2k+1$条线段以A或B为端点，并且至少与δ的

$$(k+1)^2+1-(2k+1)=k^2+1$$

个点连结。由T_k知δ的某三点形成一个三角形。于是T_{k+1}也真。所以，对于所有$n>1$(若$n=1$，则将连线算作空集)T_n都是真确的。为了证明$2n$个点能用n^2条线段连结而不形成任何三角形，

将点分为两个集合S,T,每个各含n个元素。若S的每一点与T的每一点连结，则用去了n^2条线段而没有形成一个三角形。

B-6. 这序列的前几项是$T_1=2$，$T_2=3$，$T_3=7$。我们用归纳法证明

$$T_{n+1}=1+\prod_{i=1}^{n}T_i \qquad 当n\geqslant 1。 \tag{1}$$

当$n=1$它是真确的。设它当$n=k$时真确。则

$$T_{k+2}=1+T_{k+1}(T_{k+1}-1)=1+T_{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k}T_i\right)$$

$$=1+\prod_{i=1}^{k+1}T_i。$$

（上面第一步由给定的递推公式，第二步由归纳假设。）

现在设$m\neq n$，不妨设$m<n$。则(1)表明T_m整除T_n-1，故T_m与T_n互素。这就是(i)。

下面我们用归纳法证明对于所有的n有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}=1-\frac{1}{T_{n+1}-1}. \tag{2}$$

当$n=1$时上式为真，而且若当$n=k$时为真，则

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{T_i}=1-\frac{1}{T_{k+1}-1}+\frac{1}{T_{k+1}}=1-\frac{1}{T_{k+1}(T_{k+1}-1)}$$

$$=1-\frac{1}{T_{k+2}-1}.$$

于是(2)成立。

因为当$n\to\infty$时$T_n\to\infty$，故从(2)推知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{T_i}=1。$$

B-7. 命题对于零次多项式不成立，故应假定这两多项式至少有一个不是常数。设P的次数为m，Q的次数为n。由对称性可假定$m\geqslant n$。令P的不同的零点是$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$，又令$P+1$的不同的零点是$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\}$。这两个集合显然不相交。求$P$及$P+1$的导数，都是$P'$，将重数计入，它必定至少有$(m-r)$个零点在$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$内而$(m-s)$个零点在$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\}$内，所以$(m+r)+(m-s)\leqslant m-1$，不等号右边是$P'$的次数(这里假定$m>0$)。于是$r+s>m$。但是$r+s$个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$中的每一数都是$P-Q$的一个零点。而多项式$P-Q$的次数至多为$m$，这就推知$P(Z)\equiv Q(Z)$。

第十七届(1957年3月2日)

上午试题

A-1. 若曲面的法线都与一条固定直线相交，求证这曲面必为一个回转曲面的一部分。

A-2. 把一条均匀金属线弯成曲直两段，一段形如曲线$y=e^x(0\leqslant x\leqslant a,\ a>1)$；另一段为直线$y=e^a\ (a-1\leqslant x\leqslant a)$。假定$xy$平面垂直于地平面，$x$轴水平指向右。将这条弯好的金属线在点$(a-1,\ e^a)$处挂住，又用一个水平力$F$作用于金属线的$(0,\ 1)$点，使金属线与上述曲线及线段处于重合状态。试证所施力F指向右边。

A-3. 设A，B为实数，K为某个正整数。证明不等式

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|<K^2-1$$

当其左边有定义时恒成立。

A-4. $p(z)$是一个复多项式，它的根（作为复平面上的点）可以被一个半径为R的闭圆盘所覆盖。试证$np(z)-Kp'(z)$的根可以被半径为$R+|K|$的闭圆盘所覆盖，这里n是 $p(z)$ 的次数，K是任一复数，而$p'(z)$是$p(z)$的导数。

A-5. 在平面上给定n个点，证明由这些点所确定的最大距离(线段)不能多于n条。

A-6. 设$S_1=\ln a$而$S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\ln(a-S_i)$，$n>1$。

试证 $\lim_{n\to\infty}S_n=a-1$。

A-7. 考虑xy平面上圆的某个集合，其中每个圆都与x轴相切而这些圆两两不相交。试证(i)这些切点包含x轴上全部有理点；但是(ii)这些切点不能包含x轴上所有的无理点。

下午试题

B-1. 考虑100阶行列式$|a_{ij}|$，这里$a_{ij}=i\times j$。求证当这行列式展开式的100! 项中每一项的绝对值被101除的时候，余数都是1。

B-2. 如果计算工具不能作除法运算，为了确定$1/A(A>0)$的十进小数值，有时用递推公式$X_{k+1}=X_k(2-AX_k)$ $(K=0, 1, 2, \cdots)$ 是方便的。这里X_0是一选定的“开始”值。试求X_0的界限(如果有的话)，以保证用这样的开始值X_0，使上述递推运算能收敛于所求的值$1/A$。

B-3. 设$f(x)$是定义在 $0\leqslant x\leqslant 1$中的一个正值单调减函数，求证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

B-4. 设正整数n表为若干个 1 与 2 的和（考虑到加数顺序的区别）的各种表示法共有$a(n)$种，例如从

$$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2=1+1+1+1$$

则$a(4)=5$. 又设n表为大于 1 的整数的和（也考虑到加数顺序的区别）的各种表示法的总数为$b(n)$，例如从$6=4+2=2+4=3+3=2+2+2$，有$b(6)=5$。试证对于每个n恒有$a(n)=b(n+2)$。

B-5. 如果一个集合的每个子集合X均伴以一个第二子集合$f(X)$，使得当X包含Y时$f(X)$包含$f(Y)$。试证对某个集合A，有$f(A)=A$。

B-6. 曲线$y=f(x)$过原点且在该点斜率为1，它满足微分方程$(x^2+q)y''+(x^2+4)y=0$。试证它必在x轴上点$x=\frac{3}{2}\pi$与$x=\sqrt{\frac{63}{53}}\pi$之间穿过该轴。

B-7. 设C是一个以正多边形为边界的闭凸平板，试证对于每个正整数n存在这平面上一个集合$S(n)$其任意n个点都能被C覆盖，但$S(n)$本身不能被C覆盖住。

解答

A-1. 这题目叙述不当. 观察下图所绘的一个缺损圆柱面与一个球冠的一部分连成的曲面，发现这个连通的C'-曲面满足题目的假设但不符合结论. 因而需要对术语“曲面”作适当

的诠释才能适应题目的结论。可举出更加复杂的这种例子，事实上，存在一个满足假设的C^∞-曲面S使得最小的包含S的旋转不变集合可包括任何指定的可数个回转C^∞-曲面的并。

〔译者按：本题原来的解答载于《美国数学月刊》1961年，当时未发现题目的错误。特译出附此，供参考：

设L为定直线，考虑过L上点O又垂直于L的平面与曲面相截所成之平面曲线。若P为此曲线上的任一点且不在L上，则OP是曲面法线之投影。从而OP为所截得的曲线的法线。不难证明，如果一平面曲线的所有法线都通过一固定点，则该曲线必是以固定点为中心的一个圆。于是引出结论。〕

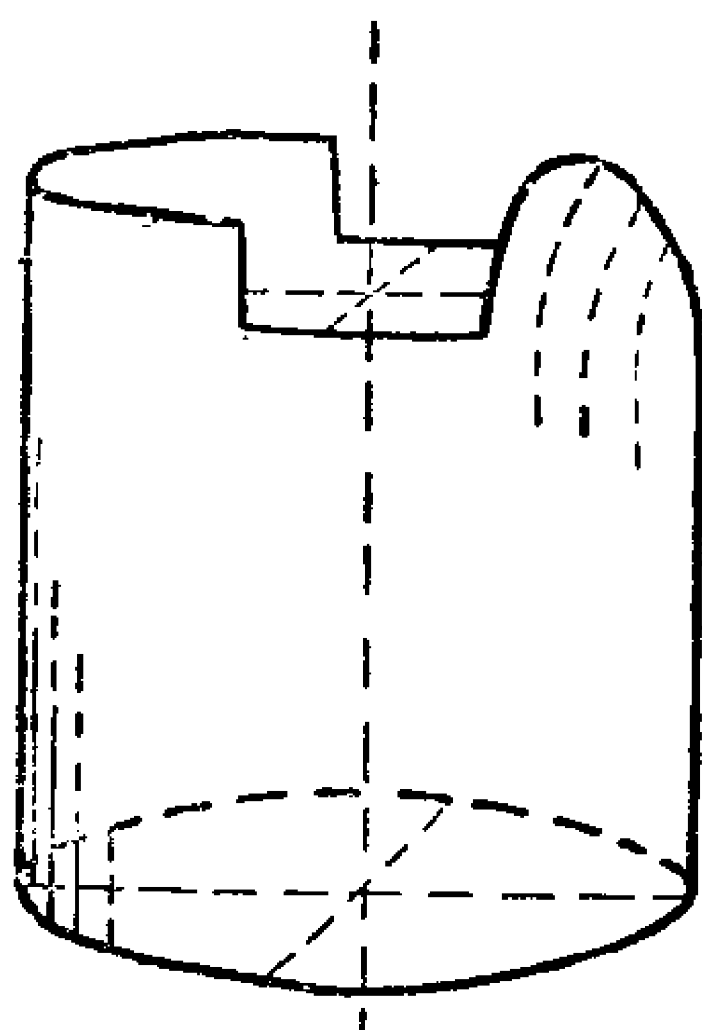


图63

改变原题的假设及结论，我们得到与原题不同的两个好的结果。由上面看出这问题需要相当的技巧，我们从曲面的定义开始。设E是三维欧氏空间。

定义. 所谓E的一个子集S是一个C^1-曲面，是指当且仅当对于每个点$p\in S$，在E内存在p的一个开邻域N以及一个梯度非零的C^1-函数$f: N\to R$，使得$S\cap N$是f的零(点的)集合。

我们需要下列事实。若S为一C^1-曲面且$p\in S$，则存在唯一平面切S于p，并且若π是任意别的过p的平面，则在E内存在p的一个邻域U使得$\pi\cap S\cap U$是一条过p（即p不是一个端点）的曲线，它具有非奇异的C^1-参数式。这可从隐函数定理推知。

我们考虑E内一个C^1-曲面，它处处具有这样的性质：它的的所有的法线都与一条固定直线l相交。设$p\in E-l$，而$C(p)$是过p的圆，这圆所在的平面垂直于l，而圆心在l上。我们注意到以l为轴的一个回转曲面具有下述性质：当任意点p不在l上的时候，该曲面就含有整个圆周$C(p)$。

引理1. 设一条连绵的C^1-曲线A位于一平面π内，而A在π内的所有法线交于一

固定点$b\notin A$，则A位于一个以b为中心的圆周上。

证明。 在π内取直角坐标系，以b为原点。由于在A上任一点p，直线pb必垂直于A的切线。这意味着A的切线都位于微分方程

$$xdx+ydy=0 \tag{1}$$

的方向场上。即A是（1）的一条积分曲线。因为在$\pi-\{b\}$上（1）是非奇异的，则$\pi-\{b\}$内（1）的任意连绵积分曲线位于唯一的一条最大积分曲线上。（1）的这条最大积分曲线显然是以b为中心的圆。证毕。

引理2. 令π是一个垂直于l的平面。则在$\pi\cap S-l$上的任意连绵C^1-曲线位于关于某点p的一圆周$C(p)$上。

证明。 令A是在$\pi\cap S-l$上的一条连绵的C^1-曲线。我们证明A的所有法线过$\pi\cap l$。

设q是A的任一点，τ是切S于q的平面。则$\tau\neq\pi$，因为π在q的法线不与l相交。A在q的切线位于π与τ两者之内，即$\pi\cap\tau$。又因为π与τ分别垂直于由q与l（即l与S在q点的法线）形成的平面σ内的两条交线，则$\pi\cap\tau$垂直于σ。所以$\pi\cap\sigma$是A在平面π内q点处的法线，它通过$\pi\cap l$，这就证明了A的所有法线过点$\pi\cap l$。则由引理1知A位于一圆$C(p)$上。

引理3. 令$p\in S-l$，则$C(p)\cap S$关于$C(p)$开。

证明。 令π是$C(p)$所在的平面而q是$C(p)\cap S$的任意点。现在π在q不切于S，因为在q的π的法线不与l相交。所以$\pi\cap S$包含一条过q的连绵C^1-曲线A。由引理2，A位于$C(q)=C(p)$上。由于q是在$C(p)\cap S$内任意选取的，就推知$C(p)\cap S$关于$C(p)$开。

定理A. S是一个回转曲面的局部，也就是对于S的每一点p，在E内存在p的一个邻域N以及一个回转曲面S^*，使得$S\cap N=S^*\cap N$。

证明。 我们以l为轴引用圆柱坐标r，θ，z。

设$p\in S-l$。我们取p的一个开邻域N如曲面定义中所述。如果必要可将N截下，我们可假定对于某个正数ε

$N=\{\langle\gamma,\theta,z\rangle: |r-r(p)|<\varepsilon,\ |\theta-\theta(p)|<\varepsilon,\ |z-z(p)|<\varepsilon\}$。可将$\varepsilon$取得充分小，以致于$N\cap l=\phi$。

设$q\in S\cap N$。因为$S\cap N$关于N闭，所以$C(q)\cap S\cap N$关于$C(q)\cap N$闭。又因为$C(q)\cap S$关于$C(q)$开，所以$C(q)\cap S\cap N$关于$C(q)\cap N$开。于是$C(q)\cap S\cap N$非空并且关于$C(q)\cap N$既开又闭。后者是连贯的，故$C(q)\cap S\cap N=C(q)\cap N$。这推出

$$S\cap N=\bigcup\{C(q)\cap N: q\in S\cap N\}.$$

所以$S\cap N=S^*\cap N$，式中

$$S^*=U\{C(p): q\in S\cap N\}$$

是一个回转曲面（因为S^*的任一点有一个由将N绕l旋转得到的邻域N_1，并且$S^*\cap N_1$也由将$S\cap N$绕l旋转得到，所以它是一个C^1-曲面。）

现在设$p\in S\cap l$。我们取p的一个邻域N如定义中那样。我们可以假定对于某个正数ε，

$$N=\{(\gamma,\ \theta,\ z): \gamma<\varepsilon,\ |z-z(p)|<\varepsilon\}.$$

令$q\in S\cap N-l$。如前所述，$C(q)\cap S\cap N$关于$C(q)\cap N$既开又闭。但是在这种情形，$C(q)\cap N=C(q)$，故$S\cap N\supseteq C(q)$。所以$S\cap N$是一个回转曲面。

定理B。如果S是闭的，则S是一个回转曲面。

证明。在这个假设下对于任意$q\notin l$，$C(q)\cap S$关于$C(q)$是既开又闭的。由于$C(q)$是连贯的，$C(q)\cap S$不是空集就是$C(q)$，所以S是一个回转曲面。

A-2。下面三句断语显然等价：

力F指向右方。

在金属线上重力关于支点的力矩是顺时针的。

金属线的重心位于支点的右方。

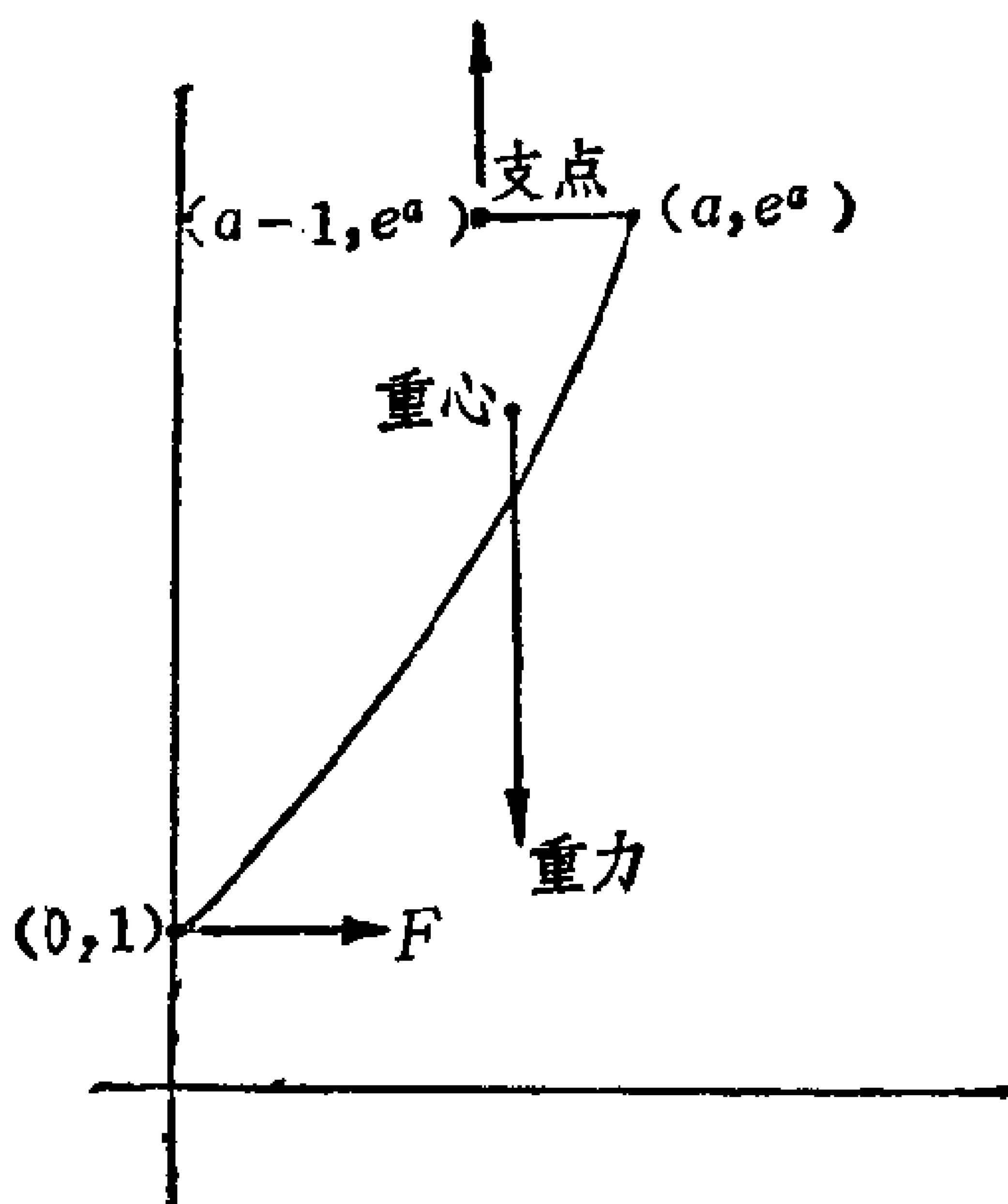


图64

所以，若$\bar{x}$为重心的横坐标，我们必须证明

$$\bar{x}>a-1. \qquad (1)$$

不失一般性，取金属线的线密度为1。则该线的曲线部分的质量为

$$\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}dx,$$

而它的x矩为$\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}dx$。

该线的直线部分的质量为1而x矩为$a-\frac{1}{2}$。所以(1)等价于

$$a-\frac{1}{2}+\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}dx>(a-1)\left(1+\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}dx\right)$$

即 $$\int_0^a x\sqrt{1+e^{2x}}dx-(a-1)\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}dx>-\frac{1}{2}. \quad (2)$$

我们必须证明 (2)对于所有$a>1$成立。

令 (2)的左边为$f(a)$，则

$$f'(a)=\sqrt{1+e^{2a}}-\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}dx.$$

由于 $$1+e^{2x}<\left(\frac{1}{2}e^{-x}+e^x\right)^2,$$

$$\int_0^a\sqrt{1+e^{2x}}dx<\int_0^a\left(\frac{1}{2}e^{-x}+e^x\right)dx$$

$$=e^a-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-a}<e^a<\sqrt{1+e^{2a}}$$

当$a>0$时成立。所以$f'(a)>0$ 当 $a>0$ 时成立。故当 $a>0$ 时 $f(a)>f(0)=0$。从而立即推知(2)成立。

A-3. 令 $x=(A-B)/2, y=(A+B)/2$.不等号左边绝对值号内的分子是

$$\frac{1}{2}[\cos(KB+A)+\cos(KB-A)-\cos(KA+B)$$

$$-\cos(KA-B)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(KB+A)-\cos(KA+B)]$$

$$+\frac{1}{2}[\cos(KB-A)-\cos(KA-B)]$$

$$=\sin(K-1)x\sin(K+1)y+\sin(K+1)x\sin(K-1)y.$$

分母是$2\sin x\sin y$，可以假定它不为零。所以有

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(K-1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(K+1)y}{\sin y}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(K+1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(K-1)y}{\sin y}\right|.$$

现在因为$|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|$，除了$n=1$或$\sin Z=0$以外，对于所有的$z$以及所有的正整数$n$具有严格不等号(这在下面证明)，所以上面右边两项都小于$(K^2-1)/2$（假定$K>1$）. 所以

$$\left|\frac{\cos KB\cos A-\cos KA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|<K^2-1$$

（假定$K>1$及$\cos B\neq\cos A$）. 显然当$K=1$时不等号应换为等号，故题目的措词是不精确的.

下面证明$|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|$（$n$为任何正整数）. 若$Z=0$，则对每个整数$n$都保持等号，故假定在这里$\sin Z\neq 0$，则$|\cos Z|<1$. 我们关于$n$运用归纳法. 当$n=1$时显然有等号. 当$n=2$，有$|\sin 2Z|=2|\cos Z|\,|\sin Z|<2\,|\sin Z|$. 设当$n=K$时有严格不等号，则

$$\begin{aligned}|\sin(K+1)Z|&=|\sin KZ\cos Z+\cos KZ\sin Z|\\&\leqslant|\sin KZ|+|\sin Z|<(K+1)\,|\sin Z|.\end{aligned}$$

于是当$n=K+1$时有严格不等号. 这就证明

$$|\sin nZ|\leqslant n|\sin Z|,$$

而且除了$n=1$或$\sin Z=0$以外，对于所有实数Z及所有正整数n具有严格不等号.

A-4. 设$P(Z)$的根都位于闭圆盘D_1:$|Z-c|\leqslant R$之内. 我们将证明$nP(Z)-Kp'(z)$的根都位于闭圆盘D_2:$|Z-c|\leqslant R+|K|$之内.

设$P(Z)$的根是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$P(Z)=A(Z-\lambda_1)(Z-\lambda_2)\cdots(Z-\lambda_n)$，式中$A$为常数. 取对数求导，得

$$\frac{P'(Z)}{P(Z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Z-\lambda_i}.$$

设$u\notin D_2$。则

$$|u-\lambda_i|\geqslant|u-c|-|\lambda_i-c|>R+|K|-R=|K|$$

(因为$\lambda_i\in D_1$)。所以，对于$i=1,2\cdots$, $n,\frac{|K|}{|u-\lambda_i|}<1$,

$$|np(u)-KP'(u)|=|P(u)|\cdot\left|n-K\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u-\lambda_i}\right|$$

$$\geqslant|P(u)|\cdot\left(n-\sum_{i=1}^{n}\frac{|K|}{|u-\lambda_i|}\right)>0.$$

于是u不是$nP(Z)-KP'(Z)$的一根。

这表明$nP(Z)-KP'(Z)$的全部根均位于D_2内。

A-5. 设此平面点集为δ. δ的直径即δ的任意两点之连线(线段)中最长者。我们用归纳法来证明δ至多能有n条直径。显然当$n=2$或3时结论为真．假定当$n=K$时结论也真。令ε是平面内$K+1$个点的集合。

设从ε的某点X引出的直径不多于一条，则$\varepsilon-\{X\}$是平面内K个点的集合且由归纳法假设至多有K条直径，因而ε至多有$K+1$条直径。

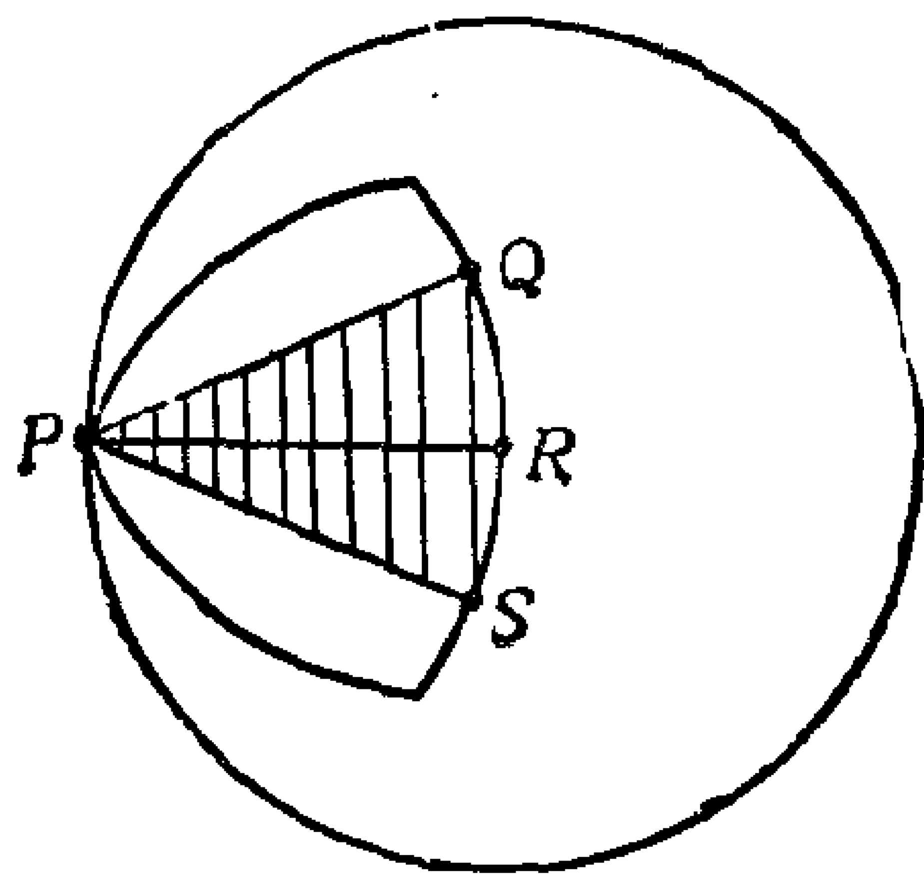


图65

设ε的某点P至少能引出3条直径PQ,PR,PS. 令$r=|PQ|$. 则Q,R,S位于以P为中心r为半径的圆周上，并且事实上位于此圆的劣弧上。适当用字母记这三点使R在弧上处于Q与S之间。由于ε的两点至多相距r，则ε位于分别以P,Q，S为中心r为半径

的三个闭圆盘的交集J之内．除了点P以外，J全在以R为中心r为半径的圆的内部，因而R是ε的恰可引一条直径RP的端点．上文证明了ε至多有$K+1$条直径．

最后，设ε的每点恰可引出两条直径，则这些直径共有$2(K+1)$个端点，故恰有$K+1$条直径．

于是，在任何情况下，ε至多有$K+1$条直径．

A-6．递推公式可化为

$$S_{n+1}=S_n+ln(a-S_n)．$$

其折线表示如图66，显然对任取的$S_1<a$，有

$$S_2\leqslant S_3\leqslant S_4\leqslant\cdots\leqslant a-1, \qquad (1)$$

因而这数列收敛于$a-1$．为了解析地证明这一结论，我们令

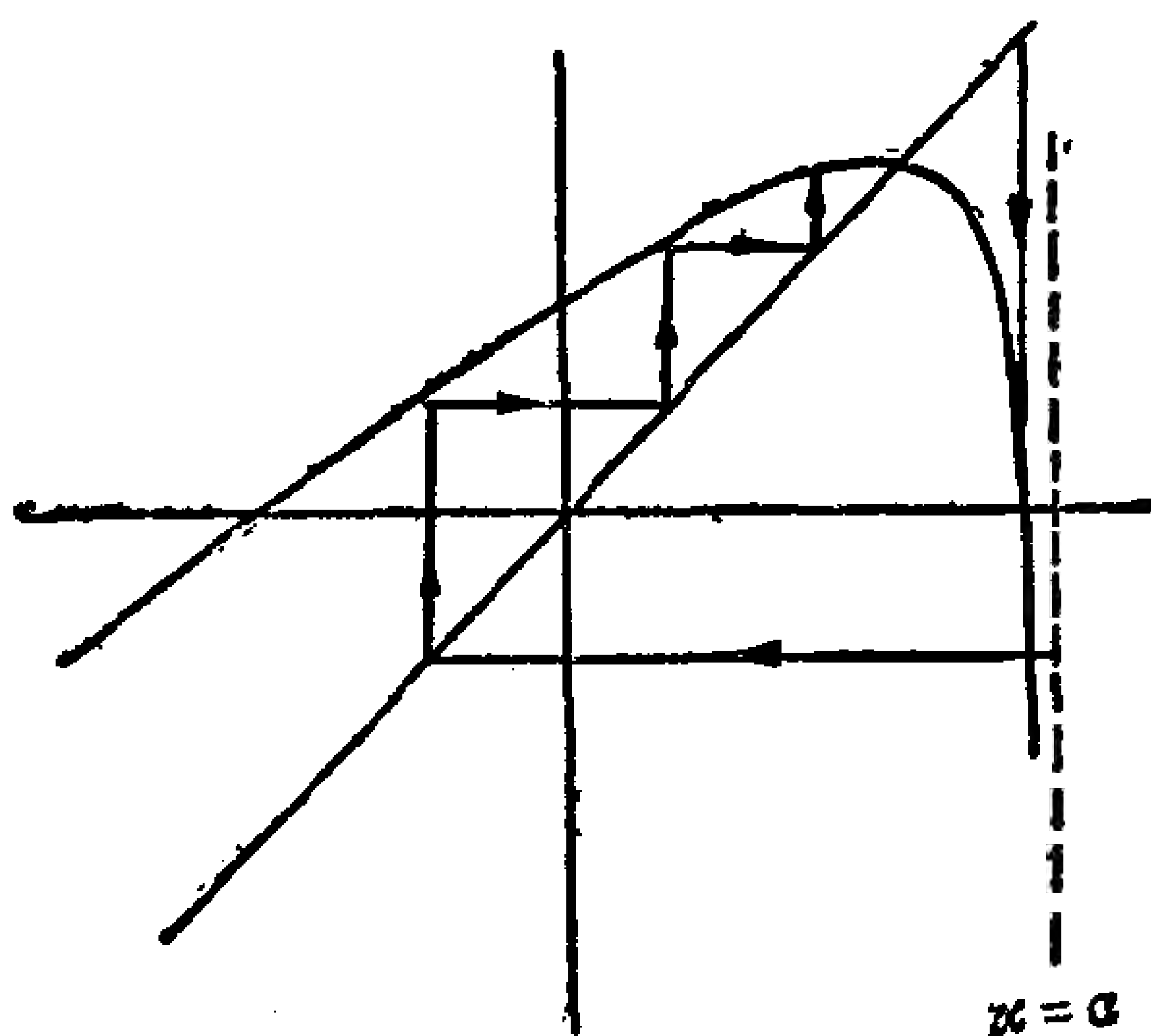


图66

$$f(x)=x+ln(a-x)$$

$(x<a)$．则$f'(x)=1-1/(a-x)$，当$x<a-1$时为正，当$x>a-1$时为负．由于$f(a-1)=a-1$，推知对于所有的$x<a$有$f(x)\leqslant a-1$．又，若$x\leqslant a-1$，则$ln(a-x)\geqslant 0$，故$f(x)\geqslant x$．即可推出(1)，故数列$\{S_n\}$有极限，记为T．显然$T\leqslant a-1$，是f的一个连续点，所以

$$f(T)=f(\lim\ S_n)=\lim f(S_n)=\lim\ S_{n+1}=T.$$

得 $\ln(a-1)=0$，所以$T=a-1$。证毕。

A-7. (i)设正整数p, q, r, s适合$p/q\neq r/s$。取$K>2$。考虑与x轴相切的两园，其园心分别为$(p/q, 1/Kq^2)$及$(r/s, 1/Ks^2)$。我们要求这两园不相交。若它们相交，则其园心之间的距离就不超过其半径之和。平方之，有

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)^2+\left(\frac{1}{Kq^2}-\frac{1}{Ks^2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{Kq^2}+\frac{1}{Ks^2}\right)^2.$$

可得$(ps-rq)^2\leqslant 4/K^2$。但这是不可能的，因为$K>2$而左式是正整数。这表明我们的要求是对的。

现在设有理数r，把它写成最简分数形式p/q，(p,q为整数)。令Cr为中心在$(p/q, 1/Kq^2)$半径为$1/Kq^2$的园，则Cr切x轴于$(r,0)$点。并且如上所证的，若$r\neq s$，则Cr与C_s不相交。所以$\{C_r$, r为有理数$\}$是圆的一个集合，其每个园与x轴相切，切点为x轴上所有的有理点，并且任何两个园不相交。

(ii) 因为任意一个园域都含有两坐标都是有理数的一点，又因为平面上这种点是可数的，故在平面上彼此内部不相交的一族不可数个圆是不可能存在的。任意两个有公切线的不相交圆其内部也不相交，故不可数个不相交的圆都与x轴相切是不可能的.既然在x轴上无理点的集合是不可数的，这就证明了(ii)。

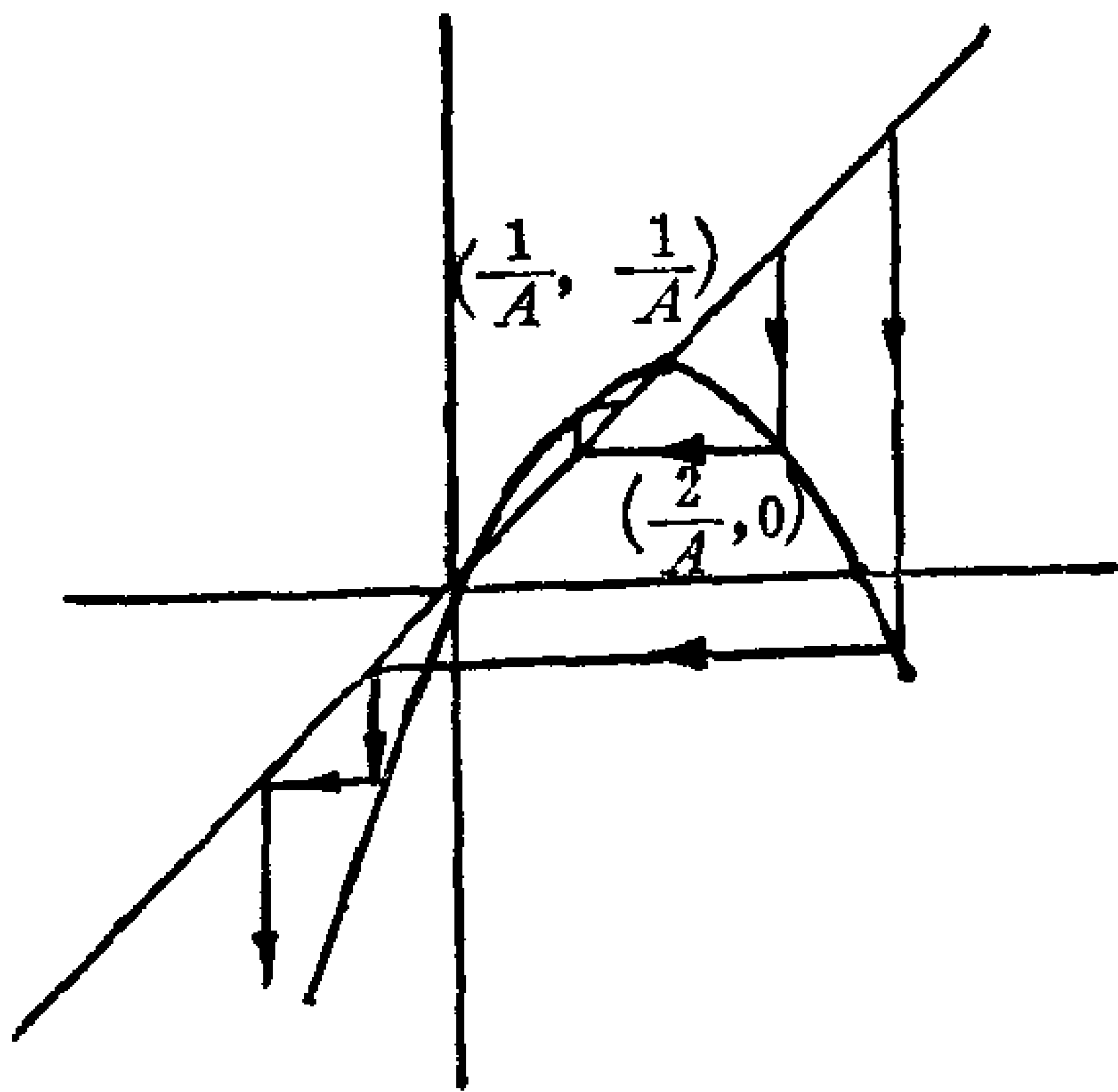


图67

B-1. 这行列式展开式每一项的绝对值，是所有可能的行指标与所有可能的列指标的积，故为 $(100!)^2$。

既然101是一个素数，故由Wilson定理$100!\equiv -1(mod\,101)$，所以 $(100!)^2\equiv(-1)^2\equiv 1(mod\ 101)$，如所欲证。

B-2. 这递推法的折线表示如图67。容易看出当且仅当$0<X_0<2/A$时数列$X_0,X_1,\cdots$收敛于$1/A$。

证法是：定义 $f(x)=x(2-Ax)$，求得极大值$f(1/A)=1/A$；又当$0<x<1/A$ 时 $f(x)>x$；当$x<0$时$f(x)<x$。这样可得

若X_0位于$(0,\ 2/A)$，则$0<X_1\leqslant X_2\leqslant X_3\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{A}$； (1)

若$X_0=0$或$2/A$，则$X_1=X_2=X_3=\cdots=0$； (2)

若X_0位于$(0,2/A)$之外，则$0>X_1>X_2>X_3>\cdots$。 (3)

在情形(1)，数列必收敛于$f(x)=x$的唯一正根，即 $x=1/A$；在情形 (2)，数列显然收敛于0；在情形(3)，数列或发散于$-\infty$或收敛于$f(x)=x$的一负根，但这种负根是不存在的。

解法二. 我们可求得X_n关于 X_0的一个显式，从而容易看出极限性质。从题设递推公式易得

$$1-AX_{n+1}=(1-AX_n)^2,$$

则

$$1-AX_n=(1-AX_0)^{2^n}.$$

显然，当且仅当$|1-AX_0|<1$，即$0<X_0<2/A$时，有 $1-AX_n\to 0$，即$X_n\to 1/A$。

B-3. 要证的不等式等价于

$$\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 yf(y)dy-\int_0^1 yf^2(y)dy\int_0^1 f(x)dx\geqslant 0$$

即

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]dxdy\geqslant 0. \tag{1}$$

将 (1) 的左边记为I。则交换积分变量有

$$I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)x[f(y)-f(x)]dxdy.$$

那么 $$2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]dxdy.$$

由于f是减函数，因此对于所有的x与y，有$(y-x)[f(x)-f(y)]\geqslant 0$。又因$f$处处为正，显然$2I\geqslant 0$。这就证明了(1)。

B-4. 我们来找出关于$a(n)$，$b(n)$的两个幂级数发生函数．首先，n作为K个1与2的有序和的表达式的数目显然等于$(x+x^2)^K$展开式中x^n的系数。所以

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2)^k=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

其次，n作为K个大于1的整数的有序和的方式的数目是

$$(x^2+x^3+\cdots)^K=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^K$$

展开式中x^n的系数。故

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}b(n)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^K=\left(1-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1-x}{1-x-x^2}=1+\frac{x^2}{1-x-x^2}.$$

于是 $$\sum_{n=2}^{\infty}b(n)x^n=x^2+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n.$$

B-5. 设给定的集合为S。定义

$$C=\{X\subseteq S: X\subseteq f(X)\},$$

且设A是C的所有元素的并集。我们来证$A=f(A)$。

设$X\in C$，则$X\subseteq f(X)$且$X\subseteq A$．于是$f(X)\subseteq f(A)$（由假设）。故$X\subseteq f(A)$。由并集的定义

$$A\subseteq f(A). \qquad (1)$$

又由假设，$f(A)\subseteq f(f(A))$，故$f(A)\in C$。再由并集的定义，

$$f(A)\subseteq A. \qquad (2)$$

B-6. 我们要用到常微分方程中的斯图谟比较定理：

设I是R内一区间，函数u与v当$x\in I$时满足

$$u''(x)+A(x)u(x)=0,\quad v''(x)+B(x)v(x)=0.$$

式中A与B为连续函数，且当$x\in I$时$A(x)\geqslant B(x)$。假定v在I上不恒为零，而α与β是v的零点，$\alpha<\beta$。则除了当$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$时$A(x)=B(x)$以及$u$与$v$在这区间上成比例这两种情形以外，总有$u$的一个零点在开区间$(\alpha,\beta)$内。

对于本题，我们首先比较微分方程

$$y''+\frac{x^2+4}{x^2+9}y=0\ (1)与v''+\frac{4}{9}v=0. \quad (2)$$

取（2）的一解$v(x)=\sin\frac{2}{3}x$，易见0与$\frac{3}{2}\pi$是它的两个零点.由于对所有x有

$$\frac{x^2+4}{x^2+9}\geqslant\frac{4}{9},$$

（当$x\neq0$时为严格不等号），故（1）的任意解必有一零点ξ在$\left(0,\ \frac{3}{2}\pi\right)$内，$f(\xi)=0$。并且，$f$的图形必定在$\xi$穿过$x$轴，因为否则$f'(\xi)=0$,从而由关于（1）的解的唯一性定理将推出$f(x)\equiv0$。

对于$0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$,有

$$\frac{x^2+4}{x^2+9}<\frac{53}{63}. \qquad (3)$$

事实上,(3) 等价于$10x^2<225$，而由$\pi^2<10$得$10\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2<225$,

即推出 (3)。

如果我们令 $u(x)=sin\sqrt{\frac{53}{63}}x$,

则
$$u''(x)+\frac{53}{63}u(x)=0.$$

在 $I=\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上又应用斯图谟比较定理，可知 u 有一零点在 $(0,\xi)$ 内。但 u 的第一个正零点是 $\sqrt{\frac{63}{53}}\pi$，故 $\sqrt{\frac{63}{53}}\pi<\xi$。所以

$$\sqrt{\frac{63}{53}}\pi<\xi<\frac{3}{2}\pi.$$

B-7. 设 C 为一正 K 边形，其内切圆半径为 r。对于一个给定的正整数 n，令 $S=S(n)$ 表示半径为 $r\sec(\pi/2Kn)$ 的一圆。我们应证(i) 置 C 于任何位置均不能覆盖 S；(ii) 若 $P_1P_2\cdots$，P_n 是 S 的 n 个点，则置 C 于适当位置可覆盖住 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$。

将 C 保持固定，我们证明没有一个半径超过 r 的圆盘能放到 C 的内部。从这里就可直接推出(i)。对于一个固定的半径 r_1，在 C 内半径为 r_1 的圆盘的圆心的点集 E 是凸的，并且 E 在关于 C 的中心 O 作旋转 $2\pi/K$ 角的变换下是不变的。所以，E 或者为空集或者含有 O。若 $r_1>r$，以 O 为中心 r_1 为半径的一圆不全在 C 内部，这时 E 为空集。所以，半径为 r_1 的任一圆盘不能放在 C 的内部。

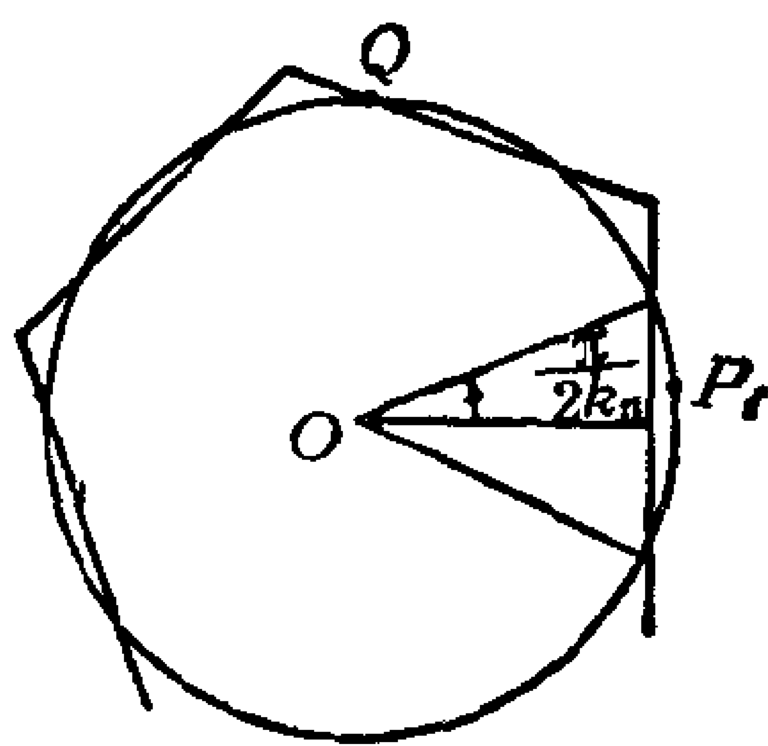


图68

现在证明(ii)。令 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 S 的点，并且在 C 内固定一个参考点 Q，Q 到 O 的距离为 $r\sec(\pi/2Kn)$。安置 C 使得 O 与 S 的中

心重合，并且绕O转动C使得Q画出圆S。考虑那些P中的一点P_i。由于Q画出S，若$Q \in A_i$，A_i是K段每段长为π/Kn弧度的闭弧的并集（精确地说，是当$2\pi m/K \leqslant \angle P_i OQ \leqslant 2\pi m/K + \pi/Kn$对于某个整数$m$成立的时候），则$P_i$将位于$C$上或$C$外。$A_i$的总长为$\pi/n$从而整个$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$的长至多为$\pi$。所以$S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$至少有长度$\pi$，故不为空。只要将$C$旋转使得$Q \in S - \cup A_i$，则点$P_1, P_2, \cdots, P_n$就全在$C$的内部。证毕。

第十八届（1958年2月8日）

上午试题

A-1。设实数$a_0, a_1, \cdots, a_n$满足条件

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

求证方程$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$至少有一实根。

A-2。将两个半径相等的均匀实心球上下堆放。下面的球固定，上面的球开始时静止然后滚下。试问滚到什么位置两球便脱离接触？假定其摩擦系数刚好使它们之间不致发生滑动。

A-3。从区间$[0,1]$中随机地选取实数。若取得第n个数之后这n个数的和才首次超过1，试证对于n的期望（或平均）值是e。

A-4。若复数$a_1, a_2, \cdots a_n$满足

$$|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n| = r \neq 0,$$

从这n个数中每次取S个（不重复）作成乘积，所有乘积的和记为${}_nT_s$，试证当${}_nT_{n-s} \neq 0$时恒有

$$\left|\frac{{}_nT_s}{{}_nT_{n-s}}\right| = r^{2s-n}.$$

A-5. 证明积分方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv$$

在$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$中至多有一个连续解。

A-6. 设年利率为i，依复利计算，想要在第一年末提取1元，第二年末提取4元，…，在第n年末提取n^2元，要能永远如此提取，问至少需要多少本金？

A-7. 试证不能把十个尺寸相同的正方形放在平面上，使得其中任何两个正方形均没有公共的内点而又有一个正方形触及其它各正方形（的边）。

下午试题

B-1. (i) 给定线段a, b, c, d，其中a最长，试以这些线段为边作成一个四边形并使$a\parallel b$。问这在什么时候可作？

(ii) 给定任一锐角三角形ABC及高AH，在AH上任取一点D，引BD且延长交AC于E，又引CD且延长交AB于F。试证$\angle AHE=\angle AHF$。

B-2. 求证四个相继正整数的积不可能是一个完全平方或完全立方数。

B-3. 在一个有n名选手参加的循环赛（每一对选手赛一场，胜者得1分，负者得0分）中，没有平局，由各选手赢得的分数分别是$S_1, S_2, \cdots, S_n$。求证有某三名选手A，B，C使得A胜B，B胜C，C胜A的情况存在的充要条件是

$$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2<(n-1)n(2n-1)/6.$$

B-4. 在半径为1的球面上所有两点之间的直线距离的平均值是多少？

B-5. 在平面上给定无穷个点，试证：若它们之间的距离都是整数，则这些点都在一条直线上。

B-6. 一个抛射体在阻力介质中运动。这阻力是速度的函数并且方向与速度向量相反，运动的水平距离与时间t的关系为$x=f(t)$。

试证其竖直距离y由

$$y=-gf(t)\int\frac{dt}{f'(t)}+g\int\frac{f(t)}{f'(t)}dt+Af(t)+B$$

给出，式中A,B为常数，g是重力加速度。

B-7. 证明：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，而且当$n=0,1,2,\cdots$时$\int_a^b x^n f(x)dx=0$。则$f(x)$在$[a,b]$上恒等于零。

解答

A-1. 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

由积分中值定理，存在$\xi\in(0,1)$使得

$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx=0.$$

另一解法是设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_ix^{i+1}}{i+1}$，用罗尔定理。

A-2. 设S是那个滚动的球，半径为a，质量为M。一个均匀球的惯性矩是$I=(2/5)Ma^2$。我们不妨设想这运动实质上是二维的，则这系统的状态由两球的连心线与竖直线的夹角θ来确

定，如图69所示．用$\dot{\theta}$表示 θ 对时间的导数，v是S的中心的线速度而ω是S的旋转角速度．

只要两球保持相切，S的中心就沿着一个半径为 $2a$ 的圆运动，故$v=2a\dot{\theta}$而$\omega=2\dot{\theta}$。S的动能为

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{14}{5}Ma^2\dot{\theta}^2,$$

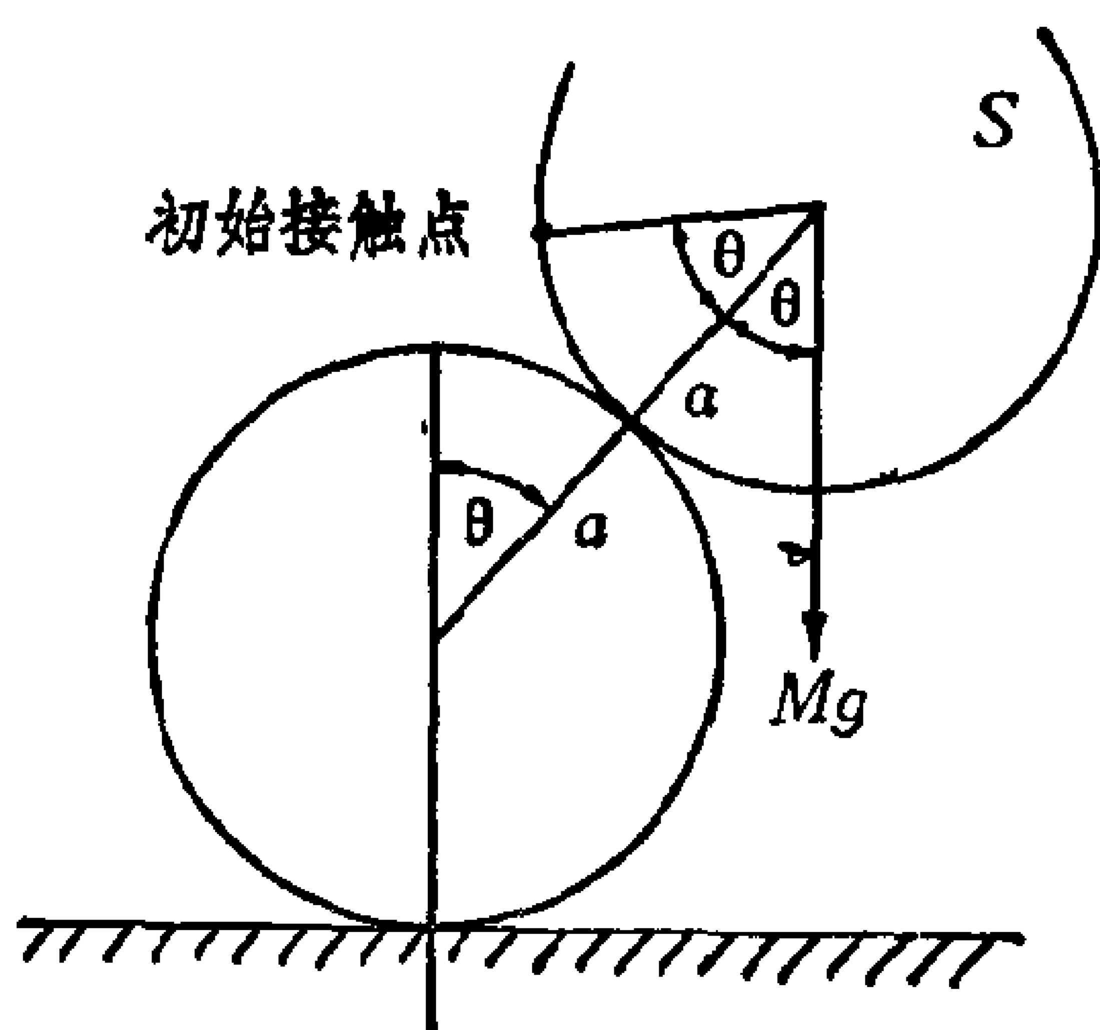


图69

而相对于下面球心的水平线的势能为$2Mag\cos\theta$，因总能量为常数故

$$2Mag\cos\theta+\frac{14}{5}Ma^2\dot{\theta}^2=2Mag。$$

（右边是由左边令$\theta=0$时算出来的）故有

$$\frac{7}{5}a\dot{\theta}^2=g(1-\cos\theta)。\tag{1}$$

为了保持S在以半径为$2a$的园周轨道上运动，需要一个指向园心的大小为 $2aM\dot{\theta}^2$的力。这力由重力沿连心线的分力$Mg\cos\theta$起作用。只要这个分力超过所需要的向心力，S就保持这种运动，其超出的力是两球接触的抵抗力。当重力的分力变得不足以维持必要的向心力时，则两球脱离接触，S进入一个抛物线轨道并以常速旋转。因此，脱离接触发生在

$$2aM\dot{\theta}^2=Mg\cos\theta$$

的时候。综合此式与（1）式，得

$$\frac{7}{10}\cos\theta=1-\cos\theta。$$

所以这发生在$\theta=\arccos(10/17)$的时候。

A-3. 令要求得到c分或更多分的试验次数的期望值是$E(c)$。设$0<c\leqslant 1$。若第一次取的数是在区间$[x, x+\Delta x]$内，这里$x<c$，则取的次数的期望值将大约是$1+E(c-x)$。所以对于$0<c\leqslant 1$，

$$E(c)=1+\int_0^c E(c-x)dx=1+\int_0^c E(u)du. \tag{1}$$

(这个积分存在是因E为增函数。)从(1)知E为连续，故由微积分基本定理，

$$E'(c)=E(c).$$

解之，$E(c)=\lambda e^c$，λ为常数。

由(1)求得$\lambda=1$。所以$E(1)=e$。

A-4. 对任意非零复数z，有$z^{-1}=\overline{z}/|z|^2$(这里一横代表共轭)。设选自$\{1,2,\cdots, n\}$的$S$指标的一个集合记为$J$，则

$$\prod_{i\notin J}a_i=a_1a_2\cdots a_n\prod_{i\in J}a_i^{-1}=a_1a_2\cdots a_n\prod_{i\in J}\frac{\overline{a_i}}{r^2}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\prod_{i\in J}\overline{a_i}.$$

所以 $${}_nT_{n-s}=\sum_J\prod_{i\notin J}a_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\sum_J\prod_{i\in J}\overline{a_i}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{r^{2s}}\overline{{}_nT_s}.$$

于是 $$\left|{}_nT_{n-s}\right|=\frac{r^n}{r^{2s}}\left|\overline{{}_nT_s}\right|=r^{n-2s}\left|{}_nT_s\right|,$$

由此即可推出要求的公式。

A-5. 设存在两个连续解且令g是它们的差。则g连续且

$$g(x,y)=\int_0^x\int_0^y g(u,v)dudv.$$

因为g连续则它在给定的正方形上有界．令M是某个界数，则当$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$有

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|dudv$$

$$\leqslant\int_0^x\int_0^y Mdudv=Mxy.$$

我们现在证明对于任何正整数n

$$|g(x,y)|\leqslant M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}. \tag{1}$$

当$n=1$的情况已证．假定当$n=k$时为真，则

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|dudv$$

$$\leqslant\int_0^x\int_0^y M\frac{u^k}{k!}\frac{v^k}{k!}dudv$$

$$=M\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}.$$

于是由数学归纳法知(1) 成立．但是对于任意固定的x与y

$$\lim_{n\to\infty}M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}=0.$$

所以$|g(x,y)|\leqslant 0$，故$g(x,y)=0$．因而不可能存在两个不同的连续解．

A-6. n年后要提取1元(本利和)，该项本金应为$(1+i)^{-n}$元，要提取n^2元(本利和)，该项本金应为$n^2(1+i)^{-n}$元，所以本金总数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1+i)^{-n}.$$

由于 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n,$$

故 $$\frac{x}{(1-x)^2}=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,$$

又 $$\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$$

(当$|x|<1$)。置$x=1/(1+i)$，便得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1+i)^{-n}=\frac{(1+i)(2+i)}{i^3}.$$

(举例：若年利率为6%，则本金至少应为10109.26元)。

A-7. 设那样的单位正方形的集合是存在的。令S,S_1，S_2是三个互不重叠的正方形，其中心分别为C，C_1，C_2，并且S触及S_1与S_2。

令$\theta=\angle C_1CC_2$，$a=|C_1C|$，$b=|CC_2|$，$C=|C_2C_1|$。则$1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$，$1\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$，$c\geqslant1$。由余弦定理

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leqslant\frac{a^2+b^2-1}{2ab}=f(a,b).$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{a^2-b^2+1}{2a^2b},\quad \frac{\partial f}{\partial b}=\frac{b^2-a^2+1}{2ab^2}.$$

这两个偏导数在整个容许的区域(a,b)内非负，故推知f在这个区域的极大值是$f(\sqrt{2},\sqrt{2})=3/4$。于是$\cos\theta\leqslant3/4$，即$\theta\geqslant\arccos3/4$。令$\alpha=\arccos3/4$，则

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-\frac{9}{16}<-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}.$$

所以$3\alpha>2\pi/3$，故$\angle C_1CC_2=\theta\geqslant\alpha>2\pi/9$。

现在设S，S_1，S_2，…，S_9是互不重叠的正方形，并且S与其它每一个都触及。令C，C_1，C_2，…，C_9分别是它们的中心。选取极点在C的极坐标系，而其余这些C的编号按极角单增(在0到2π之间）来编C_1，C_2，…，C_9。则

$$\angle C_1CC_2+\angle C_2CC_3+\cdots+\angle C_9CC_1=2\pi,$$

故这些角中至少有一个不大于$2\pi/9$，这与前面已证的发生矛盾，所以这种放法是不可能的。

附注。设正方形S^*边长为2，与S同心且位似，如图71所示，经详细分析可证任意与S触及但不含S的内点的单位正方形必定从S^*上截下一个长度至少为1的折线

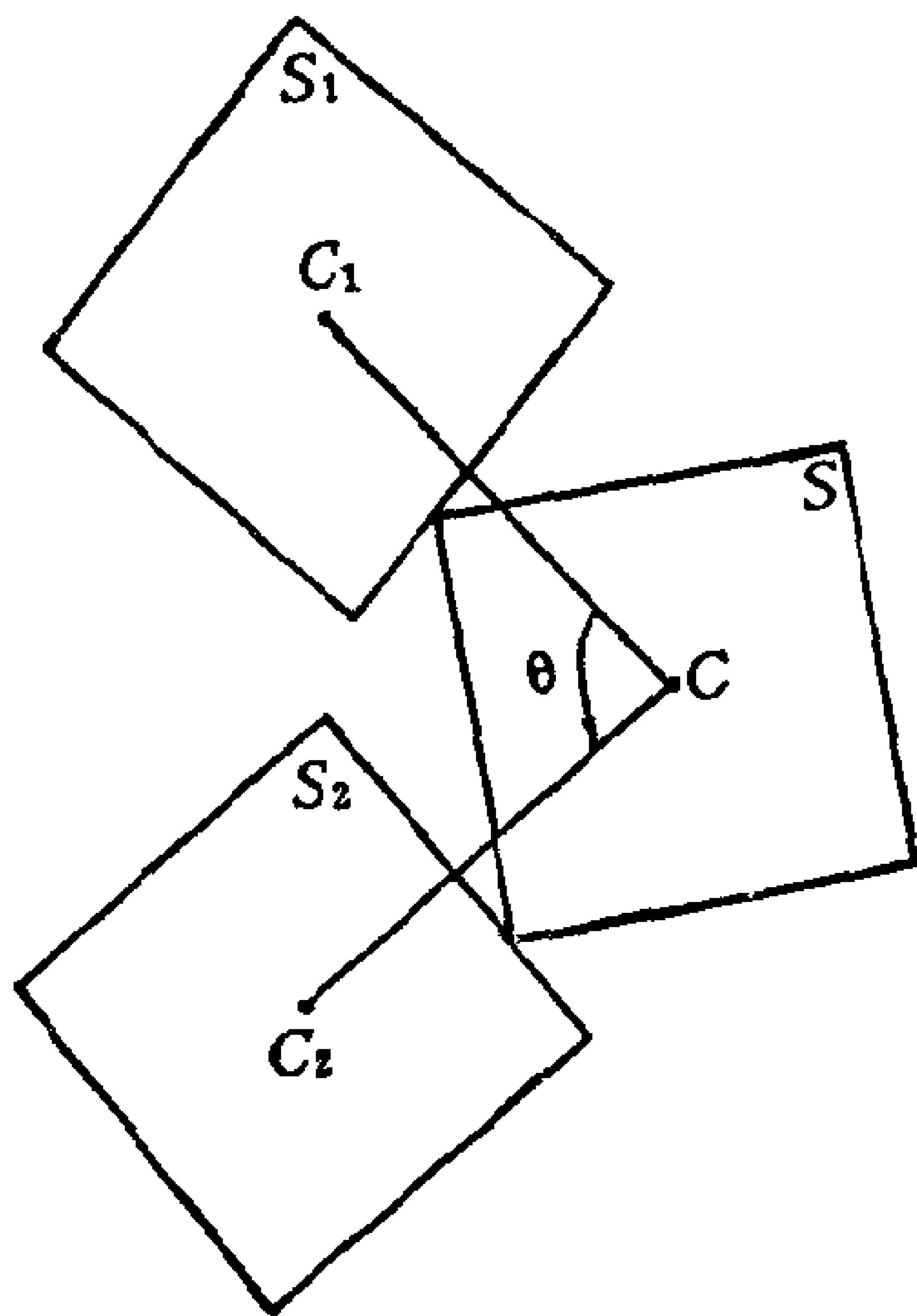


图70

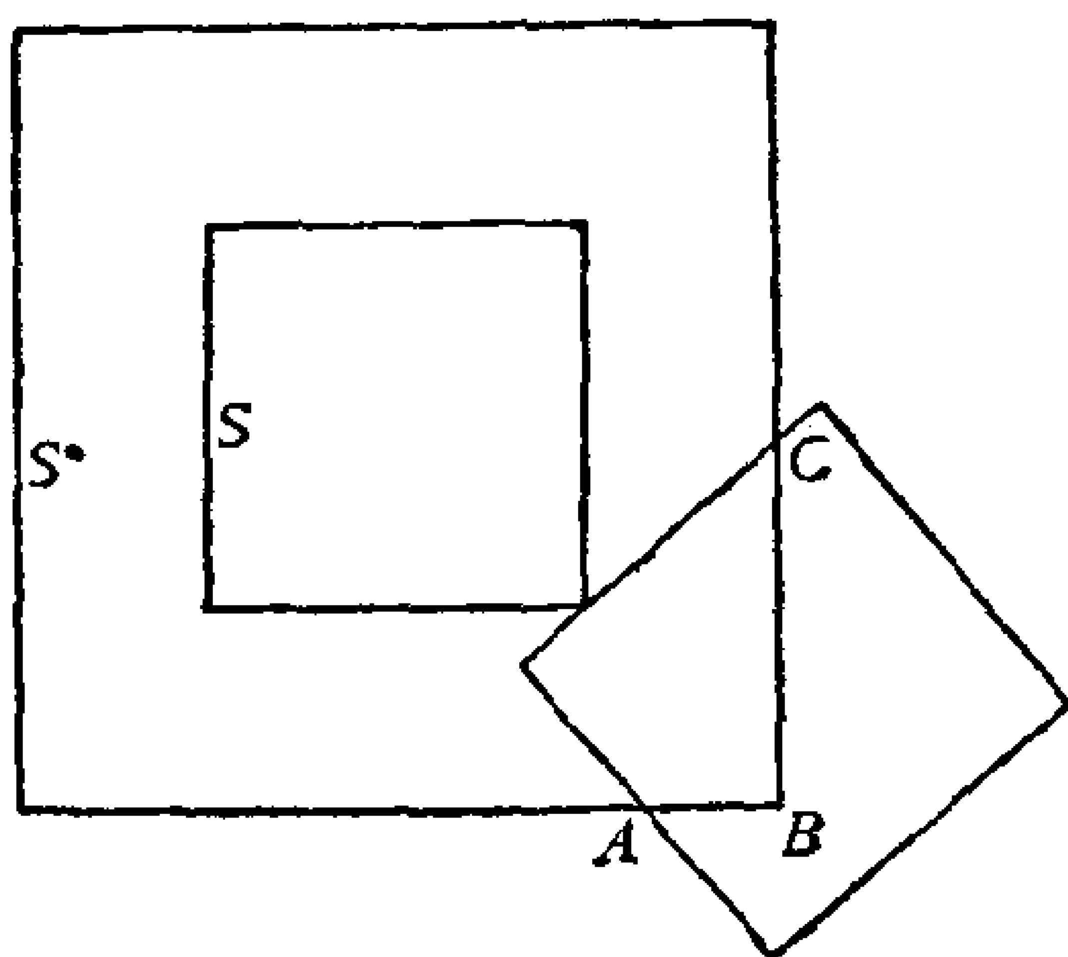


图71

(如图71中ABC)。由于S^*的周长为8，故至多有8个内部不相交的正方形能触及S。这种证法的优点在于容易推证仅仅存在8个触及S的单位正方形，即平常熟知的棋盘格拼排式样。

B-1。(i) 构造一个三角形PQR，使$|PQ|=a-b$，$|PR|=c$，$|QR|=d$。当且仅当这些长度满足严格三角不等式（即两短边的和大于最长边）时这是可以作出的。延长PQ到S使得$|QS|$

$=B$，作平行四边形$SQRT$即为所求。

若$a=b$（原题并未说明此种可能性被“a为最长”所排除），则奠基三角形退化，有$c=d$。这就存在无穷多的解：两邻边长为a与c的任意平行四边形都满足要求。

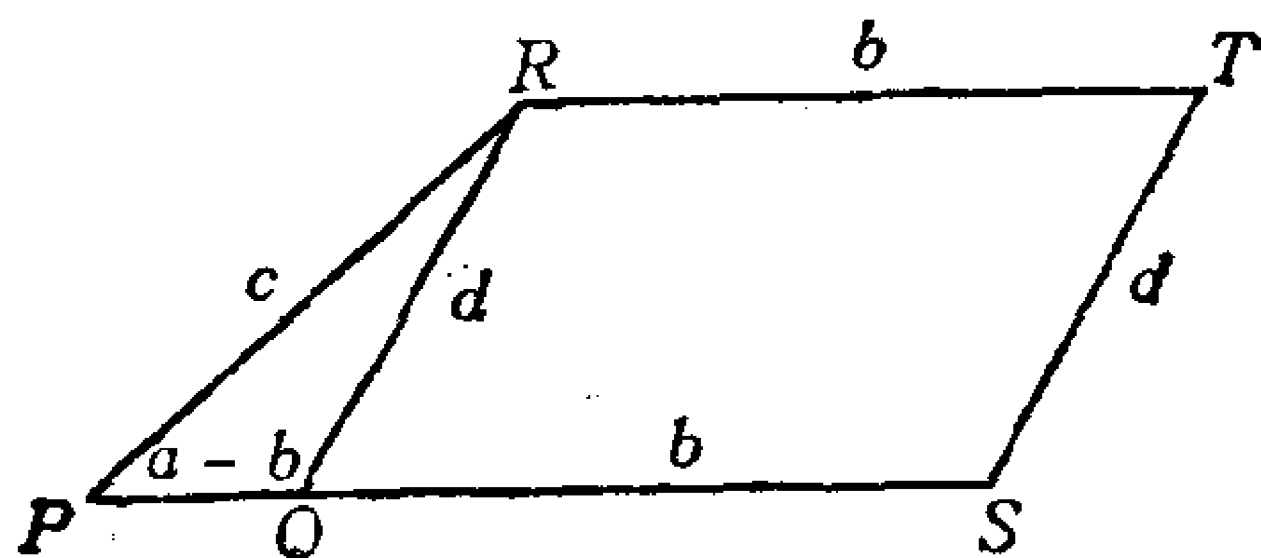


图72

(ii) **解法一**．过A作l平行于BC。因为$\angle ABC$与$\angle ACB$为锐角，高的足H必落在B与C之间。假定如通常情况$D\neq A,H$，图形如图73所示。

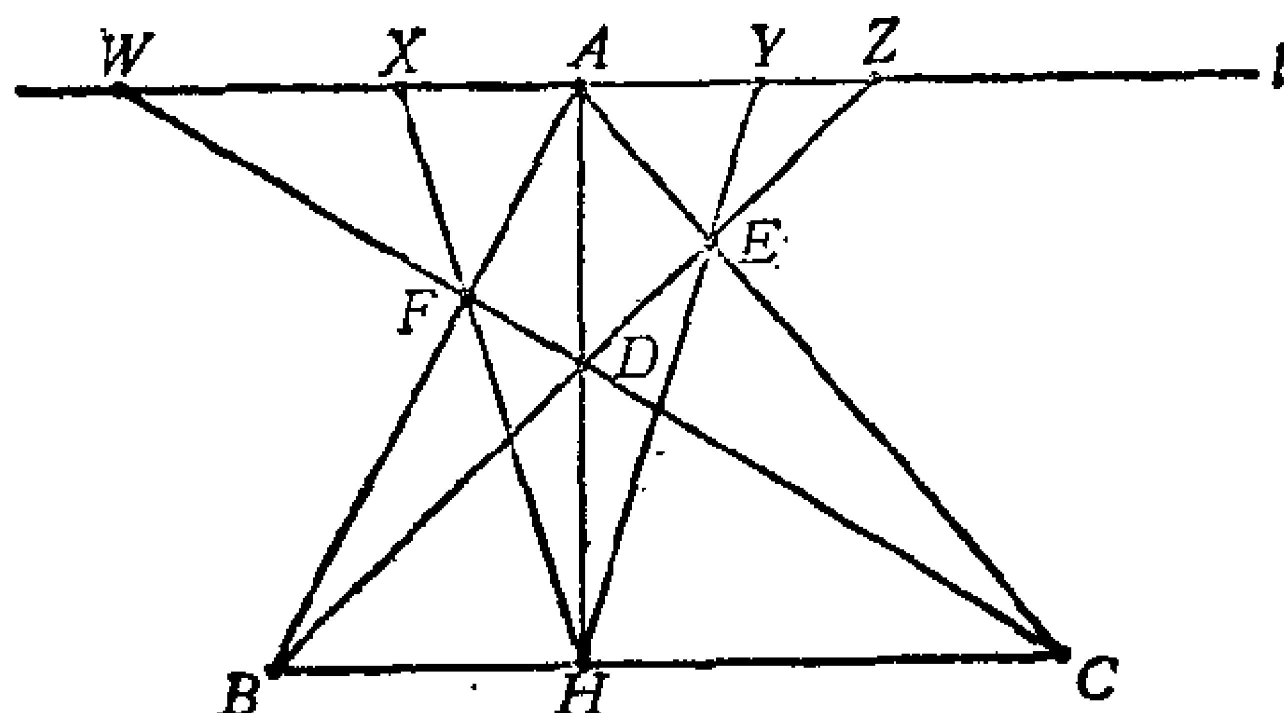


图73

考虑一双一双相似三角形，我们看到

$$\frac{|AX|}{|BH|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AW|}{|BC|},\quad \frac{|AY|}{|CH|}=\frac{|AE|}{|CE|}=\frac{|AZ|}{|CB|},$$

$$\frac{|AW|}{|HC|}=\frac{|AD|}{|HD|}=\frac{|AZ|}{|HB|}.$$

所以$|AX|\cdot|BC|=|AW|\cdot|BH|=|AZ|\cdot|HC|=|AY|\cdot|BC|$，

因而$|AX|=|AY|$．故直角三角形AHX与AHY全等从而$\angle AHX=\angle AHY$，即$\angle AHE=\angle AHF$．

解法二． 取BC与AH为直角坐标轴．令$A=(0,a)$，$B=(b,0)$，$C=(c,0)$，$D=(0,d)$．写出BD，AC的方程，求得它们的交点E，算出HE的斜率为

$$\frac{ad\ (b-c)}{bc\ (a-d)}.$$

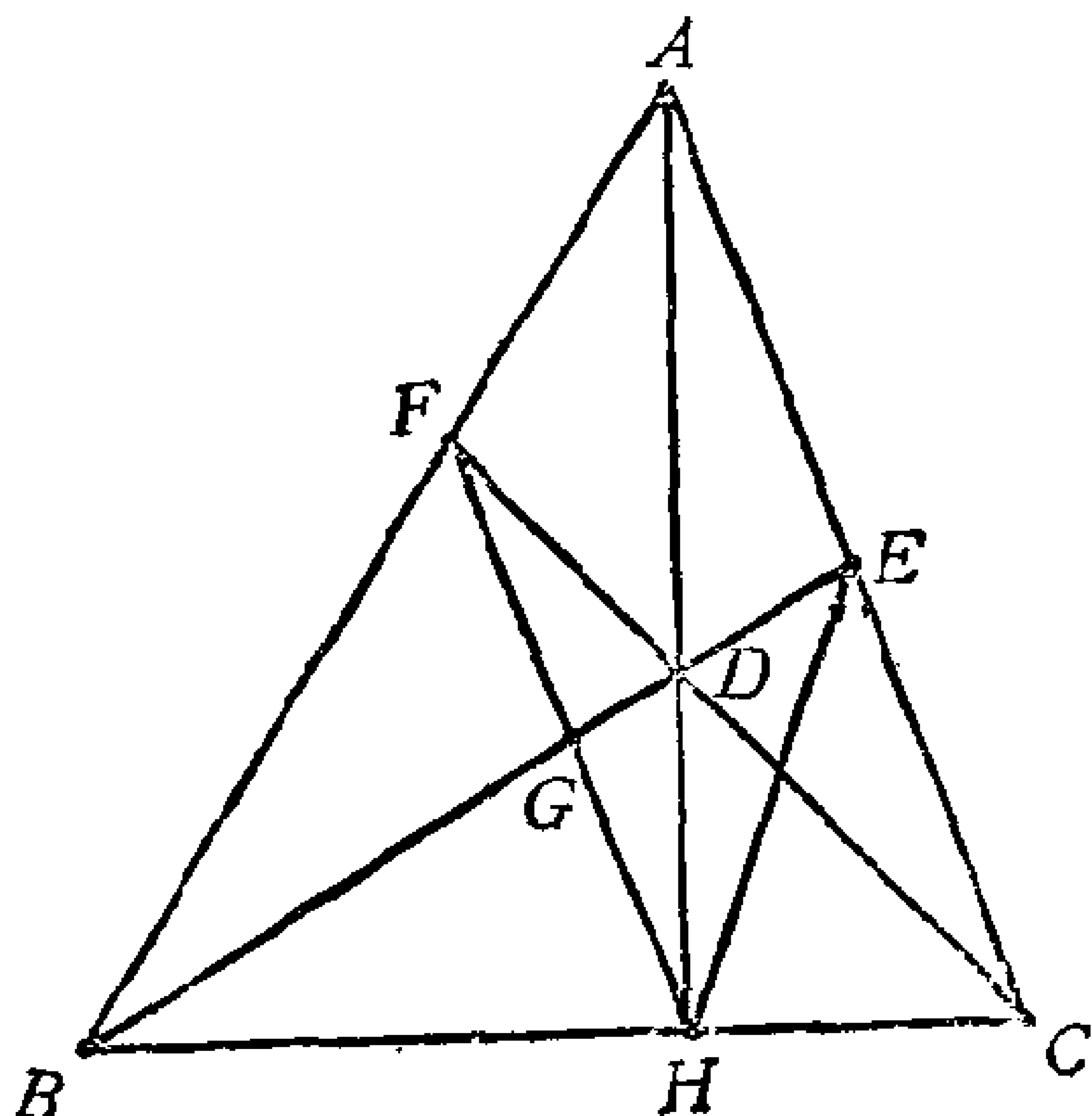


图74

交换b与c，可得HF的斜率$=-$（HE的斜率）．所以$\angle AHE=\angle AHF$．

解法三． 由BF，FD，DH，HB组成的四边形的一条对角线BD被另一条对角线HF以及AC调和分割于G点，E点，所以HF，HE；HB，HD是一调和线束．但是HB与HD垂直，所以它们平分由HF与HE形成的角．

附注． 比较上述不同证法中发生的特殊情况是有趣的．情况$D=H$在上面综合法及射影法中被排除，而在解析法中则否；情况$BD//AC$在综合法与解析法中被排除，但在射影法中则否；在综合法中，若D不在AH上，图形的外观将显著改变．

B-2． 设这四个相继整数是$x-1$，x，$x+1$，$x+2$．其乘积

$$P=(x-1)(x+2)x(x+1)=(x^2+x-2)(x^2+x)$$
$$=(x^2+x-1)^2-1.$$

若P为完全平方，则P与$(x^2+x-1)^2$将为相邻正整数，但两个完全平方数相邻是不可能的．

现在设P是一个完全立方数．则$x>2$，因为$x-1$是正的，而若$x=2$就有$P=24$与所设不符．整数x与$x+1$中必定有一个奇数．设x是奇数，它与$x-1$，$x+1$，$x+2$互素，故$(x-1)(x+1)$

$(x+2)=x^3+2x^2-x-2$也是一个完全立方数。但是当$x>2$时

$$x^3<x^3+2x^2-x-2<(x+1)^3,$$

即两个相邻整数的立方之间有一个完全立方数，这也是不可能的。设$x+1$是奇数，则它与$(x-1)x(x+2)=x^3+x^2-2x$互素，这又必定是一个完全立方。但是当$x>2$时

$$x^3<x^3+x^2-2x<(x+1)^3,$$

于是再次引出矛盾。所以P不能是完全立方数。

B-3. 对任意一次竞赛的结局T，令

$$U(T)=S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2.$$

我们称循环赛的一个结局为传递的，当且仅当不存在三个选手使得A胜B，B胜C，C胜A这样的情况。这时，"胜"是在选手集合上的一个传递的线性有序关系。所以我们可以将选手编号为P_1，$P_2,\cdots,P_n$使当且仅当$i>j$时P_i胜P_j。则选手们结局的得分分别是0，1，…，$n-1$。因而在这种传递的情况下有

$$U(T)=0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2=(n-1)n(2n-1)/6.$$

可见给定的条件是充分的。

现在考虑竞赛的一个非传递结局，即存在三个选手A,B，C使得A胜B，B胜C，C胜A。我们可以假定S_A是S_A，S_B，S_C中最小的数，则$S_A\leqslant S_B$。颠倒A与B之间比赛的胜负，我们得到一个新的结局，在那里A的得分是S_A-1，B的得分是S_B+1，其它选手的得分不变。从

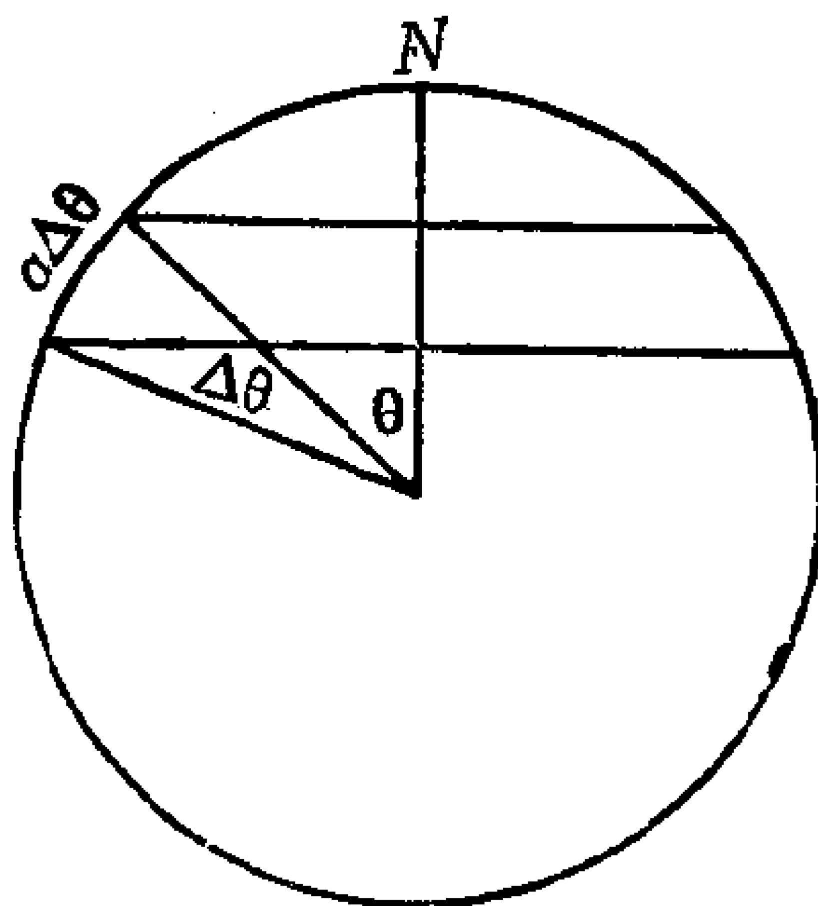
$$(S_A-1)^2-S_A^2+(S_B+1)^2-S_B^2=2(S_B-S_A)+2>0$$

看出U增加了。于是任意非传递竞赛的结局能改变致使U增加。但这不能永远改变下去，因为可能的结局数目是有限的。所以从一个非传递结局开始，经过有限次改变之后，结局成为传递的，并且U增加到$(n-1)n(2n-1)/6$。于是对于一个非传递结局有

$$U(T) < (n-1)n(2n-1)/6.$$

因而给定的条件是必要的。

B-4 我们取球的半径为 a 以便于处理量纲. 由对称性我们只须计算从某个固定点发出的所有弦的平均长度，该点取为球坐标系的北极N.用平行于余纬度的薄片将球面切为球带. 在余纬度θ与余纬度$\theta+\Delta\theta$之间的球带的近似面积为 $(2\pi a\sin\theta)(a\Delta\theta)$，而所有从 N 到这球带上的点的弦的近似长度为 $2a\sin(\theta/2)$.所以弦的长度的平均值是



$$L=\frac{4\pi a^3}{S}\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta,$$

式中$S=4\pi a^2$是球面积。

图75

由于$a=1$，有

$$L=\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\frac{4}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\Big|_0^\pi=\frac{4}{3}.$$

B-5. 设这给定的集合含有三个非共线点A, B, C, 使得$|AB|=r$, $|AC|=S$, 此处r, S为整数. 若P是到A,B距离都为整数的任意点，则由三角不等式，$|PA-PB|$是整数0，1，2，…，r中的一个. 所以P必定落到双曲线族

$$H_i=\{X: |XA-XB|=i\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,r-1$$

中的一条上面，或在$\overleftrightarrow{AB}$与AB的垂直平分线的并集H_0上。

同理，到A, C的距离都为整数的一点P必落在双曲线族

$$K_i=\{X: |XA-XC|=i\}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ s-1$$

中的一条上，或在$\overleftrightarrow{AC}$与AC的垂直平分线的并集K_0上. 我们给定的集合的任一点必定在集合$H_i\cap K_j$之一上. 由于$\overleftrightarrow{AB}\neq\overleftrightarrow{AC}$,故没有一个集合$H_i$与任一集合$K_j$相同. 若$i$与$j$有一不为0，$H_i\cap K_j$

必是两条不同时退化的二次曲线的交点，所以$H_i \cap K_j$至多含有四个点.但是$H_0 \cap K_0$也至多含有四个点因为H_0与K_0不共有一条直线。所以这给定的集合至多含有$4(r+1)(s+1)$个点，这与题设它有无穷个点相矛盾.这个矛盾表明所有给定的点是共线的。

B–6. 此运动的微分方程的向量式是

$$m\langle x'', y''\rangle = -R\langle x', y'\rangle - m\langle 0, g\rangle, \qquad (1)$$

式中撇号表示关于时间的导数，R是阻力系数.

因为运动的x分量由$x=f(t)$给出，由(1) 得

$$R = -m\frac{f''(t)}{f'(t)},$$

假定$f'(t)$不为零。则y满足微分方程

$$y'' = \frac{f''(t)}{f'(t)}y' - g.$$

除以$f'(t)$，便得恰当微分形式

$$\frac{y''}{f'(t)} - \frac{f''(t)}{[f'(t)]^2}y' = \left(\frac{y'}{f'(t)}\right)' = -\frac{g}{f'(t)}.$$

于是
$$\frac{y'}{f'(t)} = \frac{y'(0)}{f'(0)} - g\int_0^1 \frac{dr}{f'(r)},$$

故
$$y(t) = y(0) + \frac{y'(0)}{f'(0)}[f(t) - f(0)]$$
$$-g\int_0^1 f'(s)\int_0^s \frac{dr}{f'(r)}ds.$$

上式最后的积分可用分部积分

$$u = \int_0^s \frac{dr}{f'(r)}, \quad dv = f'(s)ds$$

给出
$$y(t) = \frac{y'(0)}{f'(0)}f(t) + y(0) - \frac{y'(0)f(0)}{f'(0)}$$

$$-g\cdot f(t)\int_0^1\frac{dr}{f'(r)}+g\int_0^1\frac{f(s)}{f'(s)}ds.$$

读者注意到前面的证明依赖于对任何t，$f'(t)\neq 0$的假定。我们来考虑这个假定。

设阻力与速度的依从关系为$R=\Phi(x',y')$，式中Φ：$R^2\to R$是一满足利普希茨条件

$$|\Phi(u_1,v_1)-\Phi(u_2,v_2)|\leqslant K\{|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\}$$

的函数，K是某个常数。则原来的微分方程即

$$\begin{aligned} x''&=-\frac{1}{m}\Phi(x',y')x'\\ y''&=-\frac{1}{m}\Phi(x',y')y'-g. \end{aligned}\tag{2}$$

而这个方程组对于任意初始条件（甚至时间可以不是0)有唯一解。显然若$x'(t_0)=0$，则(2) 的一解可由求解

$$y''=-\frac{1}{m}\Phi(0,y')y'-g$$

且令x为常数来得到。所以由唯一性推知，若对于任意的t_0有$x'(t_0)=0$，则x为常数。就f而言，这意味着f'处处不为零除非f是常数。于是除了在f是常数的平凡情形以外，我们先前的证明是正确的。显然，在平凡情形我们得不到关于R的性质的任何信息，所以无法从f去计算y。

B-7. 对于任意多项式p，题中的假设明显地蕴涵

$$\int_b^a f(x)p(x)dx=0.\tag{1}$$

维尔斯特拉斯逼近定理保证：给定$\varepsilon>0$,存在一个多项式p使得对于所有$x\in[a,b]$，有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon.$$

令M是$|f(x)|$在$[a,b]$上的某个界。则用(1) 求得

$$\left|\int_a^b f^2(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b f(x)\{f(x)-p(x)\}dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)-p(x)|dx\leqslant\int_a^b M\varepsilon dx=M\varepsilon(b-a)。$$

因为ε可任意小，故

$$\int_a^b f^2(x)dx=0。$$

又因为f是连续的，所以$f(x)\equiv 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。

第十九届（1958年11月22日）

上午试题

A-1. 设1) $f(m,1)=f(1,n)=1,\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1$；

2) $f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)+f(m-1,n-1)$, $m>1,\ n>1$；

3) $S(n)=\sum\limits_{a+b=n} f(a,b),\ a\geqslant 1,\ b\geqslant 1$。

求证对于$n\geqslant 2$，下列等式成立：

$$S(n+2)=S(n)+2S(n+1)。$$

A-2. 设 $R_1=1,\ R_{n+1}=1+\dfrac{n}{R_n},\ n\geqslant 1$。

求证对于$n\geqslant 1$，下列不等式成立：

$$\sqrt{n}\leqslant R_n\leqslant\sqrt{n}+1。$$

A-3. 假定下列微分积分方程初值问题有唯一解，试确定$u(t)$：

$$\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(s)ds,\ u(0)=1。$$

A-4. 某大学分配学生住房，每二人一间，并按下列顺序安排：$AA, AB, AC, BB, BC, AD, CC, BD, CD, DD$。其中$A$，$B$，$C$，$D$分别表示四，三，二，一年级的学生。现对$A, B, C, D$分别赋予数值，使得与上述安排对应的数列$A+A$，$A+B$，$A+C$，$B+B$，…，$D+D$，恰好成严格递降顺序。求此问题的一般解及最小正整数解。

A-5. 设n阶行列式主对角线上的元素全为零，其余元素全不为零。求证它的展开式中不为零的项数等于下式的值：

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

A-6. 设$a(x)$与$b(x)$是定义在$0 \leqslant x \leqslant 1$上的连续函数，且有$0 \leqslant a(x) \leqslant a < 1$。若方程

$$u=\max_{0 \leqslant x \leqslant 1}[b(x)+a(x)u]$$

的解可由$u=\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1}\dfrac{b(x)}{1-a(x)}$

确定。问需要附加什么条件？

A-7. 设a, b为互质的正整数，b为偶数，且对任一正整数q，存在非负整数$p=p(q)$，能使

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|$$

取极小值。求证

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{q=1}^{n} \frac{q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|}{n}=\frac{1}{4}.$$

下午试题

B-1. 设 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}, n \geqslant 1$

求证：1) $b_n=\frac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$，$n\geqslant 2$；2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$。

B-2. 任取$n+1$个不大于$2n$的正整数，求证其中至少有一个能被另一个整除。

B-3. 设边长为1的正方形被分成任意两个点集，则其中必有一个点集的直径（点集内两点间距离的最小上界）不小于$\sqrt{5}/2$。并确定一种分法，使两个点集的直径都不大于$\sqrt{5}/2$。

B-4. 设C为实数，函数$f(x)$满足下列两个等式：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$。

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$。

B-5. 从平面上一点引出的一条无穷段折线，其每段的长度依次构成调和数列$1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots$ 从第二段折线起，每一段都与前一段夹θ角。设此无穷折线最终有一个极限点，试确定其起点与极限点间的距离及方向。

B-6. 设一种完全定向图由n个已知点确定。即对于点集$\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$中任意二点p_i,p_j，都有确定的方向$p_i\to p_j$(或$p_j\to p_i$)。求证已知的点集存在一种排列

$$[p_{i_1},\ p_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_n}]=[a_1,a_2,\cdots,a_n],$$

能成立连锁定向关系：$a_1\to a_2\to a_3\to\cdots\to a_n$。

B-7. 设$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$是$1,2,\cdots,n$的一个排列。若$a_i>a_j$对于所有的$j>i$都成立，则称a_i是此排列的一个“大”数。试计算全体$n!$个排列中所有“大”数的平均值。

解答

A-1. 本题可用纯代数方法论证如下：

$$
\begin{aligned}
S(n+2) &= \sum_{j=1}^{n+1} f(n+2-j,j) \\
&= f(n+1,1) + \sum_{j=2}^{n} \{f(n+1-j,j) + f(n+2-j,j-1) \\
&\quad + f(n+1-j,j-1)\} + f(1,n+1) \\
&= \left\{f(n+1) + \sum_{j=2}^{n} f(n+1-j,\ j)\right\} \\
&\quad + \left\{\sum_{k=1}^{n-1} f(n+1-k,k) + f(1,n)\right\} + \sum_{k=1}^{n-1} f(n-k,k) \\
&= S(n+1) + S(n+1) + S(n).
\end{aligned}
$$

其中第三步后两个和式中使用了代换 $j=k+1$ 及两个明显的等式

$$f(n+1,1)=f(n,1),\quad f(1,n+1)=f(1,n).$$

A-2. 当$n=1$时,$\sqrt{1}=R_1<\sqrt{1}+1$. 结论成立. 假定$n=k$时, $\sqrt{k}\leqslant R_k\leqslant\sqrt{k}+1$, 则

$$
\begin{aligned}
\sqrt{k+1}-1 &= \frac{k}{\sqrt{k+1}+1} < \frac{k}{\sqrt{k}+1} \leqslant \frac{k}{R_k} \leqslant \frac{k}{\sqrt{k}} \\
&= \sqrt{k} < \sqrt{k+1}.
\end{aligned}
$$

因此 $$\sqrt{k+1} < 1+\frac{k}{R_k} = R_{k+1} < \sqrt{k+1}+1.$$

由完全归纳法知对任何自然数n, 本题结论正确.

A-3. 令 $b=\int_0^1 u(s)ds$, 则b为一待定常数. 本题随即化为普通的线性方程

$$u'(t)=u(t)+b.$$

其通解为$u(t)=-b+Ce^t$, C为任意常数.

由初值条件及b的代换条件可得

$$u(0)=-b+C=1,$$

$$b=\int_0^1(-b+Ce^s)ds=-b+C(e-1).$$

据此解得$b=\frac{e-1}{3-e}$, $C=\frac{2}{3-e}$.

于是 $$u(t)=\frac{2e^t-e+1}{3-e}$$

即为本题所求的唯一解。

A-4. 依题意需解下列不等式组

$$2A>A+B>A+C>2B>B+C>A+D>$$
$$2C>B+D>C+D>2D. \quad (1)$$

显然可见$A>B>C>D$. 令

$$A=B+\alpha,\ B=C+\beta,\ C=D+\gamma,$$

则α,β,γ皆为正数。

在(1)中第一、二、四、八、九个不等式，都是$A>B>C>D$的推论，而第三、五、六、七个不等式可以化为

$$\alpha>\beta,\ \gamma>\alpha,\ \alpha+\beta>\gamma,\ \gamma>\beta.$$

其中第四个不等式可由第一、二个推出。再令

$$\alpha=\beta+\delta,\ \gamma=\alpha+\varepsilon,$$

则δ,ε皆为正数，并且$\alpha+\beta>\gamma$可化为$\beta>\varepsilon$. 又令$\beta=\varepsilon+\zeta$, 则ζ为正数。于是

$$\alpha=\delta+\varepsilon+\zeta,\ \beta=\varepsilon+\zeta,\ \gamma=\delta+2\varepsilon+\zeta.$$

进而推得$A=2\delta+4\varepsilon+3\zeta+D$,

$$B=\delta+3\varepsilon+2\zeta+D, \quad (2)$$

$$C=\delta+2\varepsilon+\zeta+D.$$

在(2)中，D可取任意实数，δ,ε,ζ可取任意正数。由上面

的推导过程可知，等式组(2)即为不等式组(1)的通解。

注意当A,B,C,D皆为整数时，$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$亦必皆为整数。为了确定(1)的最小正整数解，只须令$D=\delta=\varepsilon=\zeta=1$，即可求得。

$$A=10,\ B=7,\ C=5,\ D=1.$$

A-5. 由定义知$n\times n$矩阵$M=(m_{ij})$的行列式的展开式为

$$\sum_{\Pi}\varepsilon(\Pi)m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{nj_n},$$

其中 $$\Pi=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ j_1 & j_2\cdots j_n\end{pmatrix}$$

表示$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列，$\varepsilon(\Pi)$等于$+1$或-1，由Π为偶排列或奇排列而定。依题意知，当且仅当Π的排列中有“不动点”(即至少存在一个$j_i=i$)时，行列式的展开式中对应项为零。于是本题化为求Π的排列中没有不动点的排列个数问题。设A_n为所求的结果，我们先证下列关系式成立：

$$A_n=(n-1)(A_{n-1}+A_{n-2}).\tag{1}$$

令B_n为$\Pi\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ 2 & j_2\cdots j_n\end{pmatrix}$中没有不动点的排列个数，则易知$A_n=(n-1)B_n$。(因为排列中1下面的2可分别用$3,\cdots,n$代替。)

为了求得计算B_n的表达式，可分两种情形考虑：

(i) $$\Pi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots n\\ 2 & 1 & j_3\cdots j_n\end{pmatrix}$$

(ii) $$\Pi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\cdots k\cdots n\\ 2 & j_2 & j_3\cdots 1\cdots j_n\end{pmatrix},\quad j_2\neq 1.$$

在情形(i)中，易见没有不动点的排列个数为A_{n-2}。

在情形(ii)中，若删去Π中的第1列，同时将第k列下面的1改为2，则易见辅助排列

$$\Pi^*\begin{pmatrix}2 & 3\cdots k\cdots n\\ j_2 & j_3\cdots 2\cdots j_n\end{pmatrix}$$

中不动点的排列个数为A_{n-1}，并且Π^*与(ii)中的Π成一一对应关系。

综合(i)，(ii)两种情形即证得关系式(1)成立：

$$A_n=(n-1)B_n=(n-1)(A_{n-1}+A_{n-2}).$$

对(1)施行变换$A_n=n!C_n$可得

$$n!C_n=(n-1)(n-1)!C_{n-1}+(n-1)!C_{n-2}.$$

化简得 $C_n-C_{n-1}=-\frac{1}{n}(C_{n-1}-C_{n-2}).$

由迭代法推得

$$C_n-C_{n-1}=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)(C_2-C_1)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}. \tag{2}$$

其中应用了明显的关系式$A_1=0$，$C_1=0$；$A_2=1, C_2=\frac{1}{2}$.

对(2)施行求和运算即得

$$C_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\Longrightarrow A_n=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}.$$

A-6. 因为在闭区间上连续的函数必定达到它的极大（极小）值，并注意到非负函数$a(x)$的上界小于1。据此即可判别下列五个命题都是等价的：

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}[b(x)+a(x)u]. \tag{1}$$

$$\forall x,\quad u\geqslant b(x)+a(x)u. \tag{2}$$

$$\forall x,\quad [1-a(x)]u\geqslant b(x). \tag{3}$$

$$\forall x,\quad u\geqslant\frac{b(x)}{1-a(x)}. \tag{4}$$

$$u=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{b(x)}{1-a(x)}. \tag{5}$$

在(2)，(3)，(4)中都至少有一个x能使等号成立。

据上所述，不需附加任何条件，方程(1)恒以(5)为其唯一解。

A-7. 我们有

$$q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{b}|pb-qa|.$$

依题意，$\forall q$，欲选择$p=p(q)$使$|pb-qa|$达到极小值，那末这个极小值将依赖于qa除以b的余数而定。当q变动时，由于a，b互质，故可令qa关于模b的完全剩余系为$-C+1$，$-C+2$，…，-1，0，1，…，$C-1$，C。其中$C=b/2$（b为偶数）。我们算出下式的和以备应用：

$$\frac{1}{b}(0+1+2+\cdots+C-1+C+C-1+\cdots+1)=\frac{C^2}{2C}=\frac{b}{4}.$$

令$n=br+s$，$0\leqslant s<b$，则

$$\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=r\frac{b}{4}+\sum_{q=br+1}^{br+s}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|.$$

注意当q从1变动到br时，计有r次通过上述之完全剩余系(mod b)，若$s=0$则上列等式右边的和号消失。

再注意$p(q)$是最邻近于$\frac{qa}{b}$的非负整数，故有

$$q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|=\left|p-\frac{qa}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

于是 $$\left|\frac{1}{4}n-\sum_{q=1}^{n}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\right|=\left|\frac{s}{4}-\sum_{q=br+1}^{br+s}q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|\right|$$

$$\leqslant \frac{s}{4} + s \cdot \sup_q q\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{3}{4}s < \frac{3}{4}b.$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} q\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right|\right| < \frac{3b}{4n}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} q\left|\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right| = \frac{1}{4}.$$

B-1. 我们有

$$n!b_n = \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!(n-k+1)!$$

$$\Longrightarrow \quad 2n!b_n = 0!n! + \sum_{k=1}^{n}[k!(n-k)! + (k-1)!(n-k+1)!] + n!0!$$

$$= 2n! + (n+1)\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(n-k)!$$

$$= 2n! + (n+1)[(n-1)!b_{n-1}]$$

$$\Longrightarrow \quad b_n = 1 + \frac{n+1}{2n}b_{n-1}.$$

2) 令 $b_n = 2 + C_n$，则

$$nC_n = 1 + \frac{n+1}{2(n-1)}(n-1)C_{n-1}.$$

下面用数学归纳法证明$nC_n \leqslant 6$。

易知$n=1,2,3$时($C_1=0$，$C_2=1/2$，$C_3=2/3$)，结论正确。假定$n=k-1$时($k\geqslant 4$)，结论正确，那末

$$kC_k \leqslant 1+\frac{k+1}{2(k-1)}\cdot 6 \leqslant 1+\frac{5}{2\cdot 3}\cdot 6=6.$$

第二个不等式成立的理由在于

$$\frac{k+1}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}\leqslant 1+\frac{2}{3},\ (k\geqslant 4).$$

由于$0\leqslant C_n\leqslant\frac{6}{n}$，因此$C_n\to 0$，$b_n\to 2$；$(n\to\infty)$。

附注：利用下列不等式可以直接证明

$$\lim_{n\to\infty} b_n=2.$$

$$2+\frac{2}{n}<b_n=2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1}$$

$$<2+\frac{2}{n}+(n-3)\binom{n}{2}^{-1},\ n\geqslant 3.$$

B-2. 每一个正整数都可以唯一地写成 $2^p q$ 的形式。其中p为非负整数，q为该正整数的最大奇约数。由于集$S=\{1,2,3,\cdots,2n\}$中的奇数只有n个，因此从S中任选$n+1$个数里面至少有两个的最大奇约数相同。令此二数为$2^{p_1}q$与$2^{p_2}q$，则$p_1\neq p_2$。若$p_1<p_2$，则$2^{p_1}q\,|\,2^{p_2}q$。

B-3. 设如图 76，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E和F分别是AB边和BC边的中点。于是

$$|AF|=|DF|=|DE|=|CE|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

假定正方形被划分成两个点集S和T，它们的直径都小于$\sqrt{5}/2$。若$A\in S$，则$F\in T$，$D\in S$，$E\in T$，$C\in S$。但是$|AC|=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$，这与$S$的直径小于$\sqrt{5}/2$矛盾。(若$A\in T$,亦将

导至与T的假定矛盾。）

另一方面，我们可将正方形$ABCD$划分成两个全等的长方

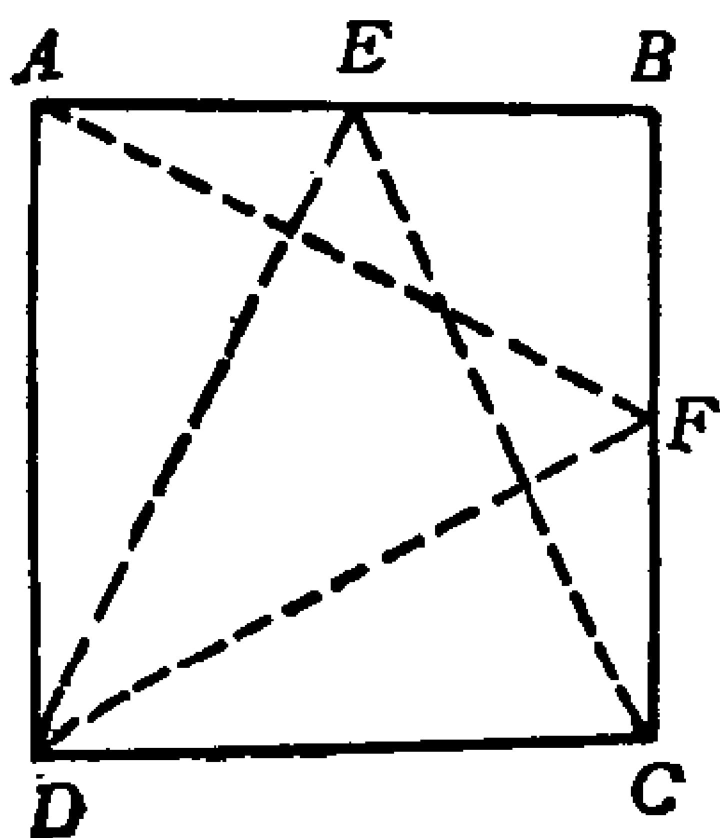


图76

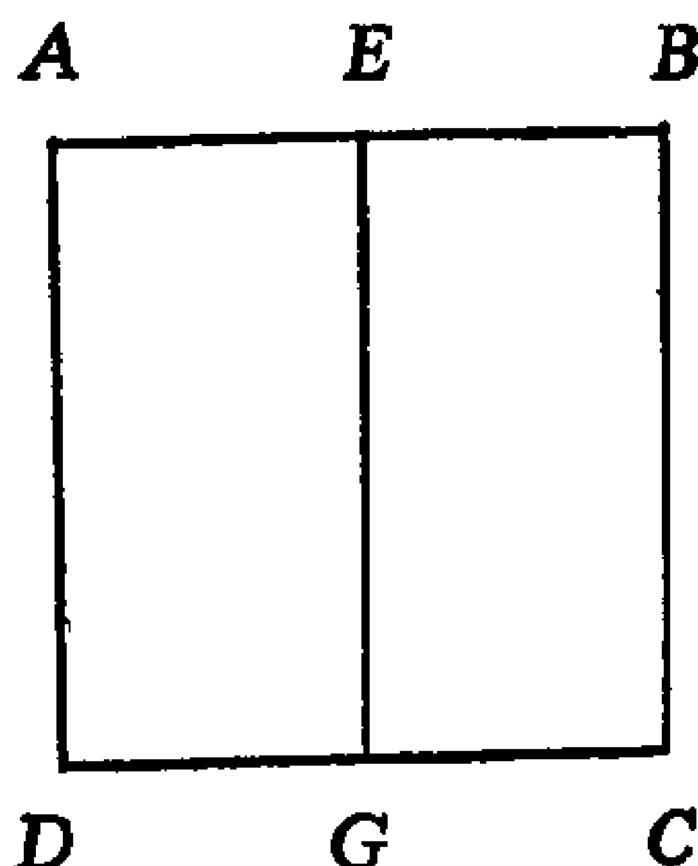


图77

形（如图77），其直径皆不小于$\sqrt{5}/2$。

图中分割线段EG上的点可任意归属两长方形之一。当E，G二点分属两长方形时，它们的直径都等于$\sqrt{5}/2$，否则其中之一的直径将会小于$\sqrt{5}/2$。

B-4. 应用具有拉格朗日型余项的泰勒公式，我们有：

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x)),$$

$$0<\zeta<1. \qquad (1)$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-$$

$$\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)),0<\eta<1. \qquad (2)$$

(1) ± (2)并整理即得(3)与(4)：

$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$$

$$-\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x))+\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)). \qquad (3)$$

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(x+\zeta(x))-$$

$$\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)). \qquad (4)$$

当$x\to\infty$时，$x+\zeta(x)\to\infty$，$x-\eta(x)\to\infty$。因此

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty}f''(x)=C-2C+C-\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 0=0. \qquad (3)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}\left(C-C-\frac{1}{6}\cdot 0-\frac{1}{6}\cdot 0\right)=0. \qquad (4)$$

B-5. 将题设的无穷折线置于复平面上来考察。令起始线段位于0，1之间，则第二段折线将位于1，$1+\frac{1}{2}e^{i\theta}$之间，因而此线段可用复数$\frac{1}{2}e^{i\theta}$表示。依此类推，第n段折线可用复数$\frac{1}{n}e^{i(n-1)\theta}$表示。

将所得的n个复数相加得$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}$，此和(复数）恰好表示折线的起点至第$n$段折线的终点的向量。于是本题化为确定下列无穷（复）级数的收敛性及求和问题：

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}. \qquad (1)$$

当$\theta=0$或2π的整数倍时，(1）成为调和级数，因而发散。下面将证明(1）在其他情况下都收敛。在证明中需要用到关于变号级数的狄利克莱收敛性判别法：

若级数$\sum_{p=1}^{\infty}a_p$的部分和有界，实序列b_1，b_2，b_3，…单调

地趋于零，则级数$\sum_{p=1}^{\infty}a_pb_p$收敛。

令$b_p=\frac{1}{p}$，$a_p=e^{i(p-1)\theta}$，则当$e^{i\theta}\neq 1$时，我们有

$$\left|\sum_{p=1}^{n}a_p\right|=\left|\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant\frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

因此(1)满足狄利克莱判别条件，从而成为收敛级数（$e^{i\theta}\neq 1$）。

为了计算（1）的和，需要应用阿贝尔定理：

若$\sum_{p=1}^{\infty}c_p$收敛，则$\lim\limits_{r\to 1-0}\sum_{p=1}^{\infty}c_pr^p=\sum_{p=1}^{\infty}c_p$。其中$r$为实变数。

于是我们有

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}=e^{-i\theta}\lim_{r\to 1-0}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(re^{i\theta})^p.$$

令$Z=re^{i\theta}$，则上式右边极限号后的级数是复函数$-\log(1-z)$在$|z|<1$内的主值泰勒级数展开式。因此

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}=-e^{i\theta}\lim_{r\to 1-0}\log(1-re^{i\theta})=$$

$$-e^{i\theta}\log(1-e^{i\theta}).$$

由于 $1-e^{i\theta}=2\sin\frac{1}{2}\theta e^{\frac{1}{2}i(\theta-\pi)}$，$0<\theta<2\pi$，

且$2\sin\frac{1}{2}\theta>0$。$\frac{1}{2}(\theta-\pi)$是辐角的主值（因为$-\pi<\frac{1}{2}(\theta-\pi)<\pi$），故有

$$\log(1-e^{i\theta})=\log(2\sin\frac{1}{2}\theta)+\frac{1}{2}i(\theta-\pi).$$

于是 $$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}=-e^{-i\theta}\left[\log\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)+\frac{1}{2}i(\theta-\pi)\right].$$

由此求得无穷折线从起点至极限点间的距离为

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{i(p-1)\theta}\right|=\sqrt{\left(\log 2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^2+\frac{1}{4}(\theta-\pi)^2}. \tag{2}$$

从起点至极限点的向量辐角为

$$\pi-\theta+\arg\left[\log\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)+\frac{i}{2}(\theta-\pi)\right]. \tag{3}$$

B-6. 对n用数学归纳法来证明。$n=2$时，命题虽然正确($n=1$是平凡情形)。假定$n=2, 3, \cdots, k$时，命题正确，则可从$k+1$个点决定的完全定向图中任取一点b，并将其余的k个点关于点b分成下列两个子集：

$$A=\{x: x\to b\},\quad C=\{x: b\to x\}.$$

依题意知，A和C是两个局部完全定向图。若A含有p个点，C含有q个点，则 $p+q=k$。由归纳假定知A中的点存在连锁定向排列$a_1\to a_2\to\cdots\to a_p$。同理可知$C$中的点存在连锁定向排列 $c_1\to c_2\to\cdots\to c_q$再根据对$A$与$C$作的定义即得 $a_1\to a_2\to\cdots\to a_p\to b\to c_1\to c_2\to\cdots\to c_q$。

顺便指出，当A, C 之一为空集的情形，更易得知命题的正确性。

B-7. 令σ是一个排列，$N_i(\sigma)=1$ 表示σ的第i个数是“大”数，$N_i(\sigma)=0$表示σ的第i个数不是“大”数。于是从 1 到 n 的全体$n!$ 个排列中，$N_i(\sigma)$ 的平均值应是$\frac{1}{n-i+1}$。因为a_i前面的 $i-1$ 个数共有P_n^{i-1}种排法，而每一排法后面都可以从余下的 $n-i+1$个数中选出一个最大的排在第i个位置。由此可得

$$\sum_{\pi_i} N_i(\sigma)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+2)\cdot(n-i)!$$

令$i=1,\cdots,n$，即得本题所求“大”数的平均值为

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1.$$

第二十届（1959年11月21日）

上午试题

A-1. 设n为正整数。求证x^n-x^{-n}可以表成$x-x^{-1}$的实系数多项式的充要条件是n为奇数。

A-2. 设复平面上一正三角形的两个顶点分别是z_1和z_2。求证第三个顶点是$-\omega z_1-\omega^2 z_2$。其中ω是1的虚立方根。

A-3. 设z为任意复数，求适合下列等式的复函数f：

$$f(z)+zf(1-z)=1+z.$$

A-4. 设$f(x)$与$g(x)$是定义在全体实数上的两个实函数。求证存在两个实数x_1与x_2，满足下列三个不等式：

$$0\leqslant x_1\leqslant 1,\quad 0\leqslant x_2\leqslant 1,\quad |x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

A-5. 沿水平直线方向飞行的一只麻雀正上方50呎处有一只鹫，正下方100呎处有一只鹰。鹫和鹰一起向着麻雀飞去捕食，并同时到达捕捉目标。已知鹰的飞行速度是麻雀的2倍。问三只鸟各飞行了多远距离？鹫的飞行速度是多少？

A-6. 设m，n是大于1的整数，a_1，…，a_{m+1}是实数。求证存在m个$n\times n$矩阵$A_1,\cdots$，A_m，满足下列两个条件：

(i) $Det(A_j)=a_j$，$j=1,\cdots,m$；(ii) $Det(A_1+\cdots+A_m)$

$=a_{m+1}$。

A-7. 设f在闭区间$[a, b]$上有连续一阶导数，且当$x\in[a, b]$时，不成立连等式$f(x)=f'(x)=0$。求证：在$[a, b]$上存在一个有连续一阶导数的函数g，当$x\in[a, b]$时，恒成立

$$fg'-f'g>0.$$

下午试题

B-1. 设X，Y的正半轴上各有m个和n个定点。在此m及n个点中，每两点连一线段，如果每三条线段不共点，试确定所连全体线段交点的个数。（不包括线段的端点。）

B-2. 设c为任一正实数。求证c可用无穷多种方法选择以下序列的项表成收敛级数的和。

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \cdots, \frac{1}{10n}, \cdots$$

B-3. 试举出一个从$[0, 1]$映射到$[0, 1]$的连续函数$f(x)$，对于每一个x的值都有无穷多个函数值与之对应。

B-4. 已知下列5×5矩阵

$$\begin{bmatrix} 11 & 17 & 25 & 19 & 16 \\ 24 & 10 & 13 & 15 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 2 & 18 \\ 23 & 4 & 1 & 8 & 22 \\ 6 & 20 & 7 & 21 & 9 \end{bmatrix}.$$

试从这个矩阵中选出5个元素，使得它们任何两个都不位于相同的行或列，并使其中最小的一个有尽可能大的值。证明你所选答案的正确性。

B-5. 已知两直线方程：

(i) $x=t+1$, $y=2t+4$, $z=-3t+5$;

(ii) $x=4t-12$, $y=-t+8$, $z=t+17$.

求与此二直线相切的最小球面方程。

B-6. 设正无理数x与y满足下列等式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1.$$

求证两序列 $[x]$, $[2x]$, $\cdots$, $[nx]$, $\cdots$与 $[y]$, $[2y]$, $\cdots$, $[ny]$, $\cdots$

合在一起恰好不重复地构成自然数集。记号[ ]表示不超过其内所含数值的最大整数。

B-7. 设 f_n对每个正整数n都是n个实变数的实对称函数，且对一切n及任何$n+2$个实数$x_1,\cdots x_{n+1},y$满足下列三个等式：

$$f_n(x_1+y,\cdots,x_n+y)=f_n(x_1,\cdots,x_n)+y; \qquad (1)$$

$$f_n(-x_1,\cdots,-x_n)=-f_n(x_1,\cdots,x_n); \qquad (2)$$

$$f_{n+1}(f_n(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})=f_{n+1}(x_1,\cdots,x_{n+1}). \qquad (3)$$

求证：

$$f_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n). \qquad (4)$$

解答

A-1. 令$z=x-x^{-1}$。若有实系数多项式$P_n(z)$满足等式

$$x^n-x^{-n}=P_n(z),$$

则$P_n(z)$中z^n的系数必等于1. 比较上列等式两边x^{-n}的系数，因为$-x^{-n}=(-x)^{-n}$，所以n必为奇数。必要性获证。

下面用数学归纳法证明充分性。

易知$n=1$时，$P_1(z)=z$，命题正确。

假定$n=3,5,\cdots,2k-1$时($k\geqslant1$)，命题正确，那么由

$$(x^2+x^{-2})(x^{2k-1}-x^{1-2k})=x^{2k+1}-x^{-2k-1}+x^{2k-3}-x^{3-2k}$$

可得 $\quad(z^2+2)P_{2k-1}(z)=x^{2k+1}-x^{-2k-1}+P_{2k-3}(z)$。

若定义 $\quad P_{2k+1}(y)=(y^2+2)P_{2k-1}(y)-P_{2k-3}(y)$，

则有 $\quad P_{2k+1}(z)=x^{2k+1}-x^{-2k-1}$。

即$n=2k+1$时，命题正确。也就是说，n为任意正奇数时，x^n-x^{-n}都能用$x-x^{-1}$的实系数多项式表示。

A-2。依题意，令正三角形的第三个顶点为z_3，则

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\alpha=e^{\pm\frac{\pi i}{3}}.$$

易知 $\alpha^3=-1$，$\alpha^2-\alpha+1=0$。从而可得

$$z_3=(1-\alpha)z_1+\alpha z_2=-\alpha^2z_1-\alpha^4z_2=-\omega z_1-\omega^2z_2,$$

其中$\omega=\alpha^2=e^{2\pi i/3}$是1的复立方根之一。

因为给定z_1，z_2后，z_3有二解，所以若取$\omega=\alpha^2=e^{-2\pi i/3}$，即得另一解$z_3=-\omega^2z_1-\omega z_2$。

A-3。我们有

$$f(z)+2f(1-z)=1+z,\ \forall z. \tag{1}$$

在(1)中将z换成$1-z$得

$$f(1-z)+(1-z)f(z)=2-z. \tag{2}$$

由(1)，(2)消去$f(1-z)$得

$$(1-z+z^2)f(z)=1-z+z^2.$$

因此，当$1-z+z^2\neq0$，即$z\neq e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$时，$f(z)=1$。

记$\alpha=e^{i\pi/3}$，则$\bar{\alpha}=e^{-i\pi/3}$，$\alpha+\bar{\alpha}=1$，$\alpha\bar{\alpha}=1$。

令$f(\alpha)=1+\beta$，$f(\bar{\alpha})=1+\gamma$，$z=\alpha$，则(1)化为

$$\beta+\alpha\gamma=0.$$

于是$\gamma=-\bar{\alpha}\beta$，其中$\beta$可取任意复数。($z=\bar{\alpha}$时亦得同样的结果。)

因此所求满足等式（1）的复函数f是

$$f(\alpha)=1+\beta,\quad \forall\beta;$$

$$f(\bar{\alpha})=1-\bar{\alpha}\beta,\quad \forall\beta;$$

$$f(z)=1,\qquad z\neq e^{\pm\frac{\pi i}{8}}.$$

A-4. 我们有

$$\begin{aligned}1=&|(1-f(1)-g(1))+(f(1)+g(0))+\\&(f(0)+g(1))-(f(0)+g(0))|\\\leqslant&|1-f(1)-g(1)|+|f(1)+g(0)|+\\&|f(0)+g(1)|+|f(0)+g(0)|.\end{aligned}$$

上式最后四个绝对值中至少有一个不小于1/4。因此在(0,0)，(0,1)，(1,0) 及 (1,1) 中，至少有一点的坐标满足本题求证之三个不等式。

A-5. 因题意没有特别指明，故可假定三种鸟都以匀速飞行。我们先作一般的考虑：

设鹫的飞行速度为v，麻雀的飞行速度为rv，$0<r<1$。

假定麻雀从（0，0）出发，沿x轴正向飞行，经时刻t后位于（rvt，v）处。鹫从（0,h）出发（如图所示，$h>0$），经时刻t后位于（x,y）。依题意，后者的飞行方向始终正对前者。因此有

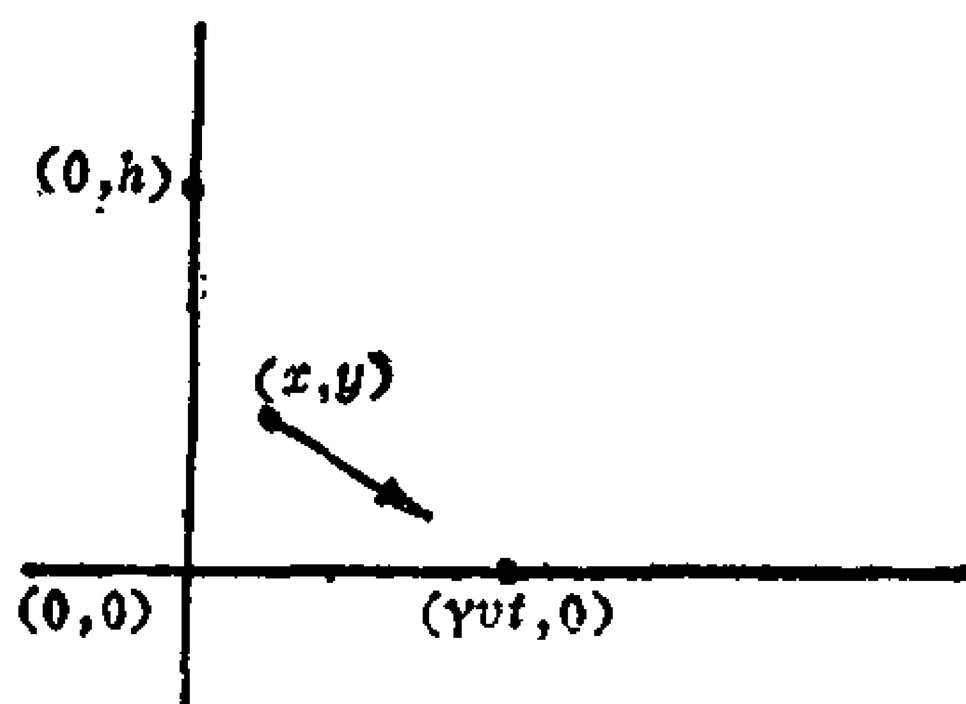


图78

$$\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{rvt-x}{-y}. \tag{1}$$

易知当y非负时，恒有$\frac{dy}{dt}<0$。取y作自变量，(1)即化为

$$y\frac{dx}{dy}=x-rvt. \tag{2}$$

因v为常数，故有

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=v. \Longrightarrow -\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}=v\frac{dt}{dy}. \tag{3}$$

等式左边冠以负号，是由于$dt/dy<0$。

对 (2) 两边微分得

$$y\frac{d^2x}{dy^2}+\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}-rv\frac{dt}{dy}.$$

将 (3) 代入即得

$$y\frac{d^2x}{dy^2}=r\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}.$$

令$z=dx/dy$，则得一阶微分方程

$$y\frac{dz}{dy}=r\sqrt{1+z^2}. \Longrightarrow r\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

解得　　$r\log y=\log(z+\sqrt{1+z^2})+C.$　　(4)

注意$y=h$时，$z=dx/dy=0$，从而有$C=r\log h$。

(4) 可化为

$$\left(\frac{y}{h}\right)^r=z+\sqrt{1+z^2}.$$

解出z得

$$2\frac{dx}{dy}=\left(\frac{y}{h}\right)^{r}-\left(\frac{y}{h}\right)^{-r}. \tag{5}$$

再由初始条件$x=0$，$y=h$即可求得(5)的解：

$$2x=\frac{h}{1+r}\left(\frac{y}{h}\right)^{1+r}-\frac{h}{1-r}\left(\frac{y}{h}\right)^{1-r}+\frac{2rh}{1-r^2}, \tag{6}$$

其中$y>0$。

当$y\to 0+$时，由(6)，(5)及(2)可得

$$x\to\frac{rh}{1-r^2},\quad y\frac{dx}{dy}\to 0,\quad x-rvt\to 0.$$

因此，鹫经过时刻$t=\dfrac{h}{v(1-r^2)}$到达位置$\left(\dfrac{rh}{1-r^2},\ 0\right)$. 经过同一时刻，麻雀与鹫飞行的路程分别是

$$\frac{rh}{1-r^2}与\frac{h}{1-r^2}.$$

现在回到本题的数值计算上来：

按鹰的出发位置，可取y轴的下方为正向。因此有$h=100$呎，$r=1/2$。麻雀飞行的路程为200/3呎，鹰飞行的路程为400/3呎。

关于鹫的飞行情况：$h=50$呎，r可由下列方程确定

$$\frac{50r}{1-r^2}=\frac{200}{3}.\ \Longrightarrow r=\frac{-3+\sqrt{73}}{8}.\ (舍去负根)$$

鹫的飞行速度(是麻雀的$1/r$倍)可以表示为

$$v=\frac{v_1(3+\sqrt{73})}{16}\approx 0.721v_1.$$

其中v_1是鹰的速度.

三只鸟飞行的时间都是$\dfrac{400}{3v_1}$，而鹰的飞行路程为

$$\frac{400}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{73}}{16}\approx 96.2(\text{呎})$$

A-6. 令

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} a_2 & b & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

$$A_i=\begin{pmatrix} a_i & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},\quad i=3,\ 4,\ \cdots,\ m.$$

矩阵中没写出的元素都是零。A_2 中 的 b 是 待 定 常 数。易 见 $\det(A_j)=a_j$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 且有

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix} s & b & & & \\ 1 & m & & & \\ & & m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m\end{pmatrix},$$

其中$s=a_1+a_2+\cdots+a_m$。由此可得

$$det(A_1+A_2+\cdots+A_m)=(sm-b)m^{n-2}.$$

于是取 $b=sm-a_{m+1}m^{-n+2}$

即可得命题求证之结论。

A-7. 设f:$[a,\ b]\to R$是有连续导数的函数，且f与f'在定义域内同一点不同时为零。令 $S=\{x:f(x)=0\}$，则S必为有限集。否则S中就会有一个聚点$x_0\in[a,\ b]$，使得S中的一个点列$\{x_n\}$成立$x_n\to x_0$，且$x_n\neq x_0$。由$f(x_0)=0$及f的连续性可得

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0.$$

这与题设条件矛盾。

由于 f' 在 S 集上不为零，故可找到一个多项式 h，使得 $f'(x)h(x)=-1$，对于所有的 $x\in S$ 都成立。令

$$g_c(x)=xf(x)+ch(x),$$

$$w_c(x)=f(x)g_c'(x)-f'(x)g_c(x)$$
$$=(f(x))^2+c(f(x)h'(x)-f'(x)h(x)),$$

其中 c 为某个正数。我们来证明，对于充分小的正数 c，w_c 在 $[a, b]$ 上恒取正值，从而 g_c 即为所求的函数。

当 $x\in S$ 时，显然有 $fh'-f'h=1>0$。由 $fh'-f'h$ 的连续性知，在集 $T\supseteq S$ 内亦有 $fh'-f'h>0$。其中 T 是 $[a, b]$ 上的一个适当的开集。再者，$|fh'-f'h|$ 在 $[a, b]$ 上有界 M。在紧集 $[a, b]-T$ 上，$f^2\geqslant\varepsilon>0$。因此若 c 满足不等式 $0<c<\varepsilon/M$，则当 $x\in[a, b]-T$ 时有

$$w_c(x)\geqslant(f(x))^2-c\,|f(x)h'(x)-f'(x)h(x)|$$
$$\geqslant\varepsilon-cM>0.$$

当 $x\in T$ 时有

$$w_c(x)\geqslant c(f(x)h'(x)-f'(x)h(x))>0.$$

总之，在 $[a, b]$ 上恒有 $w_c>0$，从而 g_c 即为所求之函数。

B-1. 在X及Y轴上各任取两点连成一凸四边形，其对角线的交点必在 I 象限内。反之，所连一切线段的交点都可用此方法得到。依题意，在I象限内无三线段共点的情形出现。因此所连线段的交点都是唯一确定的，其总数应是

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2}=\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}.$$

B-2. 我们来证明更一般的命题：设 c 为任一正实数，$a(1)$，

$a(2)$，…，$a(n)$，…是任一满足条件$n\to\infty$时，$a(n)\to 0$的正数序列，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \tag{1}$$

发散．那么存在无穷多的严格递增正整数序列n_1，n_2，…使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(n_i)=c.$$

令k为适合$a(k)<c$的某个整数．定义$n_1=k$，n_2是使$a(n_1)+a(n_2)<c$成立的最小整数，…，一般地，n_t是使下列不等式成立的最小整数：

$$a(n_1)+a(n_2)+\cdots+a(n_{t-1})+a(n_t)<c.$$

因$n\to\infty$时，$a(n)\to 0$，故上面定义的序列$\{n_i\}$必定存在，并且正项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(n_i) \tag{2}$$

以c为其上界．现证其和等于c．

$\forall\varepsilon>0$，选取$p>k$，使对所有的$n>p$成立$a(n)<\varepsilon$．由(1)的发散性知，(1)内有无穷多的项不在(2)内出现．设$q>p$，对任何i都有$n_i\neq q$．因$n_1<q$，故$n\to\infty$时，必存在足码r，能使$n_{r-1}<q<n_r$，且有

$$a(n_1)+a(n_2)+\cdots+a(n_{r-1})+a(q)\geqslant c.$$

于是
$$c-\sum_{i=1}^{r-1} a(n_i)\leqslant a(q)<\varepsilon.$$

此不等式表明(2)收敛于c．

由(2)的构造可知，n_1可从(1)中任一$a(k)<c$的k开始，因此在(1)中存在无穷多种选择，能使(2)收敛于c．

令$a(n)=\frac{1}{10n}$即得本题求证之结论。

B-3. 我们知道，著名的皮亚诺曲线即可作为存在连续满映射

$$g: [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$$

的一个例子。

下面再举一例以示一斑：

先用一无穷三角级数来定义一个几乎满足本题要求的函数。然后对其稍加变形即得完全符合要求的函数。

选取p，使$0<p<1$，并令

$$h(x)=(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x), \quad x\in[0, 1].$$

此级数以$(1-p)\sum p^{k-1}$为其强级数，因此h连续，且$|h(x)|\leqslant 1$。易知当且仅当$x=0$，1/3，2/3，1时，才有$|h(x)|=1$，即$h(0)=h(2/3)=1$，$h(1/3)=h(1)=-1$。下面证明h在$\left(0, \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}, 1\right)$内的每一点都可取无穷多个不超出闭区间$[-1, 1]$的函数值。令

$$h(x)=h_n(x)+R_n(x),$$

其中
$$h_n(x)=(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x),$$

$$R_n(x)=(1-p)\sum_{k=n}^{\infty} p^{k-1}\cos(3^{k^2}\pi x).$$

设$a\in(-1, 1)$，则存在一个正整数q，当$n\geqslant q$时，能使

$$h_n(0)>a>h_n(1).$$

且对任一固定的$n(\geqslant q)$，存在某个

$$t_n\in\left(0,\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\ 1\right),$$

能使$h(t_n)=\alpha$。

$\forall x$，我们有

$$|h'(x)|\leqslant(1-p)\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}3^{k^2}\pi\leqslant 3^{(n-1)^2}\pi$$

由此可推知，若

$$|x-t_n|<\frac{1}{\pi}p^n(1-2p)3^{-(n-1)^2},$$

则 $$|h_n(x)-\alpha|<p^n(1-2p).$$

由$\cos(3^{n^2}\pi x)$的周期性知，在每一长为$2\cdot 3^{-n^2}$的区间上，$h(x)$的第n项$(1-p)p^{n-1}\cos(3^{n^2}\pi x)$的值在$-(1-p)p^{n-1}$与$+(1-p)p^{n-1}$之间振动。而$|R_{n+1}(x)|$关于$p^n$一致有界。因此，$R_n(x)$的值在每一长为$2\cdot 3^{-n^2}$的区间上至多是在$-(1-2p)p^{n-1}$与$+(1-2p)p^{n-1}$之间振动。令

$$A_n=\left[\frac{I_n\text{的长}}{2\cdot 3^{-n^2}}\right]\geqslant\left[\left(\frac{1-2p}{6\pi}\right)(qp)^n\right],$$

其中[ ]表示不超过其内所含数值的最大整数。$I_n\subseteq[0,\ 1]$，I_n的长$\geqslant\frac{1}{\pi}p^n(1-2p)3^{-(n-1)^2}$。则在$I_n$所含$A_n$个不重叠子区间的每一个内，$h=h_n+R_n$取值$\alpha$至少一次，从而在$I_n$内取值$\alpha$至少$A_n$次。因$n$可以任意大，当$(qp)^n\to\infty$时，即有

$$\forall x\in\left(0,\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$$

能使$h(x)=\alpha$。其中α可取$(-1,\ 1)$上的任意值。

最后令

$$f(x)=\sin^2\left(2h\left(\frac{x+1}{q}\right)\right),$$

即得完全符合本题要求的函数表达式。

B-4. 因为矩阵的边线只有四条，所以依题意从边线上最多只能选取四个元素。从而至少要从给定矩阵的中心3×3子矩阵中选取一个元素，易见这个元素的最大值是15。再从矩阵的四条边线上选取25，18，23，20即可。事实上，当15选定以后，在第三列必须选取25，在第三行必须选取18，最后在第四，五两行必须选取23与20。这样选取的五个元素是符合本题要求的唯一解。

B-5. 用l，m表示两已知直线。由题设数据易知l与m异面，从而存在唯一的公垂线PQ，垂足P在l上，垂足Q在m上。以PQ为直径的球面即为本题所求的最小球面。

l与m用含参数t的向量表达式分别为

$$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v} \quad 与 \quad \boldsymbol{b}+t\boldsymbol{w}.$$

$\because \qquad PQ\perp l,\ PQ\perp m,$

$\therefore \qquad \overrightarrow{PQ}=\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$，其中$\rho$是待定常数。

令$\boldsymbol{a}+\sigma\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{w}$分别表示$P$，$Q$二点($\sigma$，$\tau$为待定常数)，则

$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\sigma\boldsymbol{v}+\tau\boldsymbol{w}$。从而得出

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\rho(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})-\sigma\boldsymbol{v}+\tau\boldsymbol{w}. \tag{1}$$

由于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$皆为已知向量，且 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 线性无关，故ρ，σ，τ可以求出。于是所求球面的中心是

$$\boldsymbol{a}+\sigma\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}), \tag{2}$$

半径是 $\frac{1}{2}|\rho|\cdot|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|$. (3)

由题设条件知：

$$\boldsymbol{a}=\{1,4,5\},\quad \boldsymbol{b}=\{-12,8,17\},$$
$$\boldsymbol{v}=\{1,\ 2,\ -3\},\quad \boldsymbol{w}=\{4,\ -1,\ 1\}.$$
$$\Rightarrow\qquad \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\{-1,\ -13,\ -9\}.$$

由(1)解得 $\rho=-\dfrac{147}{251},\ \sigma=-\dfrac{782}{251},\quad \tau=\dfrac{657}{251}$.

由(2)求得球面中心为

$$\frac{1}{502}\{-915,\ 791,\ 8525\}.$$

由(3)求得球面半径的平方为

$$\frac{1}{4}\rho^2\,|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|^2=\frac{147^2}{1004}.$$

最后得所求球面方程为

$$(502x+915)^2+(502y-791)^2+(502z-8525)^2$$
$$=251\cdot 147^2.$$

B-6. 易知$x>1,y>1$. 因此题设的两个序列的前一项与相邻的后一项的差数大于1. 从而得知整数序列

$$[x],\ [2x],\ [3x],\ \cdots,\ [nx],\ \cdots \qquad (1)$$
$$[y],\ [2y],\ [3y],\ \cdots,\ [ny],\ \cdots \qquad (2)$$

都是严格递增的.

假定存在某个整数p在(1)与(2)中重复出现,那么必定存在两个整数a与b, 使得

$$p=[ax]=[by].$$
$$\Rightarrow\qquad p<ax<p+1,\ p<ay<p+1.$$

(因为ax与ay都是无理数, 所以上列不等式严格成立.) 由此推得矛盾的不等式组:

$$p=\frac{p}{x}+\frac{p}{y}<a+b<\frac{p+1}{x}+\frac{p+1}{y}=p+1.$$

因此在(1)与(2)中决不会出现相同的整数

再假定存在某个整数p在(1)与(2)内都不出现，那么也会存在两个整数a与b，使得

$$ax<p<p+1<(a+1)x,$$

$$by<p<p+1<(b+1)y.$$

由此推得$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1<\frac{a+1}{p+1}+\frac{b+1}{p+1}$，

$$\Rightarrow \qquad a+b<p<p+1<a+b+2.$$

这也是矛盾的不等式组。因此本题论断正确。

B-7. 由(2)可得$f_1(0)=-f_1(0)$，故有

$$f_1(0)=0. \tag{5}$$

再由(5)和(1)可得

$$f_1(x)=f_1(0)+x=x.$$

此等式表明(4)对于$n=1$是正确的。

对任何整数$n>1$及任一实数c，由f_n的对称性质及(2)可得

$$f_n(c,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -c)=f_n(-c,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ c)$$
$$=-f_n(c,\ 0,\cdots,0,-c). \Rightarrow$$

$$f_n(c,0,\cdots,0,-c)=0. \tag{6}$$

假定$n=k$时，(4)正确，则由(3)可知

$$f_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$$

只依赖于x_{k+1}及$x_1+\cdots+x_k$。若令$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=0$，则由推导(6)的方法可以推得

$$f_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})=f_{k+1}(-a_{k+1},0,\cdots,0,a_{k+1})$$
$$=0. \tag{7}$$

$\forall x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$，令$a_i=x_i-u$，$i=1,2,\cdots,k+1$，其中$u$为$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{k+1}$的算术平均值，则易知

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=0.$$

由(1)与(7)即可推得

$$f_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})=f_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})+u=u.$$

这就证明了$n=k+1$时，(4)也正确。因此(4)对任意正整数n都正确。

第二十一届（1960年12月3日）

上午试题

A-1. 已知n为正整数，试确定下列方程中有序正整数对(x,y)的解的个数：

$$\frac{xy}{x+y}=n.$$

A-2. 求证在单位闭正方形内任意三点中至少有两点间的距离不超过$\sqrt{6}-\sqrt{2}$。

A-3. 设t_1,t_2,t_3,t_4,t_5为实数，求证

$$\sum_{j=1}^{5}(1-t_j)\exp\left(\sum_{k=1}^{j}t_k\right)\leqslant e^{e^{e^{e}}}.$$

A-4. 设如下图，已知平面上有两定点P，Q位于定直线L的一侧。试求第三点R，使得$PR+RQ+RS$取极小值，其中$RS\perp$直线L，S为垂足。

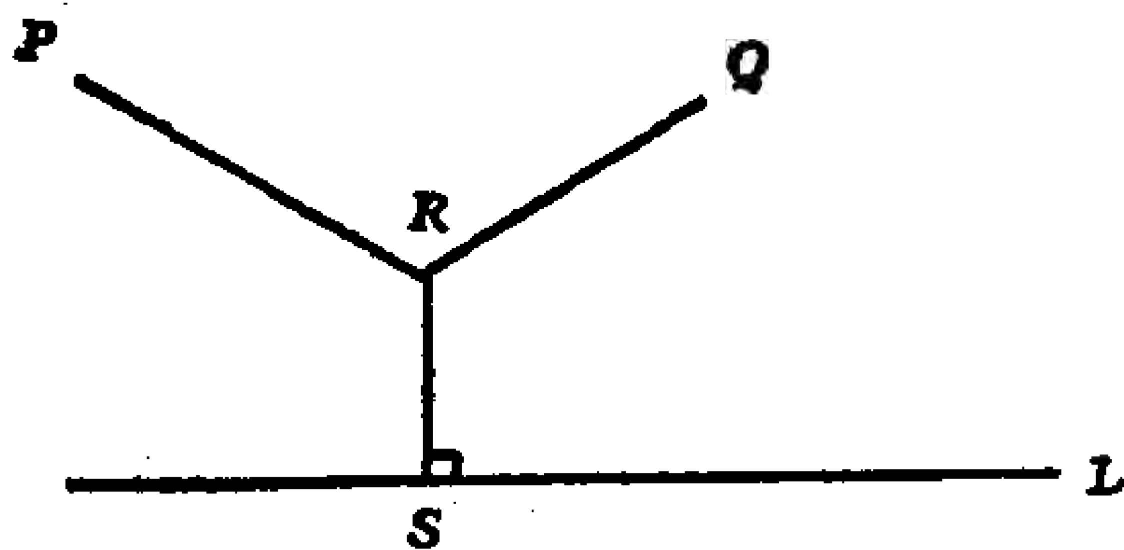


图79

A-5. 设$f(x)$是对任何一个实系数多项式$g(x)$都成立等式$f(g(x))=g(f(x))$的实系数多项式。试确定并证明$f(x)$所应具有的性质。

A-6. 一赌徒独自掷骰。他规定掷得几点记几分，一直掷

到取得或超过预定的分数n为止，记$P(n)$为恰好掷得总分n的概率。试求 $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$。

A-7。设x表示n个符号的各种排列，I表示这n个符号的初始排列，$N(n)$ 表示使$x^N=\mathrm{I}$成立的最小正整数。求证当$n>1$时

$$\frac{N(n)}{N(n-1)}=\begin{cases}1, & n\text{能被两个不同的质数整除；}\\ p, & n\text{只能被质数}p\text{的幂整除。}\end{cases}$$

下午试题

B-1。设m,n是不相等的两个整数。试求$n^m=m^n$的全部解，并证明求得的解的完备性。

B-2。求下列二重级数的和：

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-3k-j-(k+j)^2}.$$

B-3。设平面上流体质点运动的规律由下列速度分量公式所描述：

$$\frac{dx}{dt}=y+2x(1-x^2-y^2), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}=-x.$$

试作出原点邻近的轨线图，并讨论个别质点当 $t\to+\infty$时的运动情形，证明你的论断。

B-4。设有一首项与公差皆为正整数的无穷等差数列 a，$a+d$，$a+2d$，…。求证对于任何正整数k，或者已知数列中无一项是整数k的方幂，或者有无穷多项是整数k的方幂。

B-5。设已知一数列如下：

$$a_0=0,$$
$$a_1=1+\sin(-1),$$
$$\vdots$$
$$a_n=1+\sin(a_{n-1}-1),$$
$$\vdots$$

试计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

B–6. 任何一个正整数可以写成$n=2^k(2l+1)$，其中k,l皆为非负整数。令 $a_n=e^{-k}$，$b_n=a_1a_2\cdots a_n$。求证$\sum b_n$收敛。

B–7. 设实函数 $g(t)$与$h(t)$当$t\geqslant 0$时连续，且有函数$v(t)$与$u(t)$分别满足下列具有初值的微分不等式与微分方程

$$\frac{dv}{dt}+g(t)v\geqslant h(t),\ \ v(0)=c,$$

$$\frac{du}{dt}+g(t)u=h(t),\ \ u(0)=c.$$

求证$v(t)\geqslant u(t)$，$(t\geqslant 0)$。并且对充分小的$t>0$，下列初值问题的解

$$\frac{dv}{dt}+g(t)v=v^2,\quad v(0)=c_1$$

可以写成

$$V=\max_w\left[c_1e^{-\int_0^t[g(s)-2w(s)]ds}-\int_0^t e^{-\int_0^t[g(s_1)-2w(s_1)]ds_1}w^2(s)ds\right].$$

其中极大值是对任何连续函数 $w(t)$ 在某个正区间$[0,t_0]$上确定的。

解答

A-1. 给定的方程可化为

$$(x-n)(y-n)=n^2$$

易见，或者 $x>n$，$y>n$，或者 $x<n$，$y<n$。且当 $0<x\leqslant n$ 及 $0<y\leqslant n$ 时，(1) 无解。(因 $|x-n|\,|y-n|<n\cdot n=n^2$)因此我们只须研究当 $x-n>0$ 及 $y-n>0$ 时，(1)的整数解究竟有多少?为此只须确定把 n^2 分解成两有序因数的积有多少种不同的分法即可。

令 n 的质因数分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则

$$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$$

于是 n^2 分解成两有序因数的积的不同分法种数是 $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)$。此即本题所求结果。

A-2. 在已知单位闭正方形内任意确定三点，它们可能构成三角形或在一条线段上(退化情形)。过所设三点分别作与已知正方形的边平行的直线(至多六条，至少四条)，从中确定一个各边皆通过所设三点之一的矩形 R，于是所设三点至少有一个是 R 的顶点。将 R 在正方形内平行移动，使所设三点之一与正方形的一个顶点重合，而另二点仍然位于该正方形内。作这样的平行移动，显然不会变更所设三点间的相互距离。

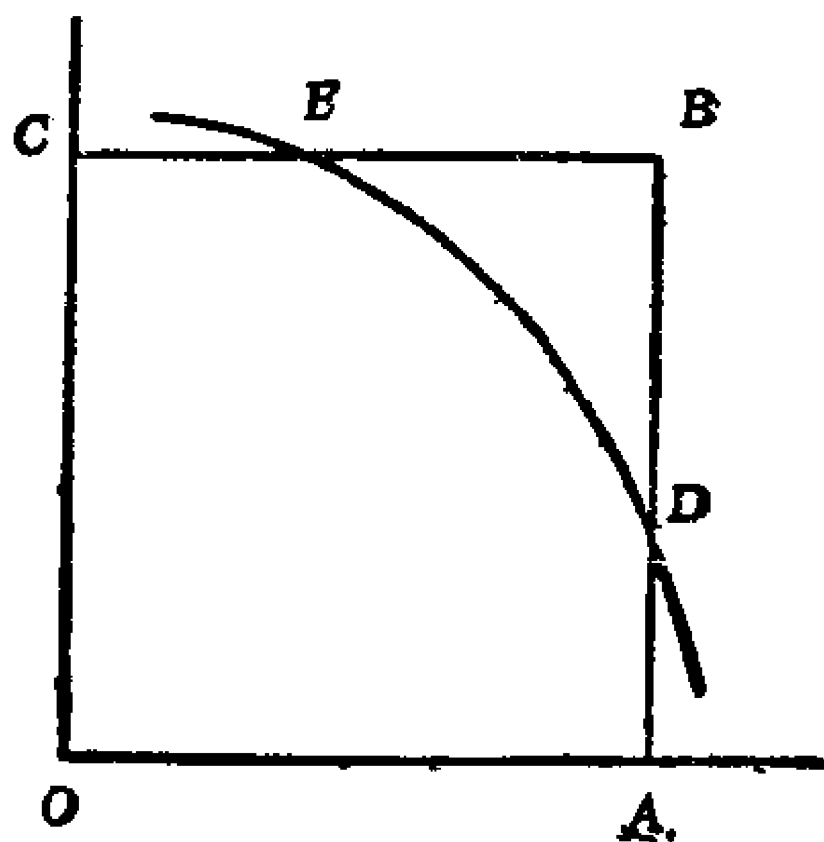


图80

设如图80，令 O 是所设三点之一，以单位闭正方形 $OABC$ 的

边OA，OC为轴建立坐标系，记$a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 AB 边交于点 $D(1,\sqrt{a^2-1})$，与 BC 边交于点 $E(\sqrt{a^2-1},1)$，(注意$1<a<\sqrt{2}$)。

$\because\quad |DE|^2=2(1-\sqrt{a^2-1})^2$

$$=2(1-\sqrt{7-4\sqrt{3}})=2[1-(2-\sqrt{3})]^2$$

$$=2(\sqrt{3}-1)^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=a^2,$$

$\therefore\quad |DE|=a$。

假定所设三点的另二点为P,Q，且$|OP|$，$|OQ|$，$|PQ|$的长都大于a，则P,Q必位于曲边三角形BDE内，但此曲边三角形内两点间的最大距离为$|DE|=a$，故 $|PQ|\leqslant a$，即上述假定不能成立。这就证明了本题论断的正确性。

A-3. 设$f(x)=(1-x+a)e^x$，则$f'(a)=0$，$f''(a)<0$。由此可知下列不等式成立：

$$(1-x+a)e^x\leqslant e^a。\qquad (1)$$

其中x与a为任意实数。

在 (1) 中令$a=0$，$x=t_5$，则

$$(1-t_5)e^{t_5}\leqslant e^0=1$$

$$\Longrightarrow\quad (1-t_4)e^{t_4}+(1-t_5)e^{t_4+t_5}\leqslant(1-t_4)e^{t_4}+e^{+t_4}\leqslant e$$

最后一步系由(1)令$a=1$推得。

$$\Longrightarrow\quad (1-t_3)e^{t_3}+(1-t_4)e^{t_3+t_4}+(1-t_5)e^{t_3+t_4+t_5}$$

$$\leqslant(1-t_3)e^{t_3}+e\cdot e^{t_3}\leqslant e^e$$

$$\Longrightarrow\quad (1-t_2)e^{t_2}+(1-t_3)^{t_2+t_3}+(1-t_4)^{t_2+t_3+t_4}$$

$$+(1-t_5)e^{t_2+t_3+t_4+t_5}$$

$$\leqslant(1-t_2)e^{t_2}+e^e\cdot e^{t_2}\leqslant e^{e^e}。$$

再类推一步即得

$$\sum_{j=1}^{5}(1-t_j)\exp\left(\sum_{k=1}^{j}t_k\right)\leqslant e^{e^{e^{e}}}.$$

A-4. 取L为x轴，令$P=(0,a)$，$Q=(c,b)$，不失一般性，可以假定$c\geqslant 0$，$0<b\leqslant a$，取Q关于L的对称点 $Q^*=(c,-b)$，作直线PQ^*交L于K则对L上任一点X，易知成立下列不等式

$$PX+QX=PX+XQ^*\geqslant PQ=PK+KQ^*=PK+QK$$

仅当$X=K$时成立等式．（见图81）

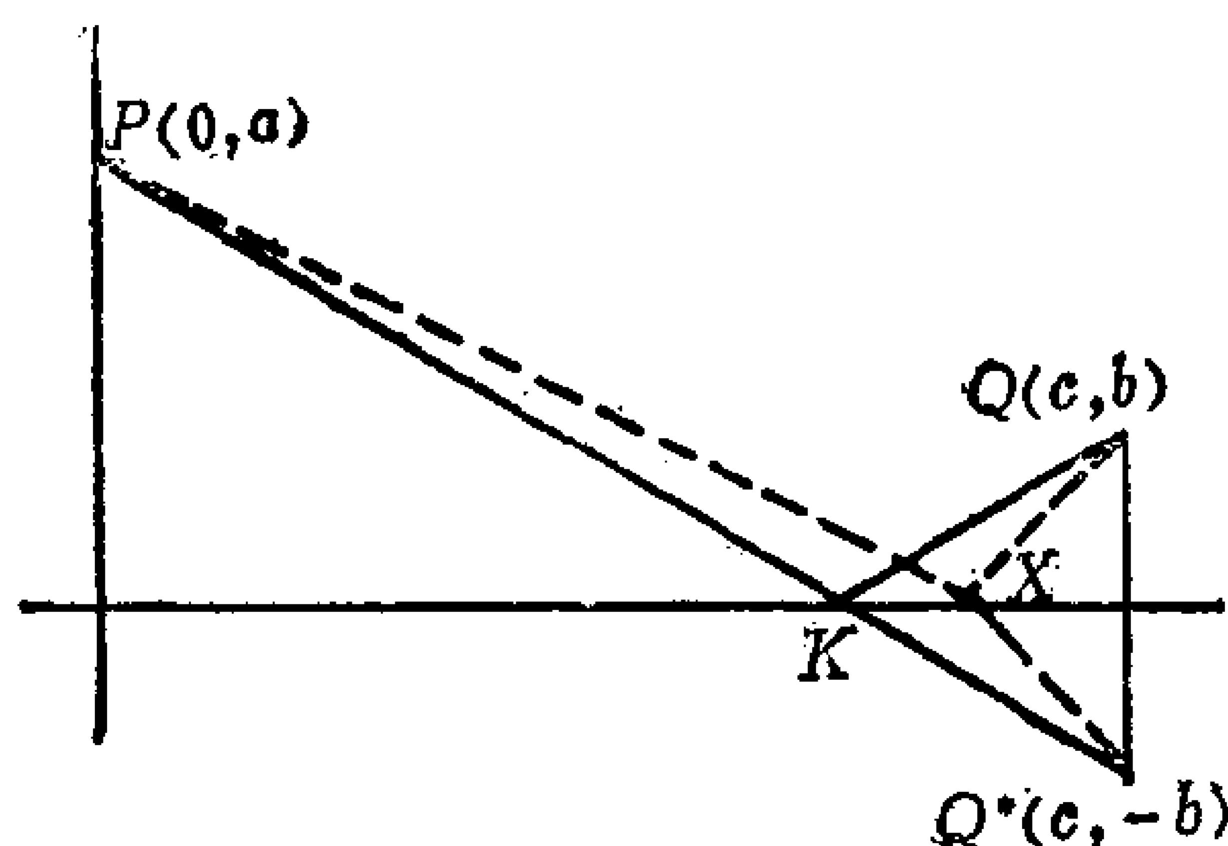


图81

我们将无穷带形区域 $x\geqslant 0$，$0<y\leqslant a$ 划分成三个子区域来进行研究，现分别考虑下列三种情形：

情形I． $c\leqslant\sqrt{3}(a-b)$，即点Q位于闭ΔPOA内．

情形II． $\sqrt{3}(a-b)<c<\sqrt{3}(a+b)$，即点 Q 位于开ΔPBA内或位于线段AB内．

情形III． $c\geqslant\sqrt{3}(a+b)$，即点Q位于AB上或位于它的右边．（见图82）

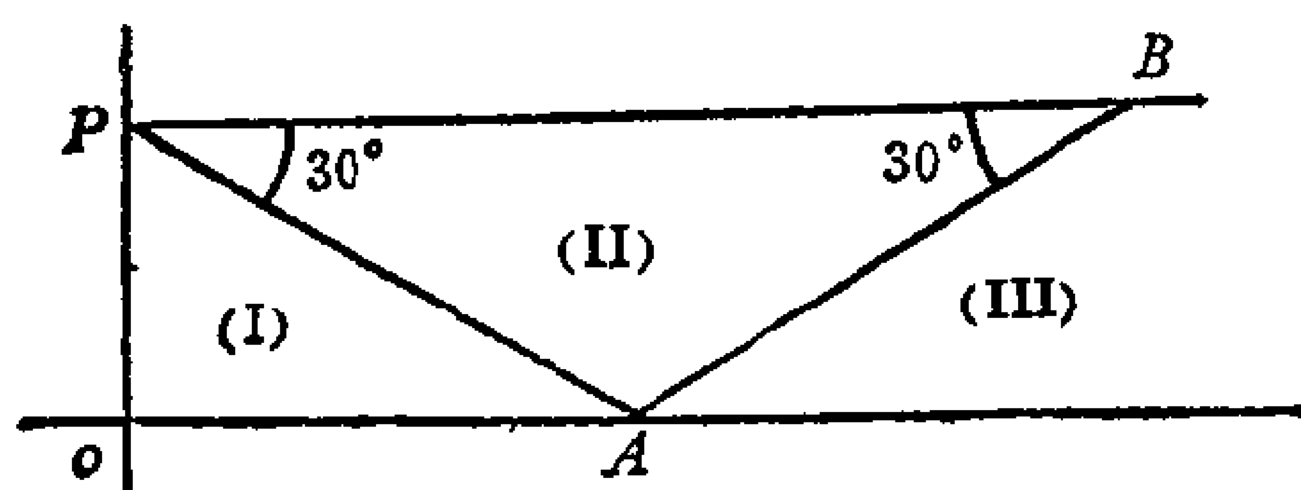


图82

现在令$R=(x,y)$，并求

$$\sigma(R)=|PR|+|RQ|+|RS|$$
$$=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-b)^2}+|y|$$

的极小值．当R不与P,Q重合，且不在直线L上时，我们有

$$\sigma'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+(y-b)^2}},$$

$$\sigma'_y=\frac{y-a}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\frac{y-b}{\sqrt{(x-c)^2+(y-b)^2}}\pm 1.$$

其中第二个等式右边的±1表示$y>0$时取正号，$y<0$时取负号．令$\sigma'_x=\sigma'_y=0$，经计算知，当$y<0$时，$\sigma(R)$无驻点．当$y>0$时，$\sigma(R)$有唯一驻点：

$$R=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)+\frac{c}{2},\ \frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}c\right).$$

由于$y>0$，故须$c<\sqrt{3}(a+b)$．

由求出驻点坐标的中间运算步骤，可以断定当点Q位于图中的区域(II)时，过Q作平行于BA的直线交PA于R，此即所求之驻点．当点Q位于区域(I)或(III)时，驻点不存在．

在区域(II)内，我们可以算出

$$\sigma(R)=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

在σ'_x及σ'_y不存在的点，我们有

$$\sigma(Q)=b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}$$
$$\leqslant a+\sqrt{(a-b)^2+c^2}=\sigma(P).$$

在直线L上，$\min\sigma(X)=\sigma(K)=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$．

经比较知 $\sigma(R)<\sigma(Q)$，$\sigma(R)<\sigma(K)$．

因此在区域(II)内，R点即为所求．

为了确定在(I),(III)两个区域内使σ达到极小值的点的位置，只须检验下列差式的符号即可.

在区域(I)内，由$c\leqslant\sqrt{3}(a-b)$可得

$$\sigma(Q)^2-\sigma(K)^2=b[b-4a+2\sqrt{(a-b)^2+c^2}]<0,$$

因此点Q是使σ达到极小值的点。

在区域(III)内，由$c\geqslant\sqrt{3}(a+b)$可得

$$\sigma(Q)^2-\sigma(K)^2=b[b-4a+2\sqrt{(a-b)^2+c^2}]>0,$$

因此点K是使σ达到极小值的点。

A-5. 设 g 为一常数函数，例如 $g(x)\equiv a$ 则 $f(g(x))=g(f(x))$化为$f(a)=a$。因为a可取任意实数,所以f是恒等映射，即$f(x)=x$。

A-6. 因为骰子每掷一次，出现点数的平均值是21/6，故可猜测当n充分大时，将有

$$p(n)\approx\frac{1}{\frac{21}{6}}=\frac{2}{7}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}p(n)=\frac{2}{7}.$$

我们来证明这一猜测是正确的.

将一颗骰子掷 k 次恰好得到总数n点的概率等于下列多项式展开式中x^n的系数

$$\left[\frac{1}{6}(x+x^2+\cdots+x^6)\right]^k.$$

因为掷k次得到n点与掷l次得到n点($k\neq l$) 是互斥事件，所以本题所求概率$p(n)$是下列无穷级数中x^n的系数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{6}(x+x^2+\cdots+x^6)\right]^k$$

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \frac{6}{6-(x+x^2+\cdots+x^6)}$$
$$=\frac{6}{(1-x)(x+x^2+\cdots+x^6)}$$
$$=\frac{6}{(1-x)(6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5)}$$
$$=\frac{2}{7(1-x)}+\frac{2}{7}\,\frac{15+10x+6x^2+3x^3+x^4}{6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5}$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)-\frac{2}{7}\right)x^n=\frac{2}{7}\cdot\frac{15+10x+6x^2+3x^3+x^4}{6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5}.$$
上面的推导纯属组合分析．现视x为复变数，并令
$$D=6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5.$$
若$x=1$，则$D\neq 0$．假定$x\neq 1$，但$|x|\leqslant 1$，则
$$D(1-x)=6-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6,$$
$$\Longrightarrow \quad |D|\,|1-x|>6-6|x|\geqslant 0.$$
因此D的零点位于复平面上的单位圆外部．于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)-\frac{2}{7}\right)x^n$$
的收敛半径大于1，而 $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)=2/7$．

A-7．令$L(n)$为 $1,2,3,\cdots,n$ 的最小公倍数，则 $L(n-1)\,|\,L(n)$，$n=2,3,\cdots$．我们来证明对任何n都有$N(n)=L(n)$．

从n个符号中任取i个作一x的i阶子排列，易见 $i\,|\,N$是$x^N=1$的充要条件．因为n个符号的所有Σ个排列含有阶数为$1,2,\cdots,n$的各种排列，所以$i\,|\,N(n)$，$i=1,2,\cdots,n$．于是 $L(n)\,|\,N(n)$．反之，因为Σ中的每一个排列都可以分解成阶数不超过n的轮换子排列的积，所以$x^{L(n)}=1$，$\forall x\in\Sigma$．于是$L(n)\geqslant N(n)$，对比

$L(n)|N(n)$，即得$L(n)=L(n-1)$。

1°若 $n=ab$且a,b互质，则由 $a|L(n-1)$，$b|L(n-1)$，得$ab|L(n-1)$,从而$L(n)|L(n-1)\Longrightarrow L(n)=L(n-1)$。

2°若n仅含质因数p的幂，令$n=p^{a}$，则

$$\frac{n}{p}\Big|L(n-1)\Longrightarrow n|pL(n-1)\Longrightarrow L(n)|pL(n-1).$$

另一方面 $p\Big|\dfrac{L(n)}{L(n-1)}\Longrightarrow pL(n-1)\Big|L(n)$.

故有$L(n)=pL(n-1)$。

综合1°,2°并注意$L(n)=N(n)$，得知：

当n能被两个不同的质数整除时，

$$\frac{N(n)}{N(n-1)}=1;$$

当n只能被质数p的幂整除时，

$$\frac{N(n)}{N(n-1)}=p.$$

B-1。先假定$m>0$，$n>0$。将$n^{m}=m^{n}$化为等价方程

$$\frac{1}{m}\log m=\frac{1}{n}\log n. \tag{1}$$

由

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)'=\frac{1-\log x}{x^{2}}.$$

可以断定函数$\log x/x$当 $0<x<e$时严格增加，当$x\geqslant e$时严格减少，于是(1)的解必须满足不等式$m<e<n$，或$n<e<m$。因此m,n必有一个等于1或2，但因$\log 1=0$，故$m=1$或$n=1$都将导致$m=n=1$，这不是本题的解。当$m=2$时，得$n=4$，或者$n=2$时，得$m=4$是m,n为正整数时仅有的两组解。

再者，原方程显然没有m或n取0值的整数解。

最后假定 $m<0$，若 $n>0$，令 $m=-k$，则 $m^n=n^m$ 化为 $(-k)^n=1/n^k$，这也显然无整数解。若 $n<0$，令 $n=-l$，则 $m^n=n^m$ 化为 $(-k)^{-l}=(-l)^{-k}$ 从而必须

$$(-1)^l=(-1)^k \text{ 及 } k^l=l^k.$$

由前面关于$m>0$，$n>0$ 所作的分析知 $k=2$，$l=4$ 或 $l=2$，$k=4$ 恰好符合要求，并且再无其他的整数解。

综上所述，原方程仅有四组符合要求的整数解：

$$(m,n)=(2,4),(4,2),\ (-2,-4),\ (-4,-2).$$

B-2. 用直接分析的方法证明：对此二重级数先沿对角线 $j+k=n$上的项求和，再对n求和，从而有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-3k-j-(j+k)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2^{-2k-n-n^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4}{3}(1-2^{-2n-2})2^{-n-n^2}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-n^2}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n(n+1)}-\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m(m+1)}\right]$$

$$=\frac{4}{3}.$$

其中第三步拆成两级数的差（代数和）是允许的，因拆成的两级数都收敛。

B-3. 这是一个自治微分系统（即方程组右边不显含时间变量t）。因为当且仅当$x=y=0$时，$dx/dt=dy/dt=0$，所以原点是此方程组的唯一奇点，除原点外，过相平面上其他任一点，(1)存在唯一的轨线。

为了作出在原点邻近的轨线图，略去（1）中右边的高次项得其线性近似方程组

$$\frac{dx}{dt}=2x+y, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt}=-x.$$

令 $v=x+y$，(2)即化为 $dv/dt=v \Longrightarrow v=ae^t$，进而求得(2)的解为

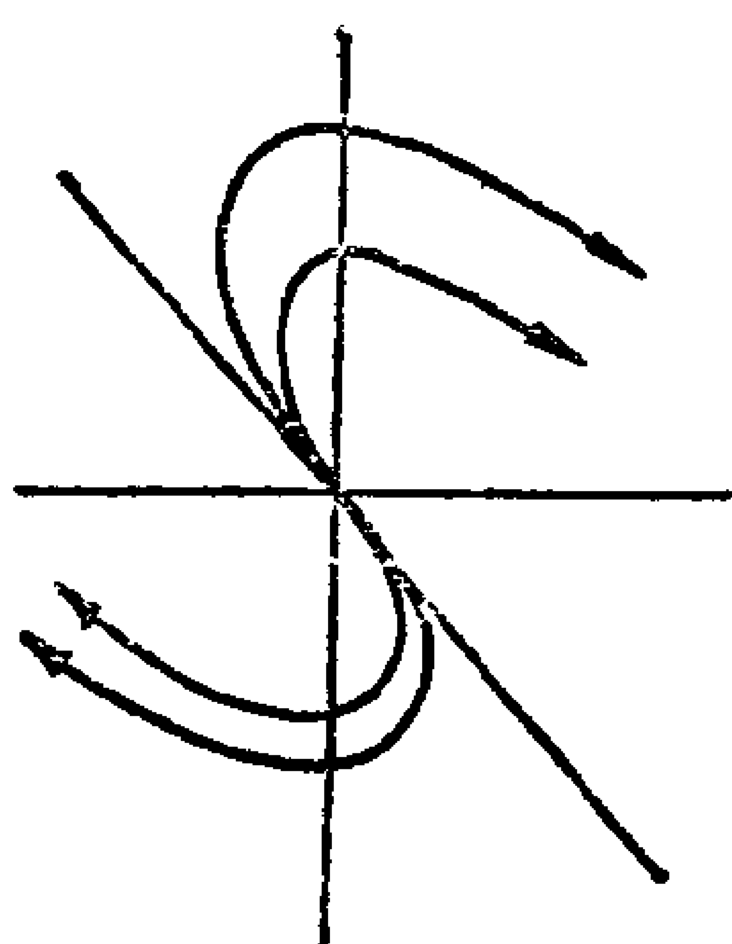
$$x=(at+b)e^t,$$
$$y=(-at+a-b)e^t. \tag{3}$$

其中a，b为任意常数。

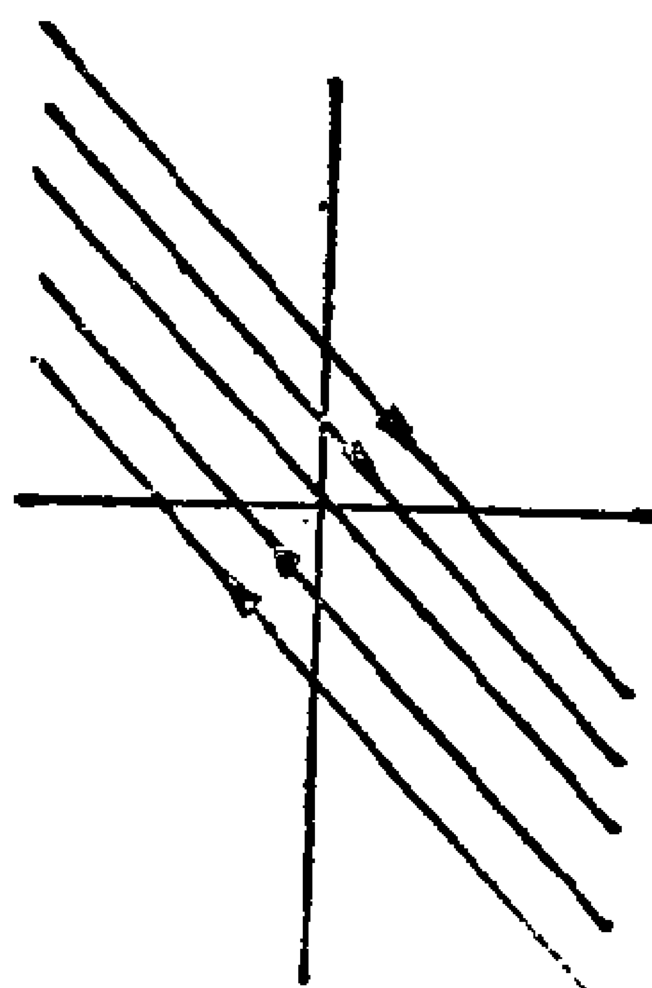
在确定曲线(3)的性质之前，先作代换

$$x_1=at+b,$$
$$y_1=-at+a-b. \tag{4}$$

由于$x_1+y_1=a$(常数)。故(4)表示流体的质点沿此直线作匀速运动。直线$x_1+y_1=0$上的点都成为稳定点，其它点的运动情形如图所示。



(3)的轨线图



(4)的轨线图

图83

回到方程组(3)来看，当 $t\to-\infty$时，因子e^t将(4)的每条直线都急速“拉向”原点。(3)的每条轨线都在原点以$x+y=0$作为其切线（如图83），这样的奇点叫做不稳定结点。方程组(1)在原点的充分小邻域内的轨线与(3)是类似的。

再对系统(1)作进一步研究。易知

$$x=\cos t,\ y=\sin t.$$

是(1)的一个解，它表示绕顺时针方向旋转的单位圆。我们来证明除奇点外，相平面上一切轨线，当 $t\to+\infty$时，都渐近地趋向于单位圆。即单位圆内的任一轨线都向外盘旋接近它，而单位圆外的任一轨线都向内盘旋接近它。

将(1)用极坐标表示得

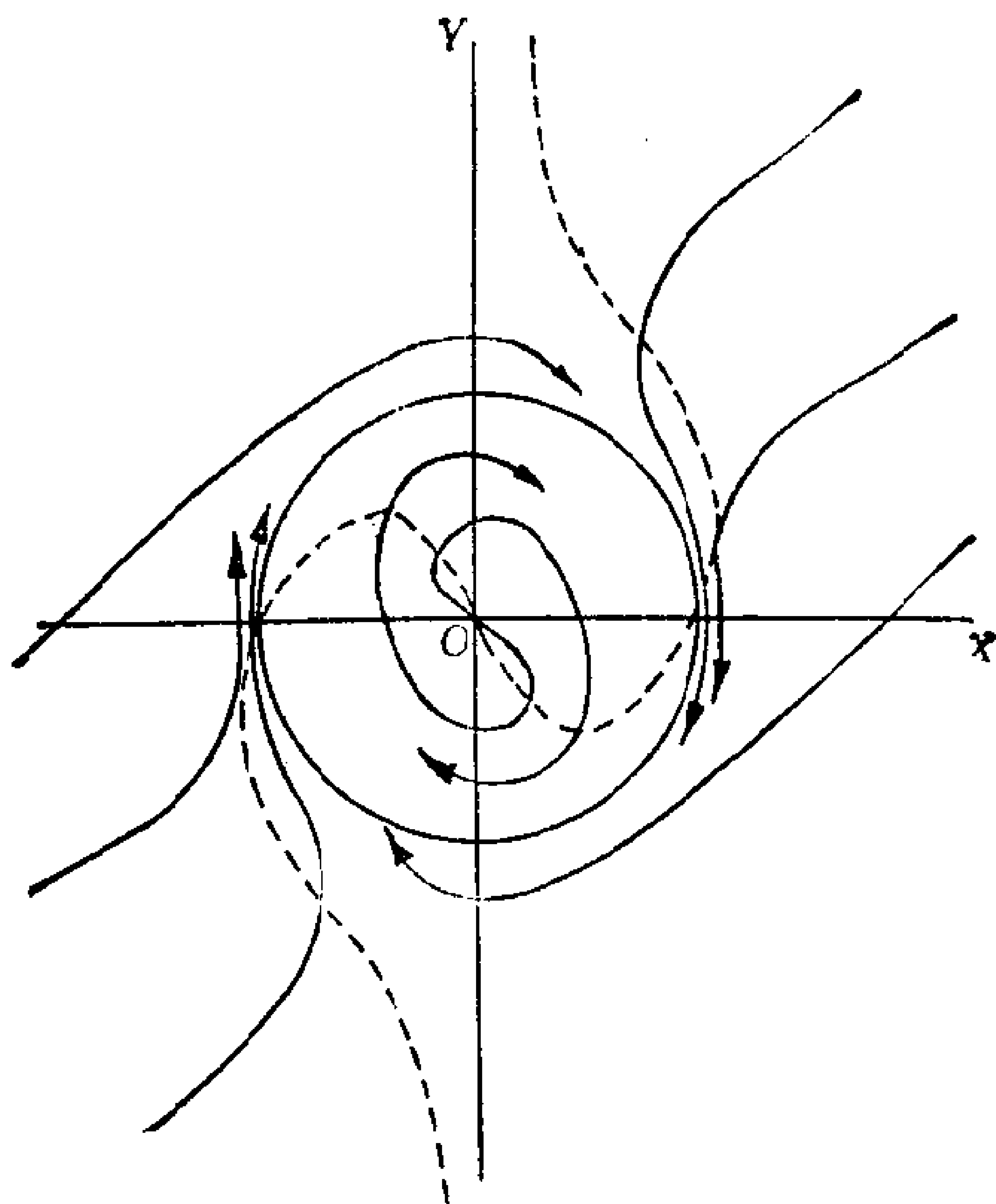
$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=2x^2(1-r^2) \tag{5}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=-1+(r^2-1)\sin 2\theta \tag{6}$$

由(5)可知$dr/dt>0$，r是t的严格递增函数（$x=0$对应着奇点$r=0$，不予考虑）。再者r也不会界于$\rho<1$的闭轨线L内，否则界于单位圆及L形成的环域内的任一轨线(当 $t\to-\infty$时)将与L相交，这与(1)仅有一个奇点相矛盾。因此单位圆内任一轨线当$t\to+\infty$时，都无限盘旋接近于此单位圆。同理可证，在单位圆外的任一轨线也都无限盘旋接近于此单位圆。

由(6)可知，当$3/4<r<6/5$时，$d\theta/dt<-1/2$，这表明在单位圆的充分小邻域内，一切轨线都是顺时针方向盘旋接近于它的。

(1)的轨线如图84所示。其中虚曲线是按方程 $y+2x(1-x^2-y^2)=0$ 作出的，过此曲线上任一点P的轨线皆有过P点的铅垂切线。而过y轴上任一点Q的轨线皆有过Q点的水平切线。



(1) 的轨线图

图84

B-4. 假定已知数列中有一项等于 n^k（即恰为整数n的k次幂），那么由二项式定理可得

$$(n+d)^k=n^k+d[\binom{k}{1}n^{k-1}+\binom{k}{2}n^{k-2}d+\cdots+d^{k-1}].$$

因此 $(n+d)^k$ 也是已知等差数列的一项，由归纳法可知，$(n+2d)^k$，$(n+3d)^k$，…，都是已知等差数列里的项。再者，例如等差数列 2，6，10，…，$2+4d$，… 中就不会含有n^k的项出现。

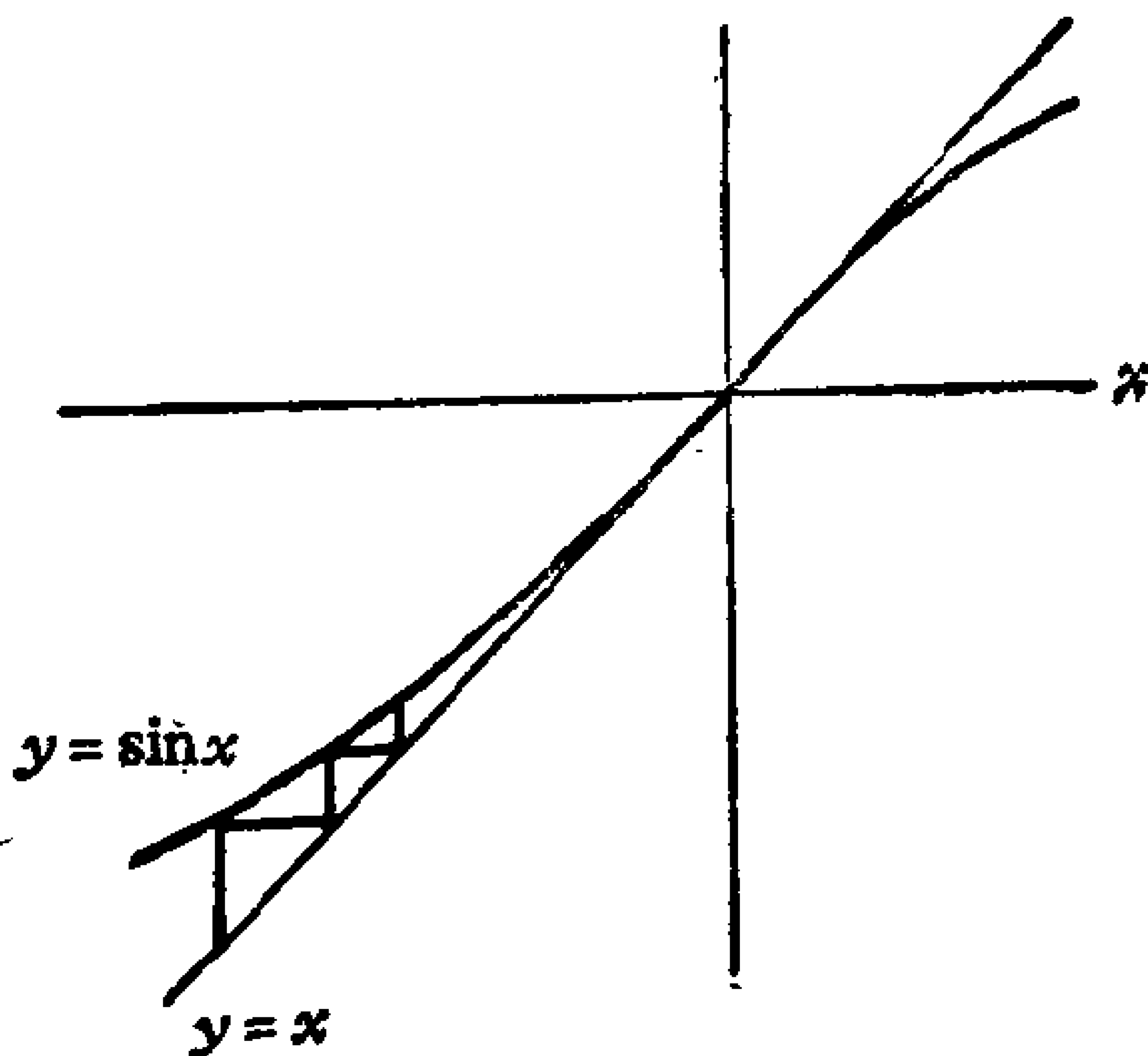


图85

B-5. 令 $b_n=a_n-1$，则 $b_0=-1$，而

$$b_n=\sin b_{n-1},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1}$$

将递推关系式(1)与$y=x$进行比较，如图所示，启发我们猜想 $n\to\infty$ 时，b_n从-1增加到0，事实上，当$-\pi/2<x<0$时，$x<\sin x<0$。再由$-1\leqslant b_{n-1}<0$可推得$b_{n-1}<b_n<0$。于是

$$-1=b_0<b_1<b_2<\cdots<0.$$

从而 $\lim b_n=c$存在。对(1)两边取极限得 $c=\sin c\Longrightarrow c=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。下面证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k=0. \tag{2}$$

任给$\varepsilon>0$，可选取充分大的整数p，使当 $k>p$ 时，恒成立$b_K>-\varepsilon$。再选取m，使$m\varepsilon>p$及$m>p$。于是当$n>m$时，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}(-b_k)=\sum_{k=1}^{p}(-b_p)$$

$$+\sum_{k=p+1}^{n}(-b_K)<p+n\varepsilon<2n\varepsilon.$$

$$\Longrightarrow\qquad 0>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_K>-2\varepsilon.$$

由ε的任意性得知(2)成立。最后即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=1.$$

B-6. 易知当且仅当n为奇数时，$a_n=e^0=1$，而n为偶数时，$a_n\leqslant e^{-1}$。因此

$$b_{2k}=a_1a_2a_3\cdots a_{2k}\leqslant e^{-k},\quad b_{2k+1}\leqslant e^{-k}。$$

$$\Longrightarrow\qquad b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2k}<b_1+b_2+b_3+\cdots b_{2k+1}$$

$$\leqslant 1+2e^{-1}+2e^{-2}+\cdots+2e^{-2k}<1+\frac{2e^{-1}}{1-e^{-1}}.$$

这表明正项级数$\sum b_n$的部分和有界，故$\sum b_n$收敛。

B-7. 令 $G(t)=\int_0^t g(s)ds$

则$G'=g$。又令 $x=ue^G$，$y=ve^G$ 则

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{du}{dt}+gu\right)e^G=he^G,$$

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{dv}{dt}+gv\right)e^G\geqslant he^G.$$

因为$e^G>0$，所以$d(y-x)/dt\geqslant 0$。注意$x(0)=y(0)=c$知当$t\geqslant 0$时，$y(t)\geqslant x(t)\Longrightarrow v(t)\geqslant u(t)$

再假定v在某个区间$[0,t_0]$上满足

$$\frac{dv}{dt}+gv=v^2,\quad v(0)=c$$

并在$[0,t_0]$上任选一个连续函数w，则

$$(v-w)^2\geqslant 0,$$

$$\frac{dv}{dt}+(g-2w)v=v^2-2wv\geqslant -w^2.$$

令 $$W(t)=\int_0^t w(s)ds,\quad y=ve^{G-2w},$$

则 $$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{dv}{dt}+(g-2w)v\right)e^{G-2W}\geqslant -w^2e^{G-2w}$$

$$\Longrightarrow\quad y(t)\geqslant c_1-\int_0^t w^2\exp[G(s)-2W(s)]ds$$

$$\Longrightarrow\quad v(t)\geqslant c_1\exp[-G(t)+2W(t)]$$

$$-\int_0^t \exp[G(s)-G(t)-2(W(s)-W(t))]w^2(s)ds$$

$$\Longrightarrow\quad v(t)\geqslant\max_w\Big\{c_1\exp[-G(t)+2W(t)]$$

$$-\int_0^t \exp[G(s)-G(t)-2(W(s)-W(t))]w^2(s)ds\Big\}.$$

若取 $w=v$，则上面一系列不等式成为等式．因此

$$v(t)=\max_w\Big\{c_1\exp[-G(t)+2W(t)]$$

$$-\int_0^t \exp[G(s)-G(t)-2(W(s)-W(t))]w^2(s)ds.\Big\}$$

这等价于求证的结论。

注意初值问题

$$\frac{dv}{dt}+gv=v^2,\qquad v(0)=c_1$$

的解在有限区间内可以无界。例如当 $t\uparrow t_1$ 时，可使 $v\to\infty$。故上述论证仅于 $t<t_1$ 保持有效。因此对任何 t_0，当 $0<t_0<t_1$，上述结论在 $[0,t_0]$ 上成立。

第二十二届（1961年12月2日）

上午试题

A-1．求证方程 $x^y=y^x$ 位于I象限内的图形由一条直线和一条曲线组成。试确定此直线与曲线交点的坐标。

A-2．设 $f(x,y)$ 是定义在I象限内的二元实函数，若对任意正数 x，y，存在一个正数 k，使得 $|f(x,y)|<(x+y)k$，则称 $f(x,y)$ 线性有界。试对实数 α,β 求使 $x^\alpha y^\beta$ 为线性有界的充要条件。

A-3．试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+j^2}$.

A-4. 设f为一定义在正整数集合上的函数，$f(1)=1$，$n>1$时，$f(n)=(-1)^k$，其中k为n的所有质因数的个数．例如 $f(9)=(-1)^2$，$f(20)=(-1)^3$．定义$F(n)=\sum f(d)$，其中d 表示n的所有正约数．求证 $F(n)$ 等于0 或1．并确定对于怎样的 n，$F(n)=1$？

A-5. 设Ω是由n个点组成的集．Ω的2^n个子集作为元素又组成一个新集．而$\sum$是这个新集的非空子集．它关于交、并、补运算是封闭的（即若$A\in\sum$，$B\in\sum$，则$A\cap B$，$A\cup B$，$\Omega-A$，$\Omega-B$也都属于$\sum$）．令k表示集$\sum$中元素的个数，试确定k的取值范围．并加以证明．

A-6. 设$J_2=\{0,1\}$是模2的完全剩余系．$J_2[x]$ 表示系数属于J_2且允许有一个待定系数的多项式整环．求证当$n+1$是合数时，$p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$在$J_2[x]$上是可约的．问当 $n+1$是质数时，属于$J_2[x]$的$p(x)$在$J_2[x]$上是否不可约？

A-7. 设欧氏平面上有一闭圆盘D（包括圆周及其内部）含有一个非空闭集S，而D又是含有S 的任一闭圆盘的子集．求证D内每一点都是S上某两点所连线段的中点．

下午试题

B-1. 设有正实数序列α_1，α_2，，$\alpha_3\cdots$，令

$$s_n=\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

$$r_n=\frac{1}{n}(\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1})$$

若$n\to\infty$时，s_n与r_n的极限存在，求证乘积s_nr_n不小于1．

B-2. 已知二正数α，$\beta(\alpha<\beta)$．如果在长为β的线段上随机

地任取二点，问所取二点间的距离不小于a的概率是多少？

B-3. 设平面上有四点，其中任何三点不共线，且此四点不共圆。求证这四个点中必有一点位于过其余三点所作的圆的内部。

B-4. 设有n个非负实数x_k满足不等式 $0\leqslant x_k\leqslant 1$ $(k=1, 2, \cdots, n)$试确定下列n元函数的极大值：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_i-x_j|.$$

B-5. 设k为正整数，n为大于2的整数。定义

$$f_1(n)=n,\ f_2(n)=n^{f_1(n)},\cdots,\ f_{j+1}(n)=n^{f_j(n)},$$

等等。求证下列双边不等式成立：

$$f_k(n)<n!!\cdots!<f_{k+1}(n).$$

中间的项表示n的k级阶乘记号。

B-6. 设函数$y(x)$满足微分方程 $y''=-(1+\sqrt{x})y$及初值条件$y(0)=1$，$y'(0)=0$。求证$y(x)$ 在区间$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内恰有一个零点。

B-7. 设非负实数序列$\{a_n\}$ 中任何两项都满足不等式 $a_{n+m}\leqslant a_na_m$。求证序列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$当$n\to\infty$时有有限的极限。

解答

A-1. 在I象限内，$x^y=y^x$等价于下列方程

$$\frac{1}{y}\log y=\frac{1}{x}\log x. \tag{1}$$

作辅助函数

$$f(t)=\frac{1}{t}\log t,\quad t>0.$$

因为 $f'(t)=\frac{1}{t^2}(1-\log t)$，所以$f$当$t\leqslant e$时严格递增，$t\geqslant e$时严格递减，并在$t=e$处达到极大值$e^{-1}$。又易知$t\to0$时，$f(t)\to-\infty$；$t\to+\infty$时，$f(t)\to0$。因此，若$a\in(0,\ e^{-1})$，则$f(t)=a$有两个解，一个位于$(1,\ e)$内，另一个位于$(e,+\infty)$内。当$a$充分靠近零时，$f(t)=a$的两个解分别趋于1和$+\infty$。当$a$充分靠近$e^{-1}$时，$f(t)=a$的两个解从$e$的两边趋于$e$。

据上述分析推知，方程(1)的图形是由直线$y=x$及位于区域$D=\{(x,y)|\ x>1,\ y>1\}$内的一条曲线M所组成。并且M以$x=1$及$y=1$为渐近线。由方程$x^y=y^x$显然可知M关于直线$y=x$对称，其交点为(e,e)。

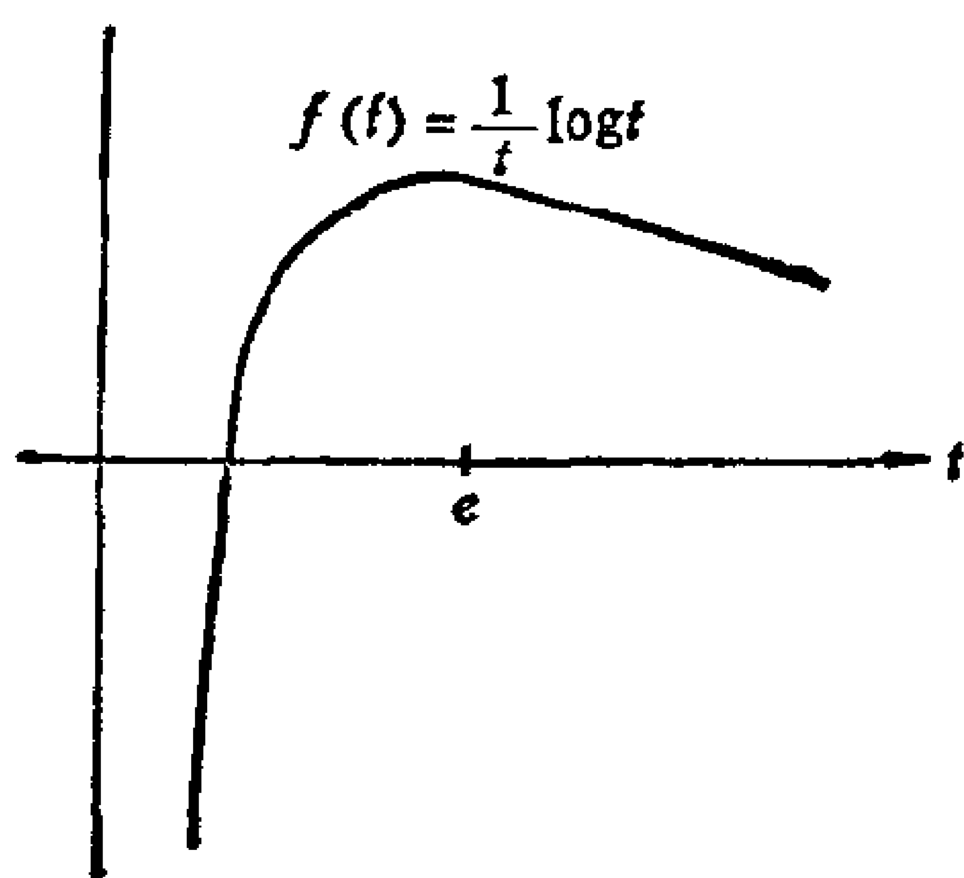


图86

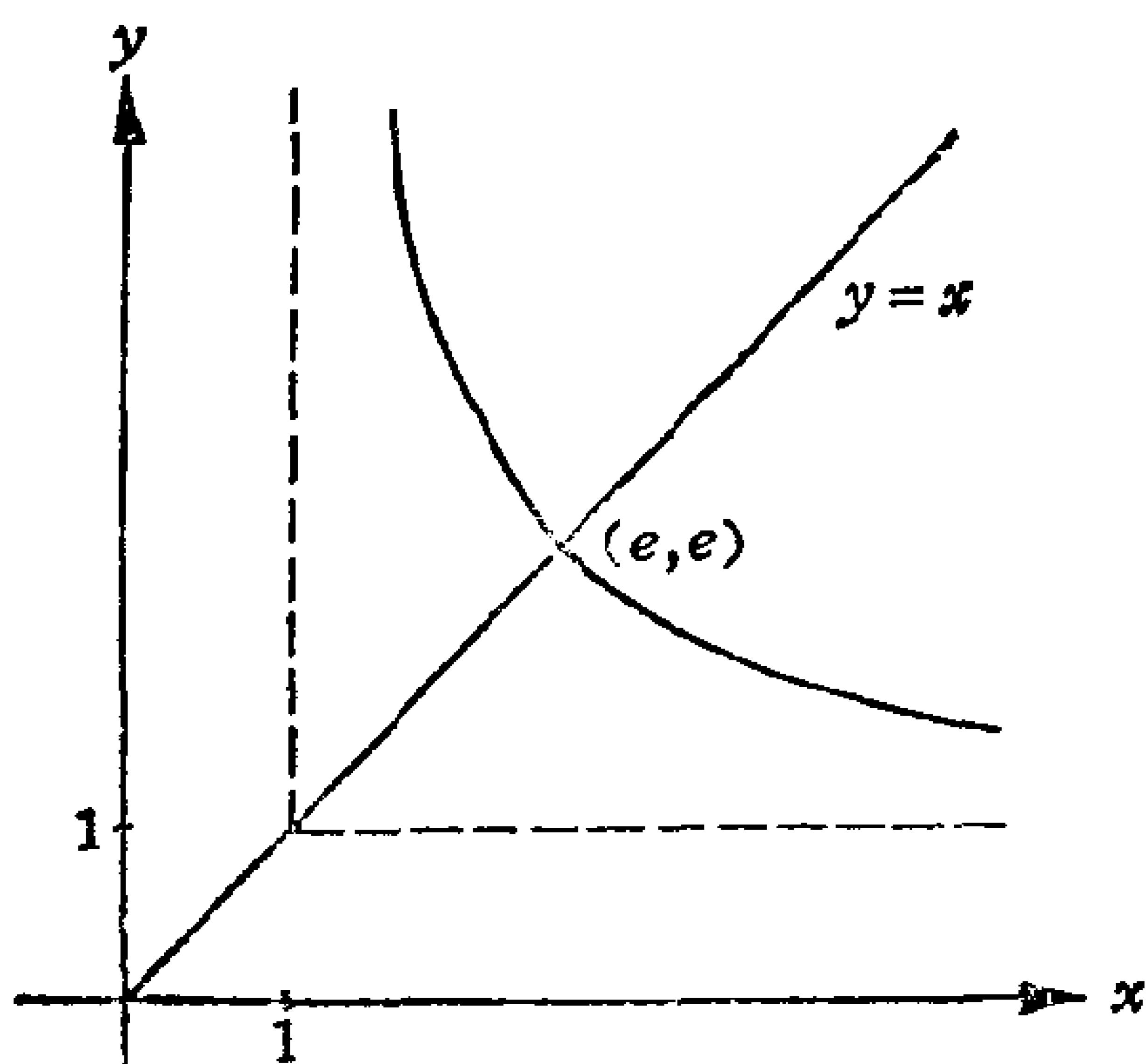


图87

A-2. 假定$\forall x>0$及$\forall y>0$，有$x^\alpha y^\beta<(x+y)k$，令$x=y=t$，则$t^{\alpha+\beta-1}<2k$对任意正数t成立，因此必须$\alpha+\beta=1$。再令$x=s$，$y=1-s$，则$s^\alpha(1-s)^\beta<k$在$0<s<1$内成立。于是当$s\to0$时，必须$\alpha\geqslant0$，当$s\to1$时，必须$\beta\geqslant0$。这就证明了$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$及$\alpha+\beta=1$是使$x^\alpha y^\beta$线性有界的必要条件。

反之，假定$\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$及$\alpha+\beta=1$。则对$0<t<1$，显然有

$t^{\alpha}(1-t^{\beta})<1^{\alpha}1^{\beta}=1$。于是

$$x^{\alpha}y^{\beta}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{x}{x+y}\right)^{\beta}(x+y)<x+y$$

对任意正数x，y都成立。因此只须取$k=1$，即知$x^{\alpha}y^{\beta}$是线性有界函数。这就证明了条件的充分性。

A-3. 先将和式写为

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

由
$$\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}<\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\frac{dx}{1+x^2},$$

可得
$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<S_n<\int_0^n\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}.$$

A-4. 设m，n互质，则mn的每一个约数可唯一写成d_1d_2，使得$d_1|m$，$d_2|n$。反之亦然。因此$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$，而

$$F(mn)=\sum_{d|mn}f(d)=\sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n}f(d_1)f(d_2)=F(m)F(n).$$

故F是积性函数。若p为质数，α为正整数，则

$$\begin{aligned}F(p^2)&=f(1)+f(p)+f(p^2)+\cdots+f(p^2)\\&=1-1+1-\cdots+(-1)^2\\&=\begin{cases}1, & \alpha\text{为偶数；}\\0, & \alpha\text{为奇数。}\end{cases}\end{aligned}$$

当n为任一正整数时，设n的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

于是 $F(n)=F(p_1^{\alpha_1})F(p_2^{\alpha_2})\cdots F(p_k^{\alpha_k})$。

显然而见，若α_1，α_2，…，α_k中有一个为奇数，则$F(n)=0$。若α_1，α_2，…，α_k全都是偶数，则$F(n)=1$。换句话说，

$$F(n)=\begin{cases}1, & n\text{为完全平方数,}\\ 0, & n\text{不是完全平方数.}\end{cases}$$

A-5. 因Σ非空，令$A\in\Sigma$，$A\neq\phi$及任何一个$B\in\Sigma$。若$A\cap B$或者等于ϕ，或者等于A，则称A是Σ的一个极小元素。一般地，若$A\in\Sigma$，且A只含有一个点，则A即是Σ的一个极小元素。若Σ中不存在仅含一个点的极小元素，则可进而考察Σ中有无含两个点的极小元素。依此类推，若$\Sigma=\{\phi, \Omega\}$，则Ω即为$\{\phi, \Omega\}$的极小元素。

令B_1，B_2，…，B_p是Σ中全部极小元素的一个适当编组，则它们两两不会相交（即不含公共点）。若不然，当$i\neq j$时，由$B_i\cap B_j=B\neq\phi$及B_i，B_j的极小性可推得$B=B_i=B_j$，这与$B_i\neq B_j$矛盾。

又若$\Omega-(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p)\neq\phi$，则$\Omega-(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p)$不是极小元素，从而必有某个极小元素$B_i$使得

$$B_i=B_i\cap[\Omega-(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p)]=\phi.$$

这不可能。故必有$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p=\Omega$。

$\forall C\in\Sigma$，我们有

$$\begin{aligned}C&=C\cap\Omega=C\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_p)\\&=(C\cap B_1)\cup(C\cap B_2)\cup\cdots\cup(C\cap B_p).\end{aligned}$$

于是又由B_i的极小性推得，$C\cap B_i$或者等于ϕ，或者等于B_i。因此Σ中的每个元素都是B_1，B_2，…，B_p中若干个的并。反之，每个这样的并也是Σ中的一个元素。这就证明了Σ中全体元素的个数（包括ϕ）是

$$\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{p}=2^p,\ 1\leqslant p\leqslant n.$$

将Ω中的n个点任意分成p组，即可得到B_1，B_2，…，B_p，($p=1$，2，…，n)。按定义，它们就是Σ的全体极小元素。因而本题问及的k的取值范围是2^1，2^2，…，2^n。

A-6. 令$n+1=sr$，$s>1$，$r>1$，则

$$1+x+\cdots+x^n=(1+x+\cdots+x^{r-1})(1+x^r+x^{2r}+\cdots+x^{(s-1)r})$$

论断正确。

反之不然。例如，我们有

$$(1+x+x^3)(1+x^2+x^3)=1+x+x^2+3x^3+x^4+x^5+x^6$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 \pmod 2.$$

其中$6+1=7$是质数。

A-7. 我们先证明S含有D的整个圆周。若不然，假定D的圆周上有一点P不在S内，因S是闭集，故存在以P为圆心以充分小的$\varepsilon>0$为半径的小圆盘E不属于S。于是我们可以作出一个圆盘F含有($D-E$)及S，因而$P\notin F$。但这与题设条件"含有整个S的F必含有整个D"相矛盾。(这样的F必定存在，下面再补充证明这一事实。)因此S必含有D的整个圆周。

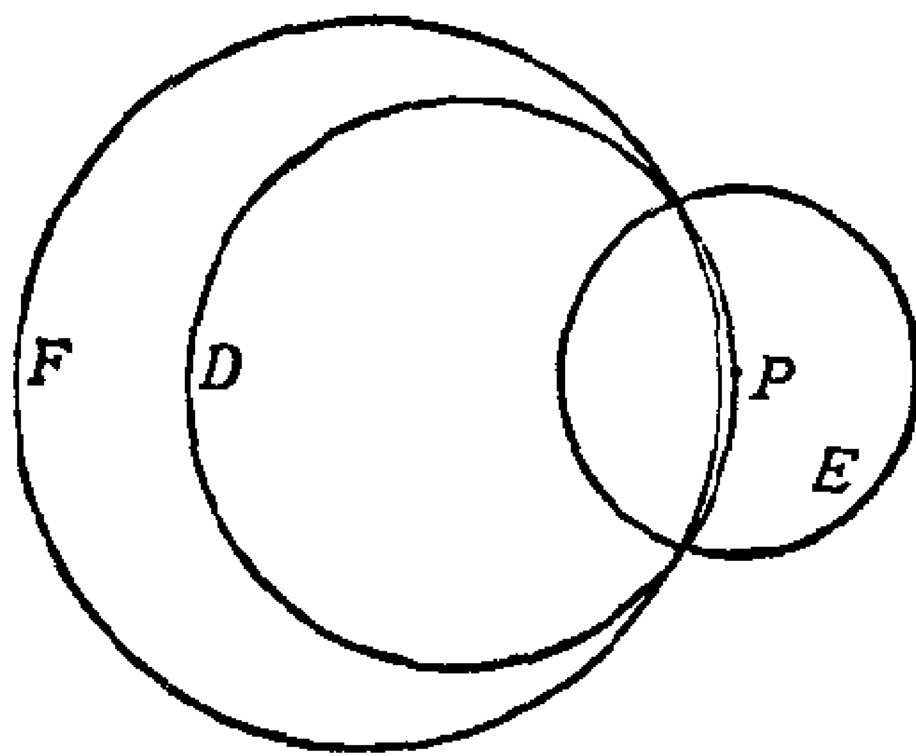


图88

显然，D内任一点都是D的圆周上一条弦的中点，而S含有D的整个圆周，这就证明了本题的论断正确。

关于F的存在性证明：设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-a^2\leqslant 0\}$，并

假定D上的点$P(a,\ 0)$不在S内，作$E=\{(x,y)|\ (x-a)^2+y^2-\varepsilon^2\leqslant 0\}$，$\varepsilon>0$充分小。令

$$\varphi(x,\ y)=(x^2+y^2-a^2)-\frac{1}{2}[(x-a)^2+y^2-\varepsilon^2].$$

作$F=\{(x,\ y)|\ \varphi(x,\ y)\leqslant 0\}$。则有

$$x^2+y^2-a^2\leqslant 0\Longleftrightarrow(x,\ y)\in D,$$

$$(x-a)^2+y^2-\varepsilon^2>0\Longleftrightarrow(x,\ y)\notin E.$$

从而推得$\varphi(x,\ y)<0\Longleftrightarrow(x,y)\in(D-E)$，即$(D-E)\subseteq F$。

但是

$$\varphi(a,0)=\frac{1}{2}\varepsilon^2>0,$$

因此$P\notin F$，

B-1。显然只须证明对于任何一个n（或对于任何一个$n>N$，N为充分大的正整数)，成立$r_ns_n\geqslant 1$即可。

令$\beta_i=a_i^{\frac{1}{2}}$，$\gamma_i=a_i^{-\frac{1}{2}}$。根据柯西——许瓦兹不等式得

$$n^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\right)=(ns_n)(nr_n).$$

$$\Longrightarrow\qquad r_ns_n\geqslant 1.$$

B-2。我们来求解下列与原问题等价的问题：以$(0,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$，(β,β)，$(0,\beta)$为顶点作一边长为β的闭正方形。在此正方形内随机选择点$(x,\ y)$，求使$|x-y|>a$的概率。

"随机"之意是指所选择的点落在正方形$[0,\beta]\times[0,\beta]$内任一区域的概率与此区域的面积成正比。将正方形用直线$x-y=\pm a$划分出两个有阴影的三角形区域（如图89)，即可发现所求

的概率等于

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{\beta^2}=\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2.$$

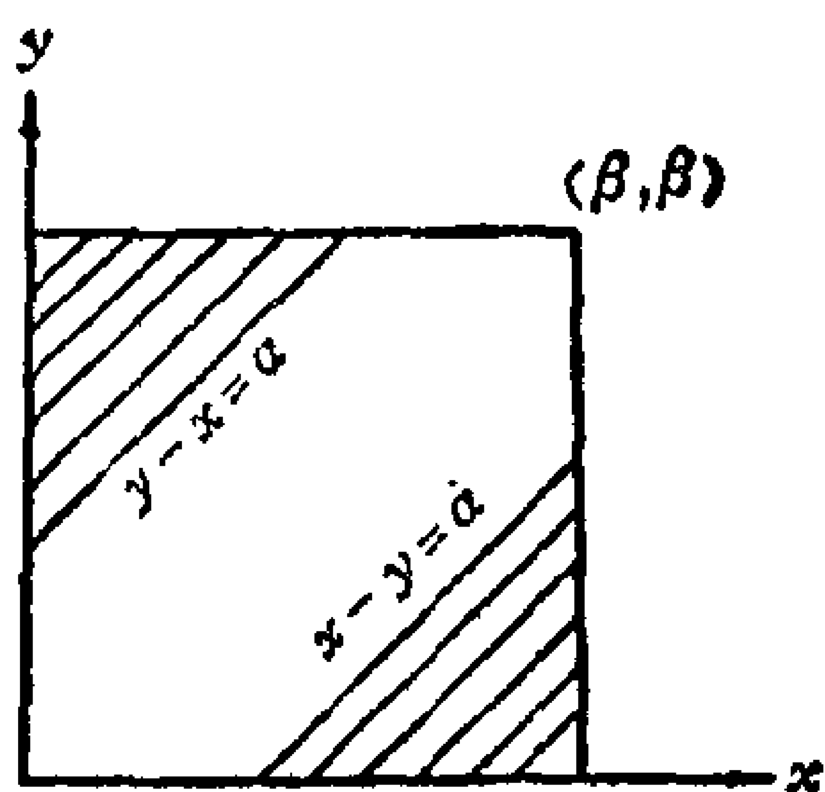


图89

B-3. 设四个已知点为P_1, P_2, P_3, P_4. 依次作出$\Delta P_2P_3P_4$, $\Delta P_1P_3P_4$, $\Delta P_1P_2P_4$, $\Delta P_1P_2P_3$,若P_1, P_2,P_3,P_4中有一个出现在这四个三角形的某一个内部，则作该三角形的外接圆即包含第四个已知点在圆内.若不出现这种情形,则四边形$P_1P_2P_3P_4$必为凸四边形.因已知四点不共圆，故$\angle P_1+\angle P_3\neq\angle P_2+\angle P_4$. 不妨设$\angle P_1+\angle P_3>\angle P_2+\angle P_4$. 于是$\Delta P_1P_2P_4$及$\Delta P_2P_3P_4$的外接圆分别含有$P_3$与$P_1$在其内部.（同弧所对的圆周角小于圆内角).

B-4. 我们先固定x_2, x_3,…,x_n, 仅视x_1为变数,易证已知的函数（记为$f(x_1)$)是下凸的. 于是除$f(x_1)=C$(常数）外，我们有

$$\max f(x_1)=\max\{f(0),\ f(1)\}.$$

已知函数在R_n内的定义域是一个有界闭集，故必在某点(n数组）达到极大值. 由于我们将x_1取作0或1时，得到的两个$n-1$元函数的极大值没有变小. 依此类推，当全部x_1, x_2,…, x_n分别取为0或1时，所求函数必定会达到它的极大值.

若诸x_k中有p个取为0，有$n-p$个取为1,则所求函数即化为

$$p(n-p)=\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}-p\right)^2.$$

因此当n为偶数时,取$p=n/2$,即得到所求函数的极大值为$n^2/4$. 当n为奇数时，取$p=(n\pm1)/2$，即得所求函数的极大值为$(n^2-1)/4$.

B-5. 定义$g_1(n)=n!$，$g_{k+1}(n)=[g_k(n)]!$，则求证的双边不等式即可写成：

$$f_k(n)<g_k(n)<f_{k+1}(n),\quad n>2.$$

先证左边的不等式：当$t\geqslant 2n^2$时，我们有

$$t!>(n^2)^{t-n^2}=n^t\cdot n^{t-2n^2}\geqslant n^t. \qquad (1)$$

令$n=3$或4而$k\geqslant 2$，则

$$g_k(n)\geqslant g_2(3)=6!=720>32\geqslant 2n^2.$$

若$n\geqslant 5$，$k\geqslant 1$ 则

$$g_k(n)\geqslant n!\geqslant n(n-1)(n-2)>2n^2.$$

易见当$n\geqslant 3$时，有$f_1(n)<g_1(n)$，及$f_2(3)<f_2(4)=256<720=g_2(3)<g_2(4)$。假定$n\geqslant 3$时，$f_k(n)<g_k(n)$，（若$n=3$或4，则$k\geqslant 2$），那末由$g_k(n)>2n^2$及(1)可得

$$f_{k+1}(n)=n^{f_k(n)}<n^{g_k(n)}<[g_k(n)]!=g_{k+1}(n).$$

因此，由归纳法原理证得本题左边的不等式成立。

再证右边的不等式：补充定义$g_0(n)=n$，并注意$g_{k+1}(n)=g_k(n!)$，我们来证明下列的辅助不等式

$$g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_k(n)<n^{g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_{k-1}(n)} \qquad (2)$$

对于$k\geqslant 1$及$n>2$成立。

先看$k=1$及$n>2$时的情形，我们有

$$n\cdot n!=n\cdot n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1<n\cdot n\cdots n\cdot n=n^n$$

从而得知 $g_0(n)g_1(n)<n^{g_0(n)}$.

再假定对于定值$k>1$及$n>2$时，(2)能成立。那么

$$\begin{aligned}&g_0(n)g_1(n)g_2(n)\cdots g_{k+1}(n)\\&=g_0(n)g_0(n!)g_1(n!)\cdots g_k(n!)<n(n!)^{g_0(n!)\cdots g_{k-1}(n!)}\\&\leqslant n^{g_1(n)\cdots g_k(n)}\cdot(n!)^{g_1(n)\cdots g_k(n)}\\&=(n\cdot n!)^{g_1(n)\cdots g_k(n)}<(n^{g_0(n)})^{g_1(n)\cdots g_k(n)}\end{aligned}$$

$$=n^{g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)}.$$

因此，由归纳法原理知，不等式(2)对任意的$k\geqslant 1$及$n>2$都成立。最后来证明

$$g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)<f_{k+1}(n) \qquad (3)$$

对于$k\geqslant 1$及$n\geqslant 2$成立。($k=0$时，显然成立等式)

当$k=1$时，(3)即化为$n\cdot n!<n^n$，显然成立，假定(3)对于某个固定$k>1$及$n\geqslant 2$成立，则由(2)可得

$$g_0(n)g_1(n)\cdots g_{k+1}(n)<n^{g_0(n)g_1(n)\cdots g_k(n)}$$

$$<n^{f_{k+1}(n)}=f_{k+2}(n).$$

由归纳原理知，(3)对任意的$k\geqslant 1$及$n>2$都成立。亦即

$$g_k(n)<f_{k+1}(n).$$

B-6. 考察下列三个具初值条件的方程所确定的函数

$$u''+3u=0, \quad u(0)=1, \ u'(0)=0,$$

$$y''+(1+\sqrt{x})y=0, \ y(0)=1, \ y'(0)=0,$$

$$v''+v=0, \quad v(0)=1, \ v'(0)=0.$$

易知 $u(x)=\cos\sqrt{3}x$, $v(x)=\cos x$.

对于$0<x<\pi/2$，我们有

$$3>1+\sqrt{x}>1.$$

根据斯图谟比较定理，在区间$0<x<\pi/2$内，u的第一个零点(即$\pi/2\sqrt{3}$)应位于y的第一个零点(设为ξ)的前面，而ξ应位于v的第一个零点($\pi/2$)的前面。因此应有$\pi/2\sqrt{3}<\xi<\pi/2$.

假定y在$(\xi, \pi/2)$有第二个零点η，则由施图谟定理断定，u的零点应当位于(ξ, η)内。但u在$(0,\pi/2)$内仅有一个零点$\pi/2\sqrt{3}<\xi$。因此y不可能有第二个零点出现在$(0,\pi/2)$内。

B-7. 若$\{a_n\}$中有某个$a_p=0$，则由$a_{p+m}\leqslant 0\cdot a_m=0$。因而对于任何一个$n\geqslant p$，恒有$a_n=0\Rightarrow \lim a_n^{\frac{1}{n}}=0(n\to\infty)$.

现假定$\{a_n\}$无一项等于零，令$b_n=\log a_n$，则由$a_{m+n}\leqslant b_m+$

a_n 可得$b_{m+n}\leqslant b_m+b_n$。进而可得

$$b_{km+t}\leqslant kb_m+b_t$$

对任何非负整数k，m，t都成立。

现在固定m,对任意的n,令$n=k(n)m+t(n),0<t(n)<m$。并记$c=\max(b_0,b_1,\cdots,b_{m-1})$，则

$$b_n=b_{k(n)m+t(n)}\leqslant k(n)b_m+b_{t(n)}$$
$$\leqslant k(n)b_m+c$$

$$\Longrightarrow\frac{b_n}{n}<\frac{k(n)}{n}b_m+\frac{c}{n}.$$

易见$n\to\infty$时,$\frac{k(n)}{n}\to\frac{1}{m}$。由此可得

$$\limsup\frac{1}{n}b_n\leqslant\frac{1}{m}b_m. \tag{1}$$

若有$a>\liminf b_n/n$，则可选择m，使得$b_m/m<a$，于是由(1)有

$$\limsup\frac{1}{n}b_n\leqslant a.$$

由a的任意性可推得

$$\limsup\frac{1}{n}b_n\leqslant\liminf\frac{1}{n}b_n$$

因此极限$\lim b_n/n$广义地存在，在(1)中取$m=1$,便有$\lim b_n/n\leqslant 1$，但也可能有$\lim b_n/n\to-\infty$。无论如何，可以断定极限

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}b_n\right)$$

一定存在(有限)。

第二十三届(1962年12月1日)

上午试题

A-1. 设平面上有五个已知点，其中每三点不在一条直线上．求证这五个点中必有某四个点能构成一凸四边形的顶点．

A-2. 设函数 f 定义在有限或无限区间 I 上，I 的左端点为 0．若正数 $x\in I$，则 f 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求满足上述条件的一切函数 f．

A-3. 设 $\triangle ABC$ 有一内接 $\triangle A'B'C'$，A' 在 BC 边上，B' 在 AC 边上，C' 在 AB 边上．且有

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{BC'}{C'A}=\frac{CA'}{A'B}=k.$$

其中 k 是一个正的常数．连接 AA'，BB'，CC' 构成 $\triangle PQR$，求证

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}\quad .$$

A-4. 设 $f(x)$ 定义在长度不小于 2 的一个区间里，且 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$．求证 $|f'(x)|\leqslant 2$．

A-5. 求下列组合级数的和

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$$

A-6. 设 S 为满足下列条件的有理数集：

(1) 若 $a\in S$，$b\in S$，则 $a+b\in S$，$ab\in S$．

(2) 对任一有理数 r．三个关系 $r\in S$，$-r\in S$，$r=0$ 有且

仅有一个成立。

求证：S是由全体正有理数组成的集；

下午试题

B-1. 定义 $x^{[n]}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，$n$为正整数，$x^{[0]}=1$，求证：

$$(x+y)^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}\,y^{[n-k]}.$$

B-2. 设R为全体实数集，S是正整数的所有子集构成的集，试在R上定义一个函数f，使它以S为其值域。且当$a<b$时，$f(a)$是$f(b)$的真子集。

B-3. 设S是欧氏平面上含有原点的一个凸形区域。若从原点引出的每一条射线（即半直线）都至少有一点在S的外部，求证S是有界的。（平面区域中任意二点间的线段完全在其内部，则称此区域是凸的）。

B-4. 一欧氏平面被有限个圆分成了若干个区域。对所分的每个区域分别涂以红色或蓝色，求证能使任何两相邻区域涂的颜色不同。（凡有共用弧作为边界的两个区域称为相邻的区域）。

B-5. 设n为大于1的整数，求证：

$$\frac{3n+1}{2n+2}<\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n<2\ .$$

B-6. 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)$$

其中a_k，b_k为常数，$x\in[0,2\pi]$，$|f(x)|\leqslant 1$，且对$0\leqslant x_1<$

$x_2<\cdots<x_{2n}<2\pi$,有$|f(x_1)|=|f(x_2)|=\cdots=|f(x_{2n})|=1$。求证存在一个常数$a$,使得$f(x)=\cos(nx+a)$。

解　答

A-1. 设A,B,C,D,E是已知的五个点,先作出四边形$ABCD$,若是凸的,问题获证.若是凹的,则必可作出一个三角形包含另一点在其内部。不妨认为D点位于$\triangle ABC$内。再看E点,若在$\triangle ABC$之外,则三个四边形$DAEB$,$DBEC$,$DCEA$中至少有一个是凸的.问题获证。若E点也在$\triangle ABC$内部,则直线DE必与$\triangle ABC$的二边相交,不妨认为与AB,AC相交(如图90),则四边形$BDEC$就是凸的。

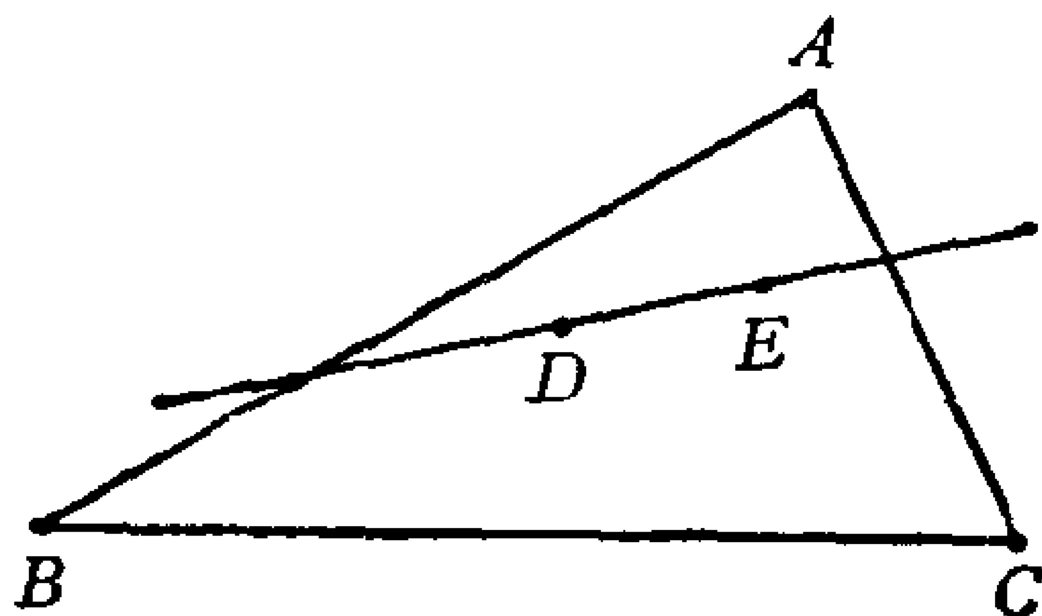


图90

A-2. 因几何平均值只对正数有意义,故在$[0,x]$上,f处处为正。再者f在$[0,x]$上应是可积的。

为方便起见,令$f(0)=a>0$及

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt. \tag{1}$$

依题设条件可得

$$af(x)=\left(\frac{1}{x}F(x)\right)^2 \tag{2}$$

对一切正数$x\in I$成立。

由(1)知,对$x>0$,F是连续可微函数,由(2)知,f也是连续可微函数。于是(2)可化为

$$aF'(x)=\frac{1}{x^2}F(x)^2.$$

分离变量解此微分方程得

$$F(x)=\frac{ax}{1-cx},$$

其中 c 是积分常数．因此，当 $x>0$ 时，我们有

$$f(x)=F'(x)=\frac{a}{(1-cx)^2}.$$

应注意：$x=0$时，求得的公式也保持有效；当 $c>0$ 时，f 在区间$[0,1/c]$上不可积，最后得适合问题条件的函数 f 应是

$$f(x)=\frac{a}{(1-cx)^2}\quad\begin{cases}\text{若 } c>0\text{，则 } 0\leqslant x<1/c\\ \text{若 } c\leqslant 0\text{，则 } 0\leqslant x<\infty.\end{cases}\qquad(3)$$

其中 $a>0$．

A-3．为方便起见，就用△表示三角形面积，并应用面积公式可得

$$\frac{\triangle AQC}{\triangle AQC'}=\frac{QC}{QC'}=\frac{\triangle BQC}{\triangle BQC'},$$

$$\Longrightarrow\qquad \frac{\triangle BQC}{\triangle AQC}=\frac{\triangle BQC'}{\triangle AQC'}=\frac{BC'}{AC'}=k.$$

同理可得$\dfrac{\triangle AQB}{\triangle AQC}=\dfrac{\triangle A'QB}{\triangle A'QC}=\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{1}{k}$.

$$\Longrightarrow\qquad \frac{\triangle AQB+\triangle BQC+\triangle AQC}{\triangle AQC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AQC}$$

$$=1+k+\frac{1}{k}=\frac{1+k+k^2}{k}.$$

由对称性可得

$$\frac{\triangle AQC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle BRA}{\triangle ABC}=\frac{\triangle CPB}{\triangle ABC}=\frac{k}{1+k+k^2}.$$

由于$\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle AQC-\triangle BRA-\triangle CPB$，从而有

$$\frac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=1-3\cdot\frac{k}{1+k+k^2}=\frac{(1-k)^2}{1+k+k^2}.$$

A-4. 不失一般性，不妨认为$f(x)$定义在区间$[-1,1]$上，应用泰勒展开公式，对于$x\in[-1,1]$，我们有

$$f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+\frac{1}{2}(1-x)^2f''(\xi),$$

$$f(-1)=f(x)+(-1-x)f'(x)+\frac{1}{2}(-1-x^2)f''(\eta),$$

其中$\xi\in(x,1)$，$\eta\in(-1,x)$，由此可得

$$f(1)-f(-1)=2f'(x)+\frac{1}{2}(1-x)^2f''(\xi)$$
$$-\frac{1}{2}(1+x)^2f''(\eta).$$

注意$|f(x)|\leqslant 1$及$|f''(x)|\leqslant 1$，我们有

$$2|f'(x)|\leqslant|f(1)|+|f(-1)|+\frac{1}{2}(1-x)^2|f''(\xi)|$$
$$+\frac{1}{2}(1+x)^2|f''(\eta)|.$$
$$\leqslant 2+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}(1+x)^2=3+x^2\leqslant 4.$$

$\Longrightarrow\qquad |f'(x)|\leqslant 2$.

A-5. 用微分法：对

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边求导后再乘以x得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^k\ .$$

再对上式两边求导后乘以 x，并令 $x=1$ 即得结论：

$$n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}+nx(1+x)^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k.$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}.$$

A-6。若 $r\neq 0$，则 $r\in S$ 或 $-r\in S\Longrightarrow r^2\in S$。取 $r=1$，显然有 $1\in S$。从而由条件 $a+b\in S$ 推知全体正整数都属于 S。

设 p,q 为二整数，则 $1/q^2\in S$。再由 $ab\in S$ 的条件推得

$$\frac{p}{q}=pq\left(\frac{1}{q^2}\right)\in S\ .$$

因此，S 含有全体正有理数，由条件(2)即知 0 与全体负有理数不属于 S。即 S 是由全体正有理数组成的集。

B-1。用数学归纳法，$n=0$ 时，求证的等式显然成立，假定 $n=p$ 时，求证的等式成立，则

$$(x+y)^{[p+1]}=(x+y)^{[p]}(x+y-p)$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p-k]}(x-k+y-(p-k))$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k+1]}y^{[p-k]}+\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p-k+1]}$$

$$=\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}x^{[k]}y^{[p+1-k]}+\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{[k]}y^{[p+1-k]}$$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)x^{[k]}y^{[p+1-k]}$$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^{[k]}y^{[p+1-k]}\quad.$$

因此 n 为任意正整数时，求证的等式都成立。

B-2. 令ϕ是对全体有理数的一种编序法则，即ϕ：$N\to Q$是一个满单映射，其中 N 是正整数集，Q 是有理数集。

现对 f 作如下定义：

$$f(r)=\{n:\varphi(n)<r\},$$

其中 r 是任一实数，$n\in N$。于是 f 是定义在 R 上的一个函数其值域是 N 的子集所成的集 S。

若$a<b$，且$n\in f(a)$，则$\phi(n)<a<b\Longrightarrow n\in f(b)\Longrightarrow f(a)\subseteq f(b)$。再注意对于$a<b$，必存在正整数 p，使得$a<\phi(p)<b$，$\Longrightarrow p\in f(b)$。但$p\notin f(a)$。因此$f(a)$是$f(b)$的真子集。

B-3. 考务委员们指出，题设的区域 S 是开集时，若不补充某种拓扑假定，结论就不能成立。例如，x-y平面上的带形开域$0<x<1$连同原点在内的无界凸集S，就没有一条过原点的射线完全在S内。

我们来证明：如果原点是S的内点，或者S是闭集，那么S就是一个有界的凸集。

以原点O为极点建立极坐标系(ρ,θ)，依题设条件知，对任意的θ，集$\{\rho:(\rho,\theta)\notin S\}$非空，且$\rho$以零为其下界。令

$$f(\theta)=\inf\{\rho:(\rho,\theta)\notin S\}.$$

S与过O点一切射线的交是一个区间，且有

$$0\leqslant\rho<f(\theta)\Longrightarrow(\rho,\theta)\in S\qquad(1)$$

$$\rho>f(\theta)\Longrightarrow(\rho,\theta)\notin S.\qquad(2)$$

因此，若M是f的一个上界，则S位于闭圆域$\rho=M$内。

假定O是S的内点，令D是O为圆心的一个圆域，且$D\subseteq S$。对任意的$a\in[0,2\pi]$，令$P_a=(1+f(a),a)$，以P_a为对称中心，

作圆域D_α与D对称．若$Q\in D_\alpha$．则与Q关于P_α对称的点$Q\in D\subseteq S$．由于$P_\alpha\notin S$，故$Q\notin S$，从而$D_\alpha\cap S=\phi$．设O点对D_α的视角为2ε，则从O点引出与D_α相交的射线，其极角的变动区间为$I_\alpha=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$．$O$点至$D_\alpha$的距离小于$2(1+f(\alpha))$．于是，当$\theta\in I_\alpha$时，有$f(\theta)\leqslant 2(1+f(\alpha))$．根据海因——波雷尔定理，存在有限个完全覆盖区间$[0,2\pi]$的区间$I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},\cdots I_{\alpha_n}$．将此$n$个区间$2(1+f(\alpha_1))$，$2(1+f(\alpha_2))$，$\cdots$，$2(1+f(\alpha_n))$中最大的一个取作$f$的上界．这就证明了$S$若以$O$为其内点，则$S$必为有界的凸集。

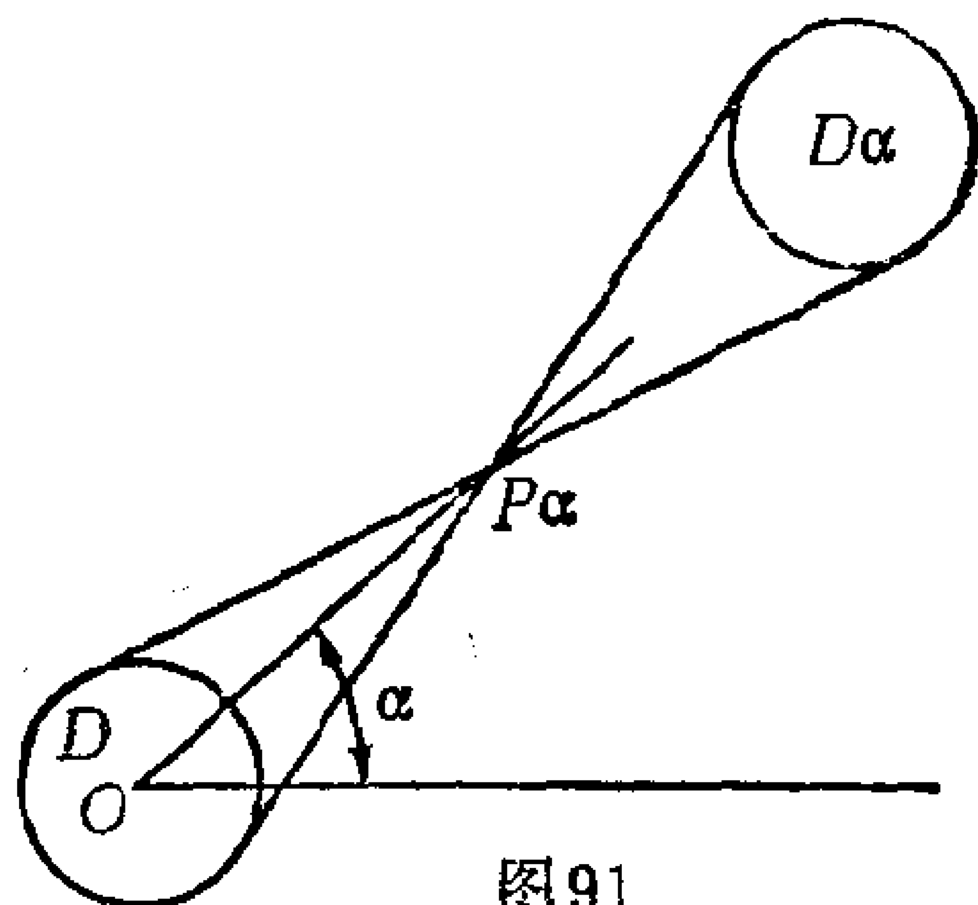


图91

再假定S是无界闭集，于是我们可从区间$[0,2\pi]$选出无穷序列$\{\theta_n\}$，使得$f(\theta_n)\to\infty$．根据波察诺一魏尔斯特拉斯定理，存在$\{\theta_n\}$的一个收敛子序列．为方便起见，不妨就认为$\{\theta_n\}$是收敛的：$\theta_n\to\beta$．令$\rho_0=1+f(\beta)$，则存在某个N，使得对于所有的$n>N$，成立$f(\theta_n)>\rho_0$．由(1)得知，$(\rho_0,\theta_n)\in S$．由于S是闭集，且$(\rho_0,\theta_n)\to(\rho_0,\beta)$，故$(\rho_0,\beta)\in S$．但由(2)得知，$(\rho_0,\beta)\notin S$．这一矛盾证明了$S$只可能是有界的闭集．

B-4．对平面上每一个被圆分成的区域，分别数一数它位于多少个圆的内部？若它位于奇数个圆的内部，就涂成红色，若它位于偶数个圆的内部，就涂成蓝色．这种涂色方法即能符合问题的要求．

若平面上只有两个圆划分形成的区域，则命题显然正确，假定平面被n个圆分成若干区域后，命题也正确($n\geqslant 2$)，则对此情形再任意增加一个圆，即得$n+1$个圆(记为C_{n+1})划分原平面成更多区域的情形．考察原来的某个区域D被C_{n+1}分成的两

个子域D_1、D_2它们共有C_{n+1}的一段圆弧作为边界，因而其中有且仅有一个(不妨设为D_1)位于C_{n+1}里面，由此得知D_1比D_2多位于一个圆里面。这一分析对任何与C_{n+1}相交的区域都有效。因此命题对于$n+1$个圆的情形正确。即命题普遍正确。

B-5. 对于$n>1$，$x>0$，函数x^n是凸的(即其图象下凸)。因而它在[0,1]上的积分小于用梯形法则算得的面积：

$$\frac{1}{n+1}=\int_0^1 x^n dx<\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{0}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}\right)^n\right]$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{3n+1}{2n+2}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}<\left[\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right].$$

欲证题中和式小于2，只须将上面的积分式与n等分子区间上的黎曼小和比较(两边加1)，即可得出结论。但我们可用下述方法证明更加精确的估计式：

易知$1-x\leqslant e^{-x}$对任意的x都成立，故有

$$\left(1-\frac{i}{n}\right)^n\leqslant e^{-i}.$$

令$i=0,1,2,\cdots,n$，即得

$$\left(\frac{n}{n}\right)^n+\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+e^{-1}+\cdots+e^{-(n-1)}$$

$$\leqslant\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}<2.$$

B-6. 利用公式

$$\cos kx=\frac{1}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right),\quad \sin kx=\frac{1}{2}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right)$$

并令 $z=e^{ix}$，即可将题设的n次三角多项式化为下面的复系数多项式

$$f(x)=z^{-n}p(z)_{\circ}$$

其中$p(z)$是一个$2n$次复系数多项式。

$f(x)$的每个零点b对应于$p(z)$在复平面的单位 圆上的每个零点e^{ib}。由复函数微分法(注意$dz/dx=iz$)可得

$$f'(x)=iz^{-n}[zp'(z)-np(z)]_{\circ}$$

若 b 是$f(x)$的二重零点，则e^{ib}就是$p(z)$的二重零点。因此，$f(x)$在$[0,2\pi]$上零点的个数不超过$2n$。(即与$p(z)$的零点一样多。)

本题中$f(x)$的系数a_K，b_K显然全为实数，否则，例如设$f(x)=\cos x+i\sin x$就得不到应有的结论。再者，当$n>0$时，易知 $|f(x)|\neq 1$。

我们来研究两个$2n$次非负的三角多项式

$$1-f(x)^2 与 f'(x)^2。$$

它们分别具有$2n$个不同的二重零点$x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$。由两多项式相等的判别法则知，存在某个常数$m>0$，能使

$$f'(x)^2=m^2[1-f(x)^2] \qquad (1)$$

其中$m\neq 0$，否则由$m=0\Longrightarrow f(x)\equiv c$(常数)，导致$n=0$的平凡情况。

微分方程(1)的通解是

$$f(x)=\cos(mx+a)_{\circ} \qquad (2)$$

其中a为任意常数。由于(1)还有奇解 $f(x)=\pm 1$，这就会产生许多分段函数作为(1)的解。例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ \cos mx, & 0<x<\dfrac{\pi}{m}\\ -1, & x\geqslant\dfrac{\pi}{m}.\end{cases}$$

即为(1)的一个解。

我们只关心(1)的解是n次三角多项式的情形。这样的解是以2π为周期的解析函数，因而不能用分段函数表示，亦即一定具有通解(2)的形式，且m为正整数。再由题设条件知，$x\in[0,2\pi]$，$|\cos(mx_i+a)|=1$，$i=1,2,\cdots,2n$。因此$m=n$。这就证明了本题论断的正确性。

第二十四届 (1963年12月7日)

上午试题

A-1. (i) 已知一个正六边形，六个正方形和六个正三角形的边长都相等，求证用它们能拼成一个既不重叠又不留空隙的正十二边形。(ii) 设$P_1,\cdots,P_{12}$依次为正十二边形的顶点，求证三条对角线P_1P_9，P_2P_{11}，P_4P_{12}交于一点。

A-2. 设$\{f(n)\}$是取正整数值的严格递增序列。已知$f(2)=2$，当m，n互质时，

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

求证： $f(n)=n$.

A-3. 设$f(x)$是定义在$[1,+\infty)$上的连续函数。算子δ定义如下：

$$\delta \equiv x\frac{d}{dx}.$$

求下列微分方程解的积分形式：

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y=f(x),$$

其中y满足初值条件

$$y(1)=y'(1)=\cdots=y^{(n-1)}(1)=0.$$

A-4. 已知$\{a_n\}$是一个正实数序列，求证

$$\lim_{n\to\infty}\sup n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

并说明此不等式右边的1不能换成比1大的任何数.（记号 lim sup亦可写为$\overline{\lim}$）

A-5.（i） 设函数f在闭区间$[0, \pi]$上连续，且有

$$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta d\theta=\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta=0.$$

求证：在$(0, \pi)$内存在两点α，β，使得

$$f(\alpha)=f(\beta)=0.$$

（ii） 设R是欧氏平面上任一有界的，凸的，开区域（即R是被某一圆域包含的连通开集，R内任意二点间的线段完全位于其内部）。试应用（i）的结论证明：R的形心（重心）至少平分R内三条不同的弦。

A-6. 设M是椭圆的一条弦UV的中点，过M再任作两弦AB和CD，设AC，BD与UV分别交于P，Q两点。求证M也是线段PQ的中点。

下午试题

B-1. 设x^2-x+a能整除$x^{13}+x+90$. 试确定整数a的值。

B-2．设m，n为任意整数，S是由2^m3^n类型的数构成的集。P是全体正实数构成的集。问S在P内是否稠密？

B-3．设 f 是在全体实数上二次可微函数．试求下列函数方程的解

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y).$$

B-4．设C是一条有连续转动切线的平面闭曲线，它围成一个凸区域，T是C的具有极大周长的内接三角形．求证过T的三个顶点所作C的法线是T的对应内角的平分线．

如果T已经具有上述求证的性质，那么T具有极大周长是不是必要条件？若C是一个圆，则情况如何？

B-5．设$\{a_n\}$是满足下列两个条件的实数序列：

(i)　$0\leqslant a_k\leqslant 100a_n$，其中$n=1, 2, 3, \cdots$，且 $n\leqslant k\leqslant 2n$．

(ii)　级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛．

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$．

B-6．设E是不超过三维的欧氏空间，A 是E的非空子集．将A 内任意两点连成线段，由这些闭线段上的全体点构成的集记为$S(A)$．对一给定的非空集A_0，定义

$$A_n=S(A_{n-1}),\quad n=1, 2, 3, \cdots.$$

求证：　$A_2=A_3=\cdots$．

(只含一个点的集A，可认为是闭线段的特殊情形)．

解答

A-1．(i)　在边长为 s 的正六边形的每边上向外作六个正方形．于是每两个共顶点的正方形的两邻边夹角为 $360°-90°$

$-120^\circ-90^\circ=60^\circ$. 在这六个正方形的相邻空隙里，恰好可安放六个边长为 s 的正三角形. 这样就拼成了符合本题要求的正十二边形. 其每边长为 s，每个顶角等于 $90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

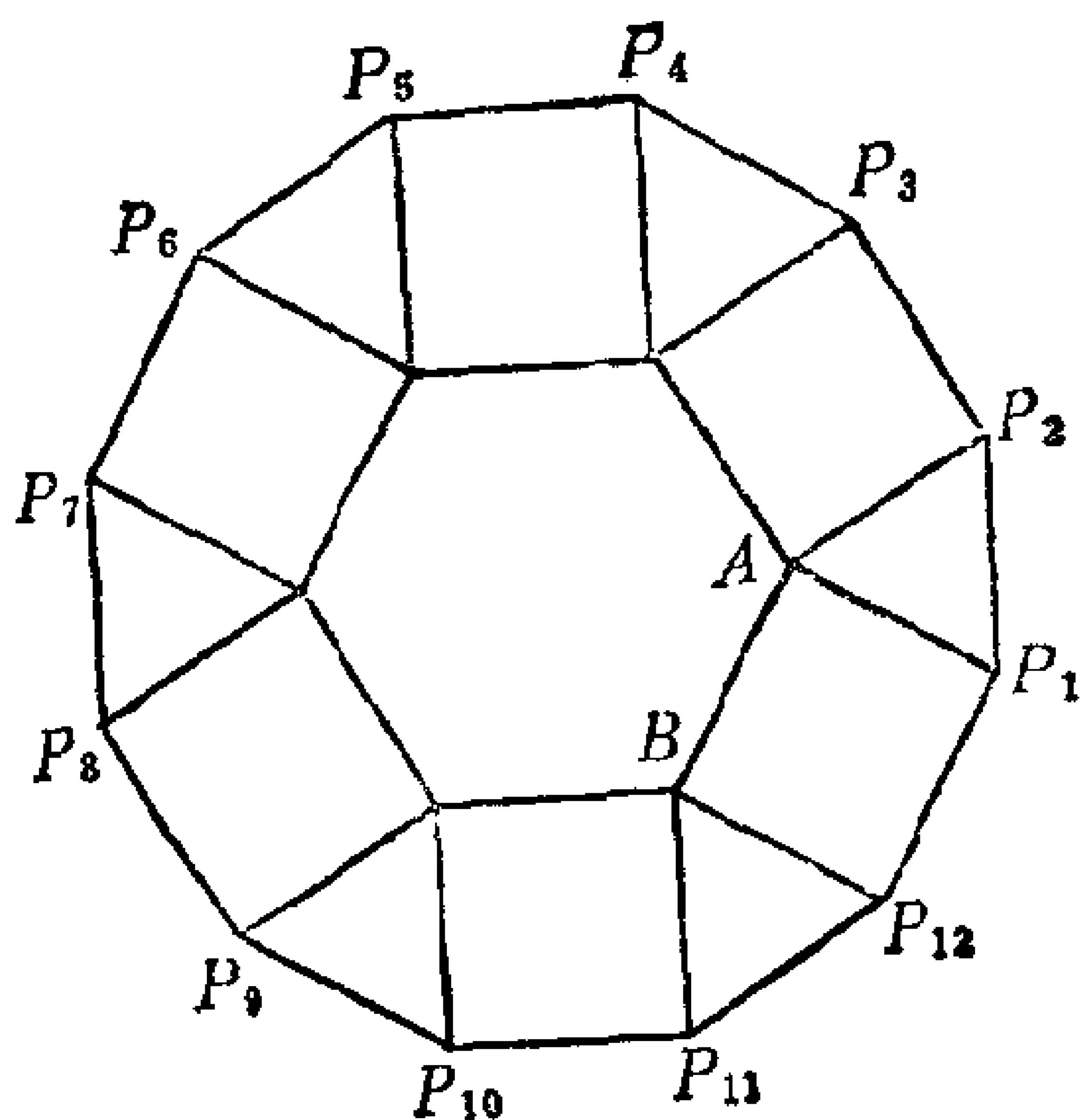


图92

(ii) 因为正十二边形有一个外接圆，所以 $\angle P_1P_{12}P_4$ 是 $\overset{\frown}{P_1P_4}$ 所对中心角的一半，又因

$$\angle P_1P_{12}P_4=360^\circ\times\frac{3}{12}\times\frac{1}{2}=45^\circ,$$

所以 $P_{12}P_4$ 是正方形 P_1ABP_{12} 的一条对角线. 同理可知 P_1P_9 是该正方形的另一条对角线.

另一方面，P_2P_{11} 显然是六边形 $P_1P_2ABP_{11}P_{12}$ 的对称轴. 因此正十二边形的三条对角线 P_1P_9，P_2P_{11}，P_4P_{12} 交于正方形 P_1ABP_{12} 的中心.

A-2. $\because 0<f(1)<f(2)=2$,

$\therefore f(1)=1$.

由 f 的整值递增性可知，对于任意二正整数 n，p，有

$$f(n+p)\geqslant f(n)+p.$$

令 $f(3)=a$，则可推得

$$f(5)\geqslant a+2,$$

$$f(15)=f(3)f(5)\geqslant a^2+2a,$$

$$f(18)\geqslant f(15)+3\geqslant a^2+2a+3; \qquad (1)$$

$$f(6)=f(2)f(3)=2a,$$

$$f(5)\leqslant f(6)-1=2a-1,$$

$$f(10)=f(2)f(5)\leqslant 4a-2,$$
$$f(9)\leqslant f(10)-1\leqslant 4a-3,$$
$$f(18)=f(2)f(9)\leqslant 8a-6. \tag{2}$$
由(1)，(2)$\Rightarrow(a-3)^2\leqslant 0$. $\therefore f(3)=a=3$.

下面用数学归纳证明等式：

$$f(2^k+1)=2^k+1. \tag{3}$$

当$k=1$时，(3) 化为$f(3)=3$，命题正确。

假定$k=t$时，$f(2^t+1)=2^t+1$，则

$$f(2^{t+1}+2)=f(2)f(2^t+1)=2(2^t+1)=2^{t+1}+2.$$
$$\because 1=f(1)<f(2)<\cdots<f(2^{t+1}+1)<f(2^{t+1}+2)$$
$$=2^{t+1}+2, \tag{4}$$
$$\therefore f(2^{t+1}+1)=2^{t+1}+1.$$

由归纳法原理知，对任意自然数k，等式(3)都正确。

最后由(3)与(4)即可推得

$$f(n)=n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

A-3. 先用数学归纳证明下列等式

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y=x^n\frac{d^ny}{dx^n}. \tag{1}$$

$n=1$时，$\delta y=x\dfrac{dy}{dx}$，命题正确. 假定等式(1)对于某固定的n成立，则

$$\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)(\delta-n)y$$
$$=(\delta-n)\delta(\delta-1)(\delta-2)\cdots(\delta-n+1)y$$
$$=\left(x\frac{d}{dx}-n\right)x^n\frac{d^ny}{dx^n}=x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

由归纳法原理知等式(1)对任意正整数n都成立。

利用(1)可将题设的微分方程化为

$$x^n y^{(n)}=f(x),\quad x\geqslant 1. \tag{2}$$

(2) 的解可用积分算子$\int_1^x$对$f(x)x^{-n}$积分n次而得到。但我们也可用下述简单解法，从而避免求累次积分。

若$y^{(n)}$当$x\geqslant a$时连续，则$y(x)$可展开成n阶带积分余项的泰勒公式：

$$y(x)=y(a)+(x-a)y'(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(a)$$

$$+\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n)}(t)dt.$$

令$a=1$由(2)即可求得符合本题条件的解为

$$y(x)=\int_1^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{f(t)}{t^n}dt.$$

A-4. 用反证法。假定对于某个正整数k，当所有的$n\geqslant k$时，恒有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1. \tag{1}$$

(1) 可化为$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}$，$\forall n\geqslant k$.

$$\Rightarrow\qquad \frac{a_k}{k}\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geqslant\cdots$$

$$\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+p}+\frac{a_{k+p}}{k+p},$$

其中p可为任意自然数。由调和级数的发散性即知不等式(1)不能成立。因此对任一正整数k，必存在某个$n\geqslant k$，使得

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)>1\Rightarrow \overline{\lim}\ n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

我们若取$a_n = n\log n$，则对$n \geqslant 2$有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\frac{1}{\log n}[1+(n+1)\log(n+1)$$

$$-n\log n]$$

$$=\frac{1}{\log n}\left[1+n\log\frac{n+1}{n}\right.$$

$$\left.+\log(n+1)\right]$$

$$<\frac{1}{\log n}[2+\log(n+1)]\to 1,$$

$$(n\to\infty)。$$

因此，对于$\{a_n = n\log n\}$的任一子序列应有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1.$$

这表明本题不等式右边的 1 不能换成比 1 大的任何数。

另一方面，我们若取 $a_n = n^{1+\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，则用二项式级数展开式即可推得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=1+\varepsilon。$$

A-5.（i） 不妨认为$f \not\equiv 0$. 由条件

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta = 0 \text{及} \sin\theta>0 \ (0<\theta<\pi),$$

可知f在$(0, \pi)$内必定变号. 又由f的连续性可知,至少存在一点$\alpha\in(0, \pi)$，使得$f(\alpha)=0$。

假定α是f在$(0, \pi)$内的唯一零点，则f在$(0, \alpha)$与(α, π)内异号. 于是

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta-\alpha)d\theta \neq 0。 \tag{1}$$

另一方面，我们又有

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta-\alpha)d\theta=\cos\alpha\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta$$

$$-\sin\alpha\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta d\theta=0.$$

这与(1)矛盾。因此f在$(0,\ \pi)$内至少还有第二个零点β，即

$$f(\alpha)=f(\beta)=0,\ \alpha,\ \beta\in(0,\ \pi),\ \alpha\neq\beta.$$

(ii) 取以R的形心P为极点的极坐标系。记R的边界曲线Γ为$\rho=g(\theta)$。由R的有界性及凸性可知，过极点ρ的任一射线与Γ有且仅有一个交点。故g是θ的单值函数。

Γ是一条紧的曲线，因而存在一个由Γ到（极坐标下）单位圆的满单连续映射$(\rho,\ \theta)\to(1,\ \theta)$。其逆映射$(1,\ \theta)\to(g(\theta),\ \theta)$也连续。故$g$是$\theta$的连续函数。

区域R关于直线$\theta=0$及$\theta=\dfrac{\pi}{2}$的矩分别是

$$\iint_R(\rho\cos\theta)\rho d\rho d\theta\text{及}\iint_R(\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

由于R以其形心P作为极点，因此上面两个二重积分都等于零，由此可得

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[g(\theta)]^3\cos\theta d\theta=0=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[g(\theta)]^3\sin\theta d\theta.\quad(2)$$

注意 $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta,\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，由(2)可得：

$$\int_0^\pi\{[g(\theta)]^3-[g(\theta+\pi)]^3\}\cos\theta d\theta=0,$$

$$\int_0^\pi\{[g(\theta)]^3-[g(\theta+\pi)]^3\}\sin\theta d\theta=0.$$

应用(i)证得的结论即知

$$f(\theta)=[g(\theta)]^3-[g(\theta+\pi)]^3$$

在$(0, \pi)$内至少有两个零点．亦即方程

$$g(\theta)=g(\theta+\pi)$$

在$(0, \pi)$内至少有两个根．这表明R内至少有两条不与极轴重合的弦被形心P所平分．我们若取其中一条弦所在的直线作为新的极轴，则由已经证明的事实可知，R内至少存在三条被其形心所平分的弦。

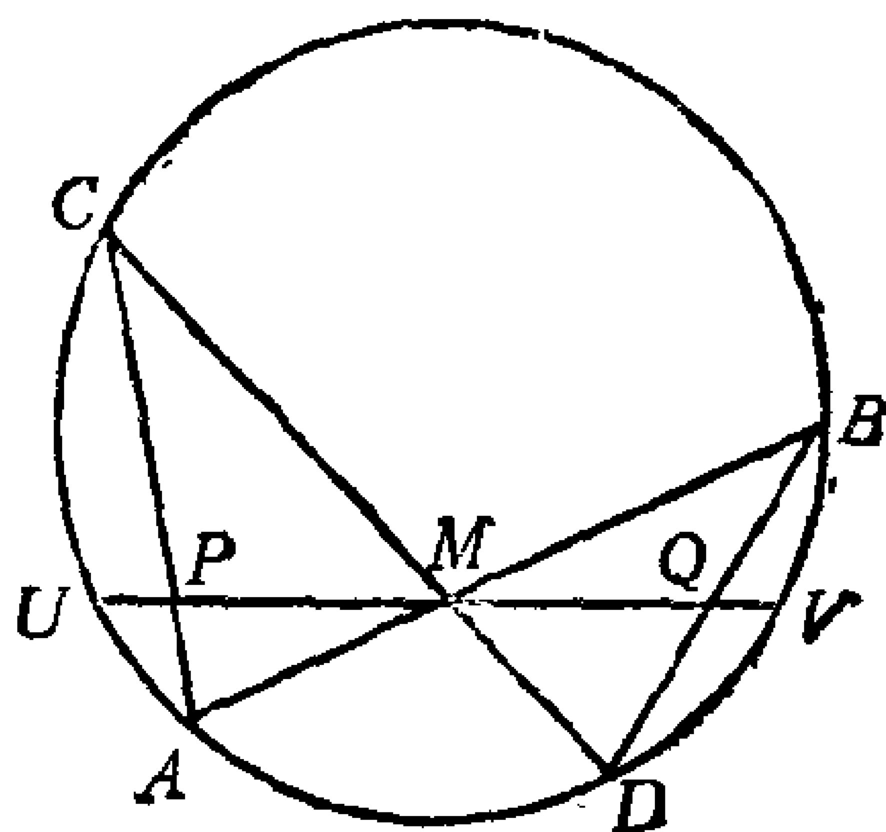


图93

A-6. 取M为原点，UV为x轴，y轴不与AB及CD重合，建立一斜坐标系。令AB，CD的方程分别为$y=mx$，$y=nx$，则椭圆方程可写成

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0.$$

由于$V(t, 0)$及$U(-t, 0)$在此椭圆上，因此$d=0$。

我们知道，过A，B，C，D四点的圆锥曲线系方程是

$$K_1(ax^2+by^2+cxy+ey+f)+K_2(y-mx)(y-nx)=0. \tag{1}$$

其中K_1，K_2为不同取为零的任意常数．令$y=0$，由(1)可得

$$K_1(ax^2+f)+K_2mnx^2=0.$$

它表明x轴上关于原点对称的两点必在(1)所表示的曲线上。特别地，适当选择常数K_1及K_2，使(1)退化成两相交直线AC，BD，则P，Q两点关于点M对称。因此$PM=MQ$。

B-1. 令$x^{13}+x+90=(x^2-x+a)q(x)$，其中$a$为整数，$q(x)$是整系数多项式。

若$a\leqslant 0$，则x^2-x+a有非负零点。但$x^{13}+x+90$没有正的零点。故$a>0$。对所设的恒等式分别令$x=-1, 0, 1$，依次可得

$$(a+2)q(-1)=88;\quad aq(0)=90;\quad aq(1)=92.$$

二、三两个等式表明$a|2$，故$a=2$或1．但当$a=1$时，由第一个等式推得$3|88$．这不可能．故只能有$a=2$．据此即可求得

$$x^{13}+x+90=(x^2-x+2)(x^{11}+x^{10}-x^9-3x^8-x^7+5x^6+7x^5-3x^4-7x^3-11x^2+23x+45).$$

B-2．因为指数函数的反函数也是单值连续的，故本题与下述问题等价：

设m，n为任意整数，问属于$m\log 2+n\log 3$类型的数在全体实数R中是否稠密？为了作出肯定的回答，我们需要用到下列两个引理．

引理1． 设T是定义在R上的加法群的一个子群，则有可能是$T=\{0\}$，或者T由某个正数的所有倍数组成，或者T在R内稠密．

证明： 若T不含任何正数，则$T=\{0\}$．假定T含有一个最小的正数x，则T显然含有x的一切倍数．$\forall y\in T$，必存在一个整数n，使得

$$n\leqslant\frac{y}{x}<n+1.$$

令$z=y-nx$，则有$0\leqslant z<x$．由于x是T内的最小正数，因此$z=0$，从而$y=nx$．即T由x的一切倍数组成．

再假定T含有正数x，但T内不存在最小的正数，则在$(0,\ x)$内有无穷多的数属于T．$\forall\delta>0$，$\exists t_1$，$t_2\in T$，且满足

$$0<t_1<t_2<x,$$

$$0<s=t_2-t_1<\delta.$$

于是s的一切倍数都在T内．令$I=(a,\ a+\delta)$是R的任意一个开区间，则s的某个倍数必定会出现在I内．从而得知$T\cap I\neq\phi$．由I的任意性即知，T在R内是稠密的．

引理2． 设$\alpha,\beta\in R$，m,n为任意整数，则形如$m\alpha+n\beta$的数在R内稠密的充要条件是，对于任何不同时为零的两个整数p，q，成立

$$p\alpha+q\beta\neq 0. \tag{1}$$

证明： 形如$m\alpha+n\beta$的数集T显然构成R的一个子群，且$\alpha\in T$，$\beta\in T$．

若$\alpha=\beta=0$，则$T=\{0\}$在R内不稠密，这时条件(1)亦不能成立．

若α，β不全为零，则$T\neq\{0\}$．假如T在R内仍不稠密，则由引理1可知，T内必

含有某个最小正数x，且T由x的一切倍数组成。令$\alpha=qx$，$\beta=-px$（p，q为不同时等于零的整数），则有

$$p\alpha+q\beta=0.$$

即条件(1)仍不能成立。因此，当$m\alpha+n\beta$在R内稠密时，条件(1)必定成立。必要性证毕。

反之，设整数p，q不同时为零，且有

$$p\alpha+q\beta=0. \tag{2}$$

若$\alpha=\beta=0$，则$T=\{0\}$在R内不稠密。

若$\beta=0$，$\alpha\neq0$，则$T=\{m\alpha\}$在R内不稠密。

若$\alpha\beta\neq0$，则$pq\neq0$。(2)可化为$\beta=-\frac{p\alpha}{q}$，于是

$$T=\{m\alpha+n\beta\}=\left\{\left(m-\frac{p}{q}\right)\alpha\right\}$$

在R内仍不稠密。因此，若条件(1)成立，则$m\alpha+n\beta$在R内必定稠密，充分性证毕。

回到本题：令$\alpha=\log2$，$\beta=\log3$，则条件(1)与下列条件等价

$$2^p3^q\neq1. \tag{3}$$

其中p，q为不同时等于零的整数。

不等式(3)显然成立。因此本题中的集S在集P内是稠密的。

B-3。对给定的方程令$x=y=0$，则得$f(0)=0$。又对其两边关于x，y先后求两次偏导数得

$$2f(x)f'(x)=f'(x+y)f(x-y)+f(x+y)f'(x-y),$$
$$0=f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y).$$

作变量代换$x+y=u$，$x-y=v$，则有

$$f''(u)f(v)=f(u)f''(v). \tag{1}$$

若存在一点v_0，使得$f(v_0)\neq0$，则可令

$$c=\frac{f''(v_0)}{f(v_0)},$$

(1)即化为$f''(u)=cf(u)$。

根据初值条件$f(0)=0$即可求得(2)的解为

$$f(u)=\begin{cases}A\sinh ku, & k^2=c>0,\\ Au, & c=0,\\ A\sin ku, & -k^2=c<0, A\text{为任意常数。}\end{cases}$$

不难验证 $f(u)$ 在三种情形下的表达式都适合本题给定的函数方程。

B-4. 我们可以证明一个更为普遍的定理，而将本题的论断作为其推论。

定义 设C是平面上任一点集，直线l与C至少有一个公共点。若被 l 分成的两个开的半平面中，有一个不含有C的点，则称l是C的一条支撑线。

定理 设T是顶点全部位于给定点集C内具有极大周长的三角形，则在T 的各个顶点，都有一条C的支撑线垂直于T在该顶点的内角平分线。

证明： 如图94所示，令$T=\Delta PQR$，l是过点P且与$\angle QPR$ 的平分线垂直的直线。Q^*是关于l与Q对称的点。易知R，P，Q^*三点共线。

若X是与Q^*位于l同旁的任意一点，则

$$\begin{aligned}RQ+RX+XQ&>RQ+RX+XQ^*\\&\geqslant RQ+RQ^*=RQ+RP+PQ\end{aligned}$$

因为$\triangle RXQ$的周长大于$\triangle PQR$的周长，所以$X\notin C$。由定义即知l是C 的一条支撑线。定理证毕。

回到本题，因为C是光滑的凸闭曲线，所以过C上任一点的支撑线就是过该点与C 相切的直线。因此根据所证定理即可推得本题结论的正确性。

若将一等边三角形的三个顶点稍加“磨圆”成可微弧，即得一近似于等边三角形边界的凸闭可微曲线 C。于是原等边三角形的三条中位线构成的三角形就具有本题求证的性质。但它在C 内显然不是周长最大者。

若C 是圆。设其有一内接三角形具备已经证明的性质，则此三角形的三内角平分线必交于圆心 O。如图95所示，我们有

$\overset{\frown}{QS}=\overset{\frown}{RS}$, $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{PR}\Rightarrow\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QR}=\overset{\frown}{RP}$.

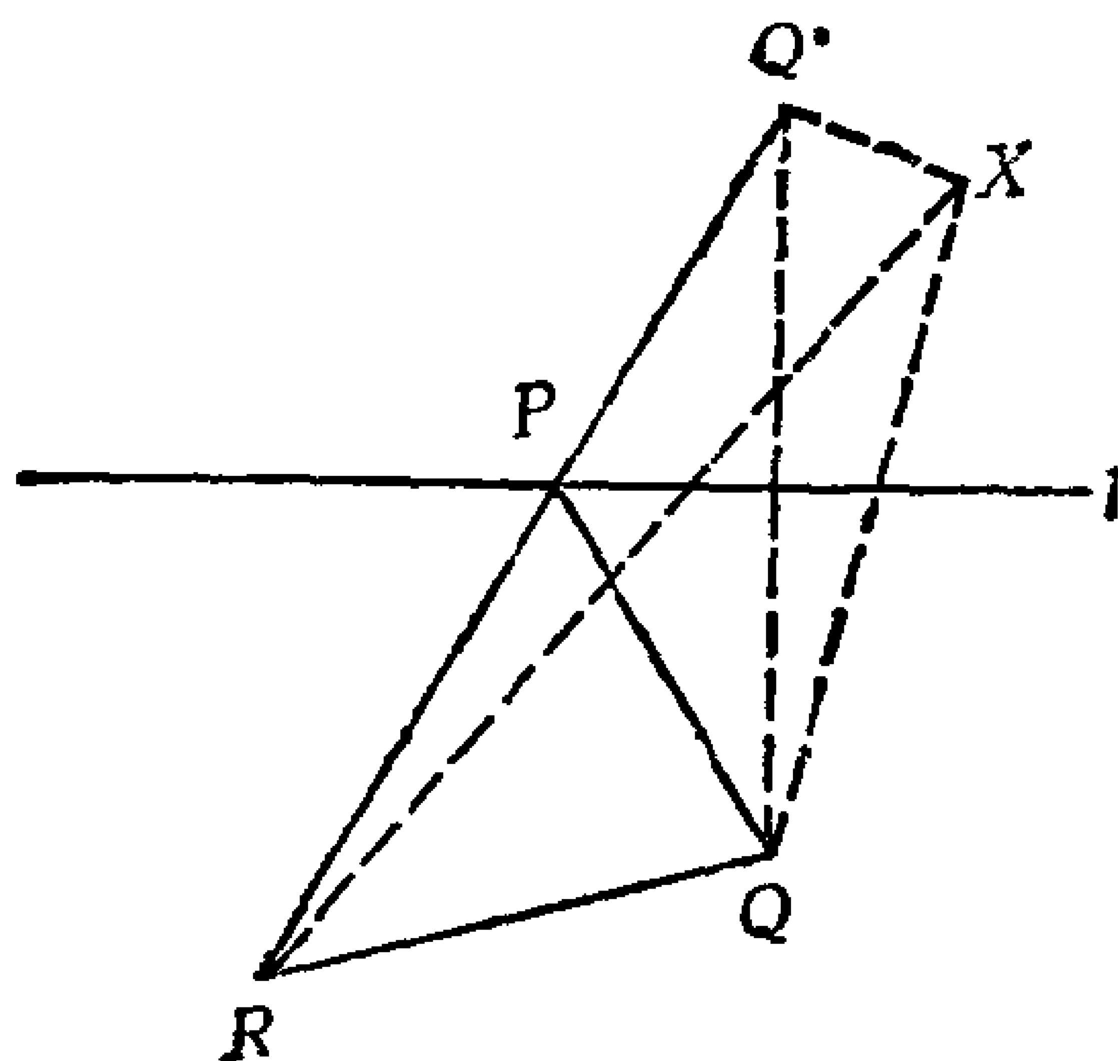


图94

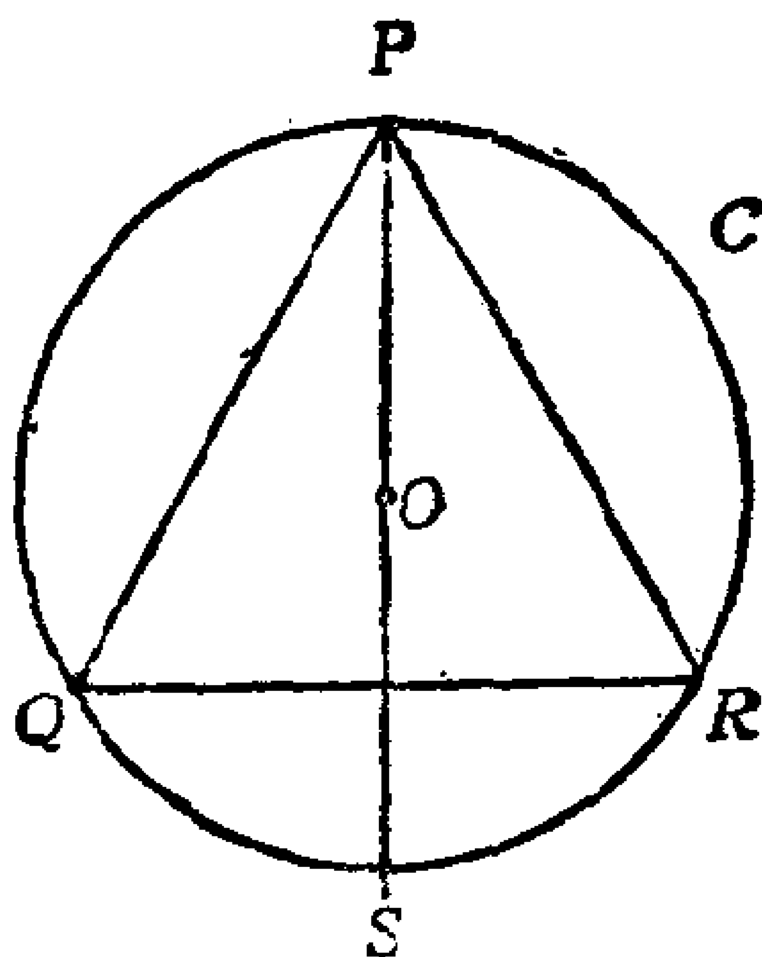


图95

因此$\triangle PQR$是等边三角形。

众所周知，内接于圆的所有三角形中，以等边三角形的周长为最大。因此，对于圆C来说，"具有极大周长"是使本题结论成立的充要条件.

B-5. 令 $s_k=\sum\limits_{n>\frac{k}{2}}^{k}a_n$，则当$k\to\infty$时，$s_k\to 0$。

题设条件(i)可略微变形写成

$$0\leqslant a_k\leqslant 100a_n,\quad \text{其中}\frac{1}{2}k\leqslant n\leqslant k.$$

让n从不小于$k/2$的整数依次取值，一直到k为止，将所得的这些不等式同边相加得

$$\frac{1}{2}ka_k\leqslant\frac{1}{2}[k+1]a_k\leqslant 100s_k.$$

$$\Rightarrow\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\,ka_k\leqslant 200\lim_{k\to\infty}s_k=0.$$

由于$a_k\geqslant 0$，故得$\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0$。

B-6. 将E看作是一个向量空间。设

$$a_i \in E,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1.$$

若 $$P=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,$$

则称向量P是a_1, a_2, …, a_n的一个凸组合。

凸组合具有传递性：若向量组b_1, b_2, …, b_j的每一个都是a_1, a_2, …, a_n的凸组合，向量C是b_1, b_2, …, b_j的凸组合，则C也是a_1, a_2, …, a_n的凸组合。

设A是E的一个非空子集. A内元素的一切凸组合构成的集K是凸的，它是含有A的最小凸集，称为A的凸包。

本题的实质可用下列定理剖析：

定理 设E是n维空间，A是E的一个非空子集，则A的凸包K内每一点都能写成A内至多$n+1$个点的凸组合。

证明：设有$P\in K$，假定P不能用A内少于$n+2$个点写成凸组合，则有

$$P=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a_i, \tag{1}$$

其中$a_i\in A$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1$；$q\geqslant n+2$。

由于E是n维向量空间，故可找到q个不全为零的数μ_1, …, μ_q，使得

$$\begin{cases}\mu_1+\cdots+\mu_q=0,\\ \mu_1 a_1+\cdots+\mu_q a_q=0.\end{cases} \tag{2}$$

因为a_i都是n维向量，所以(2)是具有q个未知数μ_i，具有$n+1$个方程的齐次线性方程组。

由(1)，(2)可得

$$P=\sum_{i=1}^{q}(\lambda_i+\sigma\mu_i)a_i. \tag{3}$$

其中σ可取任意实数，但总能保持a_i的系数和等于1.我们适当地选择σ，使得(3)的右边关于a_i有一项的系数$\lambda_i+\sigma\mu_i=0$,而使其余的系数都保持非负。这只须在μ_1, …, μ_q中取出全部$\mu_i>0$的数，再令σ等于$-\frac{\lambda_i}{\mu_i}$中最大的一个即可。(由(2)的第一个

等式可知，至少存在一个$\mu_i>0$。)

综上所述，p的表达式(3)变成了在A中有少于q个的点构成的凸组合。这样终将会导至与证明开头作的假定矛盾。因此定理获证。

回到本题，令K为A_0的凸包，若X是K的任一子集，则$X\subseteq S(X)\subseteq K$。(第一个包含关系需要用关于退化线段的约定，即$x$可表示从$x$到$x$的"线段")从而可得

$$A_0\subseteq A_1\subseteq A_2\cdots\subseteq K. \tag{4}$$

设有$p\in K$，则由上述定理，可将p写成

$$p=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4,$$

其中$a_i\in A_0$，$\sum\lambda_i=1$，$\lambda_i>0$。(若p恰好可用A_0内少于四个的点表示成凸组合，就认为上式右边关于a_i有同类项相加。)令

$$q=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}a_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}a_2,$$

$$r=\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}a_3+\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}a_4.$$

则有　　$q\in S(A_0)=A_1$，$r\in A_1$，

$$p=(\lambda_1+\lambda_2)q+(\lambda_3+\lambda_4)r\in S(A_1)=A_2.$$

这就证明了$K\subseteq A_2$。再由(4)即知

$$A_2=A_3=\cdots=K.$$

第二十五届（1964年12月7日）

上午试题

A-1. 在平面上任意给定六点，求证这六点中，两点间最

远距离与两点间最近距离的比不小于$\sqrt{3}$。

A-2. 求定义在$0\leqslant x\leqslant 1$上的所有连续正函数$f(x)$，使之满足下列三个等式：

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\quad \int_0^1 f(x)xdx=a,\int_0^1 f(x)x^2dx=a^2.$$

其中a是已知实数。

A-3. 设$P_1,P_2,\cdots$是开区间（0，1）内的一个稠密点列，点P_1，P_2，…，P_{n-1}将（0，1）分成了n个子区间，而P_n又将其中一个子区间分成了两个新子区间。令a_n和b_n是这两个新子区间的长，求证：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(a_n+b_n)=\frac{1}{3}.$$

（一个区间的任一子区间内都至少含有一个点列中的一点，则称此点列在该区间内是稠密的。）

A-4. 设$p_n(n=1,2,\cdots)$是一个整数有界序列，且满足下列递推关系

$$p_n=\frac{p_{n-1}+p_{n-2}+p_{n-3}p_{n-4}}{p_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}+p_{n-4}}.$$

求证此序列终将会出现循环情形。

A-5. 设a_1，a_2，a_3，…为一任意正数序列，求证必定存在一个常数k，能使下列不等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

A-6. 设S是一条直线上的有限点集，且S中的点两两之间的距离（最大距离除外）的值都至少出现两次，我们称S是有重复距离的集。求证集S中任意两个距离数值的比是有理数。

下午试题

B-1. 设$u_k(k=1, 2, \cdots)$为一整数序列，v_n表示$\{u_k\}$中前n项中小于或等于n的个数，求证如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{u_k}<\infty,$$

那么 $$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0.$$

B-2. 设集S含有$n(n\geqslant 1)$个元素，$A_1, A_2, \cdots, A_k$是S的一族不同子集，它们两两的交非空，而S的其他子集不能与$A_1, A_2, \cdots, A_k$都相交。求证$k=2^{n-1}$。

B-3. 设$f(x)$是定义在全体实数上的连续函数，且对于任意的$\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}f(n\varepsilon)=0, \quad (n\text{为正整数})$$

求证： $$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

B-4. 设球面上有n个大圆，其中任何三个都不共点，问此n个大圆将球面分成了多少个区域？

B-5. 设有一严格递增的正整数序列（例如1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, …）。u_n表示此序列前n项的最小公倍数。求证下列无穷级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}.$$

B-6. 试证明单位圆盘不能分成两个不相交的可叠合子集。

解答

A-1. 若已知的六点有三点共线，例如点B位于线段AC上，那末不等式$|AC|\geqslant 2|BC|$与$|AC|\geqslant 2|AB|$总有一个成立，因而本题论断正确。下面再对无任何三点共线的情形进行研究。

若已知的六点只能构成四六边形，则其中必有一点（设为A）位于其他五点构成的某个三角形（设为$\triangle BCD$）内。考察$\triangle BAC$，$\triangle CAD$，$\triangle DAB$即知其中必有一个内角不小于120°，不妨认为$\angle BAC\geqslant 120°$，$b\geqslant c$，对$\triangle ABC$应用余弦定理，注意$-\cos A\geqslant\frac{1}{2}$即得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant b^2+c^2+bc\geqslant 3c^2$$

因此$a\geqslant\sqrt{3}c$。

若已知的六点能构成凸六边形，则此六边形必有一内角为不小于120°的钝角。据上所证，我们所需要的三角形显然存在。

A-2. 将第一个等式两边乘以a^2，第二个等式两边乘以$-2a$连同第三个等式同边相加得

$$\int_0^1 f(x)(a-x)^2dx=0.$$

此等式右边对任何一个正的连续函数$f(x)$，积分的值都是正的，因此本题无解。

A-3. 令S_n是点P_1，P_2，$\cdots P_{n-1}$，P_n分（0，1）所成$n+1$个子区间长度立方的和，则S_n，S_{n-1}，$(a_n+b_n)^3$及$a_n^3+b_n^3$之间的关系不难确立如下：

$$S_{n-1}-S_n=(a_n+b_n)^3-(a_n^3+b_n^3)=3a_nb_n(a_n+b_n).$$

$$\Longrightarrow \quad 1-S_k=S_0-S_k=\sum_{n=1}^{n}3a_nb_n(a_n+b_n)。$$

由此可见$\lim\limits_{k\to\infty}S_k=0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_nb_n(a_n+b_n)=1$。

现在来证明$\lim\limits_{n\to\infty}S_k=0$。设$t$为正整数，由于$\{P_t\}$在$(0, 1)$内稠密，故可选择充分大的整数$q$，使得$\{P_1, P_2, \cdots, P_q\}$中的点能在下列$t$个区间中的每一个内都出现

$$\left(0, \frac{1}{t}\right], \left(\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right], \cdots, \left(\frac{t-1}{t}, 1\right)。$$

取$k\geqslant q$，令$l_0, l_1, \cdots, l_k$是由点$p_1, p_2, \cdots, p_k$分区间$(0,1)$所得诸子区间的长，则它们的长都不会超过$2/t$。于是

$$S_k=\sum_{i=0}^{k}l_i^3\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^2\sum_{i=0}^{k}l_i=\frac{4}{t^2}。$$

由t的任意性即可得知

$$\lim_{k\to\infty}S_k=0。$$

A-4．我们来着手证明比本题更一般化的命题：设f为一任意k元函数，而$\{P_n|n=1, 2, \cdots\}$是递推公式

$$P_{n+k}=f(P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{n+k-1})$$

决定的一个整数有界序列。那末$\{P_n\}$终将会出现循环情形。令k数组$(P_n, P_{n+1}, \cdots, P_{n+k-1})=q_n$，正整数$M=\sup\{|P_n|\}$，则$\forall n$有

$$P_n\in\{-M, -M+1, \cdots-1, 0, 1, \cdots M-1, M\}$$

根据重复排列公式可知q_n至多能有$A=(2M+1)^k$种不同的表达式。因此，在$A+1$个k数组$q_1, q_2, \cdots, q_{A+1}$中，必有某两个完全相同。若$q_i=q_j(i<j)$，则$P_{i+t}=P_{j+t}$，其中$t=0, 1, 2, \cdots k-1$。再由$\{P_n\}$的递推公式推得$t=k$时，亦有$P_{i+k}=P_{j+k}$，于是

由归纳法原理即知，对任意非负整数t，都有$P_{i+t}=P_{j+t}$。这就证明了序列$\{P_n\}$从第i项开始，每（$j-i$）个一组，将会循环出现。

A-5。先令$m=2t$是一个固定的偶数，我们来证明下面的不等式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}.$$

再取$k=4$，令$m\to\infty$，即可推得本题求证的结论。

将数项a_1，a_2，$\cdots a_m$，按递增顺序重新排列成b_1,b_2，$\cdots$，b_m。对于$1\leqslant p\leqslant t$，我们有

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_{2p}&\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}\\&\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_{2p-1}\geqslant pb_p.\end{aligned}$$

由此易得$\dfrac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}}\leqslant\dfrac{2p-1}{pb_p}<\dfrac{2}{b_p}$，

及 $$\frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}}\leqslant\frac{2}{b_p}.$$

于是 $$\frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}}+\frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}}<\frac{4}{b_p}.$$

$$\Longrightarrow\sum_{P=1}^{t}\left(\frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}}+\frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}}\right)<\sum_{P=1}^{t}\frac{4}{b_p}.$$

注意$m=2t$，即可推得需要证明的不等式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\sum_{P=1}^{t}\frac{4}{b_p}<\sum_{P=1}^{m}\frac{4}{b_p}=4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}.$$

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，则求证的不等式显然成立。另一方面，我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

从而得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

A-6. 不失一般性，设集S的n个已知点在数轴上的分布为

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}=1. \tag{1}$$

下面用反证法证明本题。若本题结论不真，则S内至少含有一个无理点。令$\{1, \alpha_1, \cdots\alpha_k\}$是向量组$\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$在有理数域上生成的线性空间的一个基底，其中$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ $(k\geqslant 1)$是无理数。于是S内任意二点间的距离可用下列线性关系式唯一表出：

$$r_0+r_1\alpha_1+\cdots+r_k\alpha_k. \tag{2}$$

其中$r_0, r_1, \cdots, r_k$为恰当的有限组有理数。（以下凡是按(1)写出的线性表达式，与诸r对应的字母都表示确定的有理数）。

在用（1）表出S内所有不相等的距离表达式中，将无理数α_1的全体系数中绝对值最大者记为m。（$m\neq 0$，否则$\alpha_1\notin S$，这与反证法开头的假定矛盾。）根据S内的点出现重复距离的性质及表达距离具有唯一性的关系式（1），我们可在S内确定四点$x_i<x_j<x_p<x_q$，使得下列四个等式必有一个成立：

$$\begin{aligned}|x_j-x_i|=|x_q-x_p|&=a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k,\\ |x_p-x_i|=|x_q-x_j|&=a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k.\end{aligned} \tag{3}$$

由（3)推知下列四个等式必有一个成立：

$$|x_q-x_i|=2(a_0\pm m\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_k\alpha_k)\pm|x_p-x_j| \tag{4}$$

注意系数m的极大性，（4）中不论哪个等式成立，都有

$$|x_p-x_j|=b_0\mp m\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_k\alpha_k,$$

$$|x_q-x_i|=c_0\pm m\alpha+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k.$$

再在S内确定两点x_s，x_t，使得

$$|x_q - x_i| = |x_t - x_s|.$$

重复应用上述推理过程，由于每次考察S内两点间的距离越来越大，经过有限步骤以后，就会导致S内某两点间的距离大于1。这与（1)矛盾。因此S内不可能含有无理点α_1。

同理可证S内不可能含有无理点α_2，…，α_k，即集S所含的点全部是有理点。从而本题结论正确。

B-1. $\{u_k\}$中不能含有无穷个负项。例如，令$u_k=(-1)^k/k$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{n}=\dfrac{1}{2}$，本题结论不能成立。若$\{u_k\}$中含有有限个负项，则可将这些负项全部改$+1$而不影响本题的证明。$\{u_k\}$既为正项序列，收敛级数$\sum\dfrac{1}{u_k}$的项可以重排而不影响收敛的结果。令$u_1\leqslant u_2\leqslant u_3\leqslant\cdots$，则对任一固定的$p$，选择充分大的$n$，使得$v_n>p$，于是我们有

$$\sum_{k=p+1}^{v_n}\frac{1}{u_k}\geqslant\frac{v_n-p}{n}.$$

（因为左边的每一项都不小于$1/n$）

由上面的不等式可以推得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{u_l}$$

再由p的任意性可知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}\leqslant\lim_{p\to\infty}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{u_k}=0.$$

注意$v_n/n\geqslant 0$，最后即得$\lim\limits_{n\to\infty}v_n/n=0$。

B-2. S总计有2^n个子集，我们可将其分成2^{n-1}组，使得每

组内都含有两个互余的子集．假定$k>2^{n-1}$，那么我们可从A_1，$A_2,\cdots A_k$，中选取两个互余的子集彼此不相交，这与题设矛盾．再假定$k<2^{n-1}$，那么我们可从S中除A_1，A_2，…，A_k外，选取一对互余的子集X和Y．于是至少有一个A_i符合$A_i\bigcap X=\phi$，$A_i\subseteq Y$。同理至少有一个A_j符合 $A_j\bigcap Y=\phi, A_j\subseteq X$，由此推得

$$A_i\bigcap A_j\subseteq X\bigcap Y=\phi.$$

这仍与题设矛盾．故必须$k=2^{n-1}$。

B–3．我们先来证明下述引理：

引理．设$0<a<b$，k为任一正整数，则

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,\ nb]$$

含有从某点c开始的射线$[c,\ \infty)$，

证明：取某个正整数t，使$t\geqslant k$，$t\geqslant\frac{a}{b-a}$，当$n\geqslant t$时，我们有

$$n(b-a)\geqslant a\Longrightarrow nb\geqslant(n+1)a.$$

因此，$[na,\ nb]$与$[(n+1)a,\ (n+1)b]$是重叠的两个闭区间．由此即可推知

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,\ nb]\supseteq[ta,\ \infty).$$

令$c=ta$即得引理之结论．

回到本题，对任意给定的$\alpha>0$，定义

$$F_n=\{x:\ |f(nx)|\leqslant\alpha\}.$$

$$E_k=\{x:(\forall n\geqslant k)\ |f(nx)|\leqslant\alpha\}.$$

则$E_k=\bigcap\limits_{n>k}F_n$．因$f$连续，故$F_n$为闭集，$E_k$也是闭集．

设$y\in(0,\ \infty)$，则依题意有$\lim\limits_{n\to\infty}f(ny)=0$，即存在某个$K$，使得对于一切的 $n\geqslant k$ 都有 $|f(ny)|\leqslant\alpha$．因此 $y\in E_k$， 从而$(0,\infty)\subseteq\bigcup E_k$．根据下面即将证明的贝尔范畴定理，在 $\{E_k\}$中必有一个E_m含有区间$[a,\ b]$，亦即

$$(\forall x\in[a,\ b])(\forall n\geqslant m)\ |f(nx)|\leqslant\alpha$$
$$\Longrightarrow\left(\forall y\in\bigcup_{n=m}^{\infty}[na,\ nb]\right)\ |f(y)|\leqslant\alpha.$$

应用引理即知，存在某个常数c,使$\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}[na,\ nb]\supseteq[c,\ \infty)$，而

$$(\forall y\geqslant c)\ |f(y)|\leqslant\alpha.$$

由α的任意性即证得$\lim\limits_{y\to\infty}f(y)=0$。

贝尔*范畴定理。设$\{E_k\}$是R上的闭子集序列$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$含有某个区间，则$\{E_k\}$中至少存在一个子集含有该区间。

证明。令I_0是属于$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$的一个有界闭区间。若定理的结论不真，则$I_0\nsubseteq E_1$，即存在一点$x\in I_0-E_1$，因为$E_1$是闭集，所以存在一个含有$x_1$且不与$E_1$相交的闭区间$I_1\subseteq I_0$，依此类推，若已经作出了$I_{n-1}$，则必有一点$x_n\in I_{n-1}-E_n$，进而又有$x_n\in I_n\subseteq I_{n-1}$，且$I_n\cap E_n=\phi$，根据区间套定理，必定存在一点$x\in\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}I_n$，于是$x\in I_0$，但是$x\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$。这一矛盾证明了贝尔范畴定理的正确性。

B-4。令$f(n)$表示球面被n个大圆（无三个共点）分成的区域个数，则易知$f(1)=2$，$f(2)=4$。注意任何两个大圆都有且仅有两个交点，因此第$n+1$个大圆与前面n个大圆将会交于$2n$个点，从而第$n+1$个大圆被分成$2n$条弧。其中每一条弧都将原$f(n)$个区域中的某一个分成两个，并且彼此不重复。由此可得递推关系式

$$f(n+1)=2n+f(n),\quad n\geqslant 1. \tag{1}$$

据此不难解得

---

*贝尔（Baire），1874—1932，法国数学家。

$$f(n)=n^2-n+2, \qquad n\geqslant 1.$$

由于$f(0)=1$。故上面的递推关系式（1)及其解对于$n=0$不能成立。

B-5。设u为一正整数，d与u/d为u的两个约数，若$d\geqslant\sqrt{u}$，则$u/d\leqslant\sqrt{u}$。因此u的全体正约数中，至少有一半不超过$\sqrt{u}$，从而u的全体正约数的个数不超过$2\sqrt{u}$。

在本题中，u_n是n个相异正整数的最小公倍数，因此u_n至少有n个正约数，于是$2\sqrt{u_n}\geqslant n$。由此推知收敛级数$\sum 4/n^2$是$\sum 1/u_n$的强级数，这就证明了$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/u_n$的收敛性。

B-6。设D为单位圆盘，p为圆心，ρ表示圆盘内两点间的距离函数。

假定D是两不相交而又可叠合的集A与B的并，$p\in A$，记$x\to x^*$是从A到B的叠合映射 则$p^*\in B$。作D的直径$rs\perp pp^*$，注意

$$\forall a\in A\Longrightarrow\rho(p,\ a)\leqslant 1,\ \ \forall b\in B\Longrightarrow\rho(p^*,\ b)\leqslant 1$$

及 $\rho(p^*,\ r)=\rho(p^*,\ s)>1$，

即知 $r\in A,\ s\in A$。

又因为$\rho(r^*,\ s^*)=\rho(r,\ s)=2$。所以$r^*s^*$也是$D$的直径，再由$\rho(p^*,\ r^*)=\rho(p,\ r)=1$即知，$p^*$也是$D$的圆心。于是$p^*=p$。这与$A\cap B=\phi$矛盾。因此$D$不能分成两个不相交的可叠合子集。

第二十六届（1965年11月20日）

上午试题

A-1 设三角形ABC中$\angle A<\angle C<90^\circ<\angle B$。$\angle A$，$\angle B$

的外角平分线（从角顶到对边延长线止）之长都等于AB，试求出$\angle A$的度数。

A-2. 试证对任何正整数n，

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

式中$[x]$表示不超过x的最大整数，$\binom{n}{r}$是二项式系数即组合数，约定$\binom{n}{0}=1$。

A-3. 证明对任意的实数序列a_1，a_2，…，下面两个条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_2}+\cdots+e^{ia_n}}{n}=a, \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_2}+\cdots+eia_{n^2}}{n^2}=a \qquad \text{(ii)}$$

总是等价的。

A-4. 在某次舞会上，假如没有一个男孩同每个女孩都跳过舞，但每个女孩至少同一个男孩跳了舞。证明一定有两对舞伴gb及$g'b'$，他们中的b没有和g'跳舞，g没有和b'跳舞（此处g—女孩，b—男孩）。

A-5. 有多少种方法能将从1到n的n个整数排成下面的排列：除了左边第一个整数以外，每个数都与它左方（不必相邻）的某一个数相差1？

A-6. 在笛卡儿平面直角坐标系xy上，证明直线$ux+vy=1$与曲线$x^m+y^m=1$ $(m>1)$相切的充要条件是$u^n+v^n=1$及$m^{-1}+n^{-1}=1$。

下午试题

B-1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

B-2 有n名选手p_1，p_2，…，p_n（$n>1$）参加循环赛，每名选手与其他各选手都赛一场且规定无平局，用w_r与l_r分别表示选手p_r赢与输的场数，证明

$$\sum_{r=1}^{n} w_r^2=\sum_{r=1}^{n} l_r^2.$$

B-3. 试 证边长为整数而面积在数值上等于周长的两倍的直角三角形，正好有三个。

B-4 考虑函数

$$f(x,n)=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{4}x^2+\cdots}{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}x+\binom{n}{5}x^2+\cdots},$$

式中n为正整数。试用含$f(x,n)$与x的有理式来表示$f(x,n+1)$。由此，或用别的方法，对适当的x固定值求$\lim\limits_{n\to\infty}f(x,\ n)$。

B-5, 考虑V个不同对象a，b，c，…，k的非序对的集合。其中如有三个这样的非序对bc，ca，ab便称为形成一个三角形。求证若$4E\leqslant V^2$，则选取E个非序对而其中不形成三角形是可能的。

B-6. 设A，B，C，D是平面上四个不同的点，使得过A和B的每个圆与过C和D的每个圆相交（或重合）。证明这四点或者共线或者共圆。

解答

A-1. 设$\angle A$的外角平分线交直线BC于X，$\angle B$的外角平分线交直线 AC于Y. 若假定C位于B与X之间则同$\angle B>\angle C$相矛盾，故我们可以断定B位于X与C之间. 同理，由$\angle A<\angle C$可知C位于A与Y之间.

如果Z是直线AB上一点且B位于A与Z之间，我们从三角形ABY有$\angle ZBY=2\angle A$，所以$\angle BXA=\angle ABX=\angle ZBC=2\angle ZBY=4\angle A$，而三角形$ABX$的内角之和为$90°-\frac{1}{2}\angle A+8\angle A$，$\therefore \angle A=12°$.

A-2. 在给定的和式中作代换$s=n-r$. 则

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2$$

$$=\sum_{s=n}^{n-[(n-1)/2]}\left\{\frac{-n+2s}{n}\binom{n}{n-s}\right\}^2$$

$$=\sum_{s=n}^{n-[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2s}{n}\binom{n}{s}\right\}^2$$

$$=\sum_{r=n}^{n-[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2$$

$$=\sum_{r=n-[(n-1)/2]}^{n}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2. \qquad (1)$$

当$(n-1)$为偶数，则$[(n-1)/2]=(n-1)/2$，$n-[(n-1)/2]=n-(n-1)/2=(n+1)/2$. 这时(1) 式的左、右两边和号内的

项数相同，和数相等，而且按r编号恰为从0到$(n-1)/2$，再从$(n+1)/2$到n，一项不缺。所以

$$\sum_{r=0}^{n}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2=2\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2.$$

当$(n-1)$为奇数，则$[(n-1)/2]=(n-2)/2$，$n-[(n-1)/2]=n-(n-2)/2=(n+2)/2$。这时(1)式两边的项按$r$编号为从0到$(n-2)/2$，再从$(n+2)/2$到$n$，中间缺了编号为$n/2$这一项。但是注意到若$r=n/2$，就有$\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2=0$，即这一项为0。所以仍有$\sum_{r=0}^{n}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2=2\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n}\left\{\frac{n-2r}{n}\binom{n}{r}\right\}^2&=\sum\left(1-\frac{2r}{n}\right)^2\binom{n}{r}^2\\
&=\sum\binom{n}{r}^2-4\sum\frac{r}{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r}+4\sum\left(\frac{r}{n}\right)^2\binom{n}{r}^2\\
&=\binom{2n}{n}-4\sum\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{r}+4\sum\binom{n-1}{r-1}^2\\
&=\binom{2n}{n}-4\binom{2n-1}{n-1}+4\binom{2n-2}{n-1}=\binom{2n}{n}-4\binom{2n-2}{n-1}\\
&=\left\{\frac{2n(2n-1)}{n^2}-\frac{4(n-1)}{n}\right\}\binom{2n-2}{n-1}\\
&=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

A-3. (i) 蕴涵(ii)，这可从一个收敛序列的子序列收敛于原序列的极限的事实来推知。

下面令 $c_r=\exp\ iarS(t)=c_1+c_2+\cdots+c_t$来简化记法，注

意到$|c_r|=1$与$|S(t+k)-S(t)|\leqslant k$。现在设(ii)成立，记$m=n^2+k$ $(0\leqslant k\leqslant 2n)$。则

$$\left|\frac{S(m)}{m}-\frac{S(n^2)}{n^2}\right|\leqslant\left|\frac{S(m)}{m}-\frac{S(n^2)}{m}\right|+\left|\frac{S(n^2)}{n^2}-\frac{S(n^2)}{m}\right|$$

$$\leqslant\frac{k}{m}+n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m}\right)=\frac{k+m-n^2}{m}=\frac{2k}{m}\leqslant\frac{4n}{n^2}.$$

所以$\lim\limits_{m\to\infty}(S(m)/m-S(n^2)/n^2)=0$，就是$S(m)/m$收敛于$a$。

A-4．设b是同最多女孩跳舞的男孩（也许有别的男孩也同这么多女孩跳舞，但不可能同更多的女孩跳舞），g'是没有同b跳舞的某个女孩，而b'是同g'跳了舞的男孩。那么b的舞伴当中必有一个女孩g是没有同b'跳舞的（否则b'将比b有更多的舞伴）。这样的两对舞伴gb及$g'b'$就解决了问题。

A-5．对1到n作符合题意的每一个排列皆简称为n排列．当$n=2$时，可得2个2排列：12，21；当$n=3$时，可得2^2个3排列：123，213，231，321；当$n=4$时，可得2^3个4排列：1234，2134，2314，3214，2341，4321，3421，3241。据此，我们会猜测n排列有两条性质：(i) n排列必以1或n结尾；(ii) n排列的个数为2^{n-1}。

下面用数学归纳法证明．(i) 假定$n=k$时论断真确．则当$n=k+1$时，任取一个$k+1$排列$a=a_1a_2\cdots a_{k+1}$，若$a_{k+1}\neq 1$或$k+1$，我们从a中删除$k+1$，则由归纳法假设知这个k排列的末尾$a_{k+1}=k$。但$k+1$位于k前面不论什么位置，a都不能成为$k+1$排列。这个矛盾表明任一n排列必须以1或n结尾。

(ii) 假定$n-1$排列的个数为2^{n-2}则对其每个末尾添上n即可得n排列，个数仍为2^{n-2}。又对此每个n排列作下述一一映射：

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}n \to n+1-a_1, n+1-a_2, \cdots, n+1-a_{n-1}, 1$$

恰好得到以1结尾的n排列，共2^{n-2}个．由（i）的结论即知，全体n排列的个数为$2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$．

A-6 这个问题并非普遍成立，除非x，y，u，v满足某些更严的限制条件．例如，当它们都非负时可能成立（但也还不充分，见下）．即令如此，若m为有理数，具有奇数为分子和分母，则当$u^n+v^n>1$时有切于曲线的切线；若m是以奇数为分子偶数为分母的有理数，则尽管u，v适合$u^n+v^n=1$，而直线$ux+vy=1$仍不与曲线$x^m+y^m=1$相切．

在下面的证法中，我们用到对于非负数a及正数r，s有$(a^r)^s=a^{rs}$的事实．

设（x_0，y_0）是曲线 $x^m+y^m=1$上一点．过这点的切线为$x_0^{m-1}x+y_0^{m-1}y=1$．它形如$ux+vy=1$，其中$u=x_0^{m-1}$，$v=y_0^{m-1}$（u，v非负）．由关系式$m^{-1}+n^{-1}=1$得$n=m/(m-1)$，则有$u^n+v^n=x_0^m+y_0^m=1$．

反之，设$m^{-1}+n^{-1}=1$，u，v为非负且使$u^n+v^n=1$．我们定义$x_0=u^{n/m}$，$y_0=v^{n/m}$．那么x_0，y_0非负且$x_0^m+y_0^m=u^n+v^n=1$．于是$(x_0$，$y_0)$在曲线$x^m+y^m=1$上，并且根据前面的计算，直线$ux+vy=1$是该曲线的切线．

B-1．作变量代换$x_k\to 1-x_k$，得

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \sin^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

注意到左、右两被积函数之和的积分为1，所以左、右两式都等于$\frac{1}{2}$，取极限仍为$\frac{1}{2}$．

B-2. 显然$w_r+l_r=n-1$，$(r=1,2,\cdots,n)$且$\sum_1^n w_r=\sum_1^n l_r$。则

$$\sum_1^n w_r^2-\sum_1^n l_r^2=\sum_1^n (w_r-l_r)(w_r+l_r)$$
$$=(n-1)\sum_1^n (w_r-l_r)$$
$$=(n-1)\cdot 0=0.$$

B-3. 所有的毕氏三重组能从 $x=\lambda(p^2-q^2)$，$y=2\lambda pq$，$z=\lambda(p^2+q^2)$获得（关于毕氏三重组，即勾股数，可参看例如陈景润《初等数论I》，科学出版社，1978，p.64。注意这里多了系数λ。——译者）。其中$0<q<p$，p与q互素且$p\neq q \bmod 2$，λ为任意自然数。

题目要求有$\frac{1}{2}xy=2(x+y+z)$。即$\lambda^2(p^2-q^2)pq=2\lambda(p^2-q^2+2pq+p^2+q^2)$，化简得$\lambda(p-q)q=4$。因为$p-q$为奇数，推知$p-q=1$而这仅当$q$为1，2，4才能适合上述关系式。

当$q=1$，则$p=2$，$\lambda=4$，$x=12$，$y=16$，$z=20$。

当$q=2$，则$p=3$，$\lambda=2$，$x=10$，$y=24$，$z=26$。

当$q=4$，则$p=5$，$\lambda=1$，$x=9$，$y=40$，$z=41$。

B-4. 根据组合恒等式

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1},$$ 不难推得

$$f(x,\ n+1)=\frac{f(x,\ n)+x}{f(x,\ n)+1}.$$

当$n\to\infty$时，若x能使$f(x,\ n)$收敛，记极限为$F(x)$必满足$F(x)=(F(x)+x)/(F(x)+1)$，得$F^2(x)=x$。现在证明对任何

正数x都收敛于$\sqrt{x}$。当$x=0$，1显然如此。注意（可用归纳法证）

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{(1+\sqrt{x})^n-(1-\sqrt{x})^n}.$$

当$0<x<1$时，记$a=(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})$，则$0<a<1$而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{1+a^n}{1-a^n}\longrightarrow\sqrt{x}.$$

当$x>1$时，记$b=(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)$，则$0<b<1$而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{1+(-b)^n}{1-(-b)^n}\longrightarrow\sqrt{x}.$$

当$x<0$，则$\sqrt{x}$为纯虚数，利用复数的三角函数式令$1+\sqrt{x}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，可得

$$f(x,\ n)=-i\sqrt{x}\operatorname{ctg} n\theta,$$

当$n\to\infty$时极限不存在。若x为其它复数，则$\sqrt{x}$的两根关于原点对称，必有一个处于右半平面.经过不太复杂的演算可知$f(x,n)$的极限存在，且等于x在右半平面的那个平方根。

B-5。分这些对象为两个子集$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$与$\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$，此处$m+n=V$。则这$mn$个非序对$a_jb_k$（$j=1,2,\cdots,m$而$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）当中显然不含三角形。若V是偶数，则取$m=n=V/2$；而若$V$是奇数，则取$m=(V+1)/2$，$n=(V-1)/2$。就有$mn\geqslant V^2/4\geqslant E$。

B-6。用反证法。假设A，B，C，D既不共线又不共圆，则线段AB的中垂线p不会与线段CD的中垂线q重合。有两种情形：(1) 若直线p与q相交，则它们的交点是两个同心圆的圆心，一个圆过A，B，另一个圆过C，D。这两圆当然不相交又不重合

（否则四点共圆），与题设矛盾．（2）若p与q平行，则直线AB与CD也平行，考虑分别位于p，q上，又是平行直线AB与CD之间的中点的两点P与Q，显然，圆ABP与CDQ没有公共点，也与题设矛盾．

第二十七届（1966年11月19日）

上午试题

A-1．设$f(n)$表示数列0，1，1，2，2，3，3，4，…的前n项的和．该数列的通项为

$$a_n=\begin{cases}n/2 & \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\ (n-1)/2 & \text{当 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

试证若x与y为正整数且$x>y$，则

$$xy=f(x+y)-f(x-y).$$

A-2．设a，b，c为三角形三边之长，$p=(a+b+c)/2$，r为内切圆半径．求证

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

A-3．设$0<x_1<1$而$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1, 2, \cdots$．求证$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$．

A-4．试证从自然数列中删去完全平方数之后，第n个数等于$n+\{\sqrt{n}\}$，这里定义$\{\sqrt{n}\}$为最接近$\sqrt{n}$的整数．

A-5．设C为实轴上的连续函数族，T是将C映为C的映射且具有下列性质：（i）T为线性的，即$T(c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1T\psi_1+c_2T\psi_2$，式中$c_1$，$c_2$为实数$\psi_1$，$\psi_2$在$C$中．（ii）$T$是局部

的，即若在某区间I内$\psi_1 \equiv \psi_2$，则在I内也有$T\psi_1 \equiv T\psi_2$。

求证T一定是具有形式$T\psi(x) = f(x)\psi(x)$的 映射，式中$f(x)$是某一适当的连续函数。

A-6. 证明表达式

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots}}}}}.$$

下午试题

B-1. 设一个凸多边形P含于边长为1的正方形内，试证P的各边的平方和小于或等于4。

B-2. 试证任何十个连续整数中至少有一个数与其它各数都互素。

B-3. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$收敛（$p_1$，$p_2$，…，$p_n$，…为正实数），则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2}p_n \text{ 也收敛。}$$

B-4. 设有 $mn+1$ 个整数适合关系：$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{mn+1}$。求证能或者从中选取$m+1$个数，每个数都不能被其它$m$个数整除；或者从中选取$n+1$个数，由小到大排列，每个数整除后一个数。

B-5. 在平面上给定n个($n \geqslant 3$)不同的点，没有三点共线，试证存在一个以这些点为顶点的简单闭多边形。

B-6. 试证微分方程$y'' + e^x y = 0$的全体解当$x \to \infty$时均保持有界。

解答

A-1. 容易用数学归纳法证明

$$f(n)=\begin{cases}n^2/4 & \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\ (n^2-1)/4 & \text{当 } n \text{ 为奇数。}\end{cases}$$

由于$x+y$与$x-y$总是有相同的奇偶性，所以在两种(奇、偶)情况下我们都有

$$f(x+y)-f(x-y)=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=xy.$$

A-2. 可用两种方法来计算所给三角形面积：$A=pr$以及$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。平方之并令它们相等，得$p^2r^2==p(p-a)(p-b)(p-c)$。置$x=1/(p-a)$，$y=1/(p-b)$，$z=1/(p-c)$，可将上面的等式写为

$$\frac{1}{r^2}=pxyz=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

于是我们仅需证明$yz+xz+xy\leqslant x^2+y^2+z^2$。这极易从熟知的不等式$y^2+z^2\geqslant 2yz$，$x^2+z^2\geqslant 2xz$，$x^2+y^2\geqslant 2xy$得到。

A-3. 以$(n+1)$乘给定的关系式得

$$\begin{aligned}(n+1)x_{n+1}&=nx_n+x_n-(n+1)x_n^2\\&=nx_n+x_n[1-(n+1)x_n].\end{aligned}\qquad(1)$$

为了证明nx_n递增，我们须证$1-(n+1)x_n\geqslant 0$。事实上$x_2=x_1(1-x_1)=-\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$，$x_n\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\Longrightarrow\left(\frac{1}{2}-x_n\right)^2\geqslant\left(\frac{1}{2}-a\right)^2$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)=-\left(\frac{1}{2}-x_n\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2+$

$\frac{1}{4} \Longrightarrow x_{n+1} \leqslant a(1-a)$。这样，利用数学归纳法得

$$(n+1)x_n \leqslant (n+1)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n^2} \leqslant 1.$$

进而 $nx_n < (n+1)x_n \leqslant 1$，故$nx_n$以 1 为上界，所以$nx_n$收敛于极限 α，此处$0 < nx_n < a \leqslant 1$。现在对（1）式由 2 到 n 的情况相加，得

$$1 \geqslant (n+1)x_{n+1} = 2x_2 + x_2(1-3x_2) + x_3(1-4x_3) + \cdots + x_n[1-(n+1)x_n]. \qquad (2)$$

若$a \neq 1$，则对所有足够大的n有$[1-(a+1)x_n] \geqslant (1-a)/2$。从而由(2)证得$\sum x_n$收敛。可是$nx_n \geqslant x_1$，故$\sum x_n \geqslant x_1 \sum \frac{1}{n}$。

A-4. 为了证明这个公式，利用数学归纳法证明差值 $\Delta = n + \{\sqrt{n}\} - (n-1+\{\sqrt{n-1}\}) = 1$或2，而当且仅当 $n+\{\sqrt{n-1}\}$是一个完全平方数时上述差值才为 2，就可以了。为方便起见，令$\{\sqrt{n-1}\} = q$。则自然有$q-\frac{1}{2} < \sqrt{n-1} < q+\frac{1}{2}$，或表为$q^2 - q + \frac{1}{4} < n-1 < q^2 + q + \frac{1}{4}$更好。这给出 $q^2 + 5/4 < n + \{\sqrt{n-1}\} < (q+1)^2 + \frac{1}{4}$。所以当且仅当 $n = (q+1)^2 - q$时数$n+\{\sqrt{n-1}\}$是一个完全平方数。然而，那时且仅在那时$\sqrt{n} > q+\frac{1}{2} > \sqrt{n-1}$。换言之，那时且仅在那时有$\{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{n-1}\} = 1$，因为这差绝不会大于1。

A-5. 我们将证明$T\psi(x) = f(x)\psi(x)$对所有$\psi \in C$成立，这里f是函数 1（就是那个使所有x都对应于 1 的函数）经T映成的象。我们对于每个x_0及ψ，定义ψ'为

$$\psi'(x)=\begin{cases}\psi(x) & 若x\leqslant x_0,\\ \psi(x_0) & 若x>x_0.\end{cases}$$

由于T是局部的，对于所有$x\leqslant x_0$必有$T\psi'(x)=T\psi(x)$。另一方面，由T的线性性，对于$x>x_0$，有 $T\psi'(x)=\psi(x_0)T1(x)=\psi(x_0)f(x)$。据据$T\psi'$的连续性，$T\psi(x_0)=\psi(x_0)f(x_0)$。

A-6. 我们知道这表达式意即

$$3=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

我们看到$3=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}.$$

致使我们猜测有关系式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}\qquad (n\geqslant 2).\qquad (1)$$

这可由 $(n+2)^2=n^2+4n+4=1+(n+1)(n+3)=1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$以及数学归纳法来证明。于是我们有

$$3>\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.\qquad (2)$$

为了建立一个反方向的不等式，注意到对于任何 $\alpha>1$，有 $\sqrt{1+n\alpha}\leqslant\sqrt{\alpha}\sqrt{1+n}$。在（1）式中倒数第二个根号内取 $\sqrt{(n+2)^2}$为α，利用这里的不等式。然后对层层根号利用类似的不等式，可一直将$(n+2)^a$提到最前面，这里 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即有

$$3\leqslant(n+2)^a\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.\qquad (3)$$

在(2)，(3)两式中均令$n\to\infty$就可得证。

B-1. 设P_1，P_2，…，P_n是P的顶点，P_1'，P_2'，…，P_n'是P_1，P_2，…，P_n在正方形一边上的投影，P_1''，P_2''，…，P_n''是P_1，P_2，…，P_n在与前一边垂直的另一边上的投影。由于P是凸的，第一边至多被线段$\overline{P_1'P_2'}$，…，$\overline{P_{n-1}'P_n'}$，$\overline{P_n'P_1'}$遮盖两次。因而得不等式$\overline{P_1'P_2'}^2+\cdots+\overline{P_n'P_1'}^2\leqslant 2$。同理$\overline{P_1''P_2''}^2+\cdots+\overline{P_n''P_1''}^2\leqslant 2$。将这两个不等式相加并利用毕氏定理即得结论。

B-2. 任何十个连续整数，它们两两之差的绝对值$\leqslant 9$。因此，从中任取二数a，b若不互素，则a，b的公因数d应满足不等式$2\leqslant d\leqslant 9$。故a，b的公共素因数只能是2，3，5，7。

十个连续整数必有5个奇数，能被3整除者至多有两个奇数，两个偶数。能被5整除者必有一个奇数，一个偶数。能被7整除者至多有一个奇数，一个偶数。综上所述，至少有一个奇数不是3，5，7的倍数，它显然与其余9个整数互素。

B-3. 令$q_n=p_1+p_2+\cdots+p_n(q_0=0)$。我们需要通过$T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$去估计$S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{q_n}\right)^2(q_n-q_{n-1})$。

注意
$$\begin{aligned}S_N&\leqslant\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_nq_{n-1}}(q_n-q_{n-1})\\&=\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}\\&=\frac{1}{p_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{q_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}\\&\leqslant\frac{5}{p_1}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{q_n}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{q_n}.\end{aligned}$$

根据许瓦尔兹不等式

$$\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{q_n}\right)^2\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n^2}p_n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n},$$

因而 $$S_N\leqslant\frac{5}{p_1}+2\sqrt{S_NT}+T.$$

从这二次不等式便得$\sqrt{S_N}\leqslant\sqrt{T}+\sqrt{2T+5/p_1}$。

B-4. 对满足 $1\leqslant i\leqslant mn+1$ 的每个 i，由 a_i，a_{i+1}，…，a_{mn+1}中选出一链以a_i为首项，且链的每一项能整除它紧接的下一项并以n_i表示链的最大长度。如果所有n_i不大于n，那么这些链条的个数将不少于$m+1$。从这些链条中各选出其最大数，并按由小到大的顺序记为

$$a_1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_i<\cdots<b_j<\cdots<b_k\leqslant a_{mn+1},$$

其中 $k\geqslant m+1$. 在b_1，…，b_k中，若存在$b_i\mid b_j$，则 b_j就应是b_i所在链条中b_i后面的一个数. 这与上述最长链条的假定矛盾，因此b_1，…，b_k中任何一个都不能被比它小的数整除。

B-5. 设这些点为P_1，P_2，…，P_n。对于$(1,2,\cdots,n)$的每一个排列$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$我们可连结成一个闭多边形，名之为$P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}\cdots P_{\sigma_n}P_{\sigma_1}$. 这样，我们可得$(n-1)!$个不同的闭多边形，其中可以有自交的. 我们指出那个周长为最短的这些多边形的任何一个是简单的. 事实上，由假设没有三点共线，一个自交发生于当且仅当两条线段如$\overline{P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}}$与$\overline{P_{\sigma_m}P_{\sigma_{m+1}}}$彼此相交。可是这样一来闭多边形 $P_{\sigma_2}\cdots P_{\sigma_{m-1}}P_{\sigma_m}P_{\sigma_1}P_{\sigma_n}P_{\sigma_{n-1}}\cdots P_{\sigma_{m+1}}P_{\sigma_2}$会有更短的周长。所以若$P_{\sigma_1}\cdots P_{\sigma_n}P_{\sigma_1}$为最短就不能是自交的。

解法二. 取某两点 P_1与P_2使得所有其它点位于P_1与 P_2连线的同侧。每点$P_i(i>2)$ 确定P_1P_2与P_1P_i之间的夹角θ_i $(0<\theta_i<\pi)$。根据假设，若$i\neq j$则$\theta_i\neq\theta_j$。设$(i_3, i_4, \cdots, i_n)$是$(3,4,$

$\cdots$, n)的一个排列，使得$\theta_{i_2}<\theta_{i_3}<\cdots<\theta_{i_n}$。则$P_1P_2P_{i_3}P_{i_4}\cdots P_{i_n}P_1$是一简单闭折线。

B-6. 以$e^{-x}y'$乘方程，并从0到T积分，我们将项重排后得

$$y^2(T)+2\int_0^T e^{-x}y'y''dx=y^2(0).$$

注意对于某个$\zeta\in[0, T]$必有

$$2\int_0^T e^{-x}y'y''dx=2\int_0^\zeta y'y''dx=\{y'(\zeta)\}^2-\{y'(0)\}^2.$$

于是得到$y^2(T)+\{y'(\zeta)\}^2=y^2(0)+\{y'(0)\}^2$。

第二十八届（1967年12月2日）

上午试题

A-1. 设$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，式中$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$是实数，$n$是正整数。若对所有实数$x$有$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，求证

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

A-2. 定义S_0为1。设S_n为某一类$n\times n$矩阵的总数($n\geqslant1$)，这类矩阵的元素为非负整数且具有性质$a_{ij}=a_{ji}$，($i,j=1,2,\cdots,n$) 以及$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$，($j=1,2,\cdots,n$)。试证

(a) $S_{n+1}=S_n+nS_{n-1}$，

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}S_n\frac{x^n}{n!}=\exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$，这里$\exp(x)=e^x$。

A-3. 考虑在$0<x<1$内有两个不同零点的整系数多项式ax^2-bx+c(式中a，b，$c>0$)。找出并且证明满足上述条件的

多项式的最小系数a。

A-4. $u(x)=1+\lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)dy$

为定义在$0\leqslant x\leqslant 1$上的实值函数。证明若$\lambda>\frac{1}{2}$，u就不存在。

A-5. 试证边界由至多为数目有限的直线段组成，而面积不小于$\pi/4$的一个平面凸区域中，至少存在一对相距为1的点.

A-6. 给定实数a_1，a_2，a_3，a_4，b_1，b_2，b_3，b_4。有$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$。考虑线性方程组

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0$$

的$x_i(i=1, 2, 3, 4)$全不为零的解集。每个这样的解确定一个"正、负号的四重组"(这里正、负号指x_1，x_2，x_3，x_4的符号)。

(i) 试确定不同四重组的最大可能数目。证明你的结论。

(ii) 研究上述四重组个数达到最大时实数a_i，b_i ($i=1,2,3,4$) 应当满足的充要条件。

下午试题

B-1. 设$(ABCDEF)$是半径为r的圆的内接六边形。试证若$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=r$，则$\overline{BC}$，$\overline{DE}$，$\overline{FA}$的中点是一等边三角形的顶点。

B-2. 设$0\leqslant p\leqslant 1$，$0\leqslant r\leqslant 1$，考虑恒等式

(i) $(px+(1-p)y)^2=Ax^2+Bxy+Cy^2$,

(ii) $(px+(1-p)y)(rx+(1-r)y)=\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2$.

求证(就题设范围内的p与r)

(a) $\max\{A, B, C\}\geqslant 4/9$,

(b) $\max\{\alpha, \beta, \gamma\}\geqslant 4/9$.

B-3. 设连续实函数f与g都是周期为1的周期函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$

B-4. (i) 在保险室内放着编号为1，2，3，…，n的n个保险柜，原来都锁着。一个职员进行一系列名之为T_1，T_2，…，T_n的操作。这里T_k ($1\leqslant k\leqslant n$) 是指对所有那些而且仅仅那些编号为k的倍数的保险柜进行一次由上锁变开锁或由开锁变上锁的操作。完成这n步操作之后发现，现在是且只是那些编号为完全平方数的保险柜的锁开着。请对此给予数学证明。(ii) 研究出几种在数学上有意义的操作程序，使得能分别打开编号为完全立方数的柜；或形如$2m^2$的数的柜；或形如m^2+1的数的柜；或你自选的非平凡的类似数的保险柜。

B-5. 试证$(2-1)^{-n}$的二项展开式的前n项的和是1/2，式中n为正整数。

B-6. 设f是定义在$x^2+y^2\leqslant 1$上且具有偏导数的实函数，$|f(x,\ y)|\leqslant 1$。求证在这单位圆内有一点(x_0, y_0)可使

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\right)^2\leqslant 16.$$

解答

A-1. $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|$

$$=|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|$$

$$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\leqslant 1.$$

A-2. (a) S_n是$n\times n$对称的“置换矩阵”的数目(所谓置换矩

阵就是每行每列只有一个元素为1，其余元素全为 0 的矩阵）。设$a_{1k}=1$。若$k=1$，则有S_{n-1}个方法去构成这n阶矩阵。若$k\neq1$，则$a_{1k}=a_{k1}=1$，从而删去第一行第k行及第一列第k列剩下一个$(n-2)\times(n-2)$对称的置换矩阵。可见$S_n=S_{n-1}+(n-1)S_{n-2}$。

(b) 令$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{S_n\frac{x^n}{n!}\right\}$，级数对所有 x 一致收敛。则

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{S_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{S_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+(n-1)S_{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{S_n\frac{x^n}{n!}\right\}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{S_{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}\right\} \\
&= F(x)+xF(x).
\end{aligned}
$$

故 $F'(x)/F(x)=1+x$。积分并利用$F(0)=S_0=1$

得 $F(x)=\exp(x+x^2/2)$。

A-3. 设$f(x)=ax^2-bx+c=a(x-r)(x-s)$。则$f(0)\cdot f(1)=a^2r(r-1)s(s-1)$。从$r(r-1)$的图象看出当 $0<r<1$时有 $0<|r(r-1)|\leqslant\frac{1}{4}$，式中等号当且仅当$r=\frac{1}{2}$时成立。同理$0<|s(s-1)|\leqslant\frac{1}{4}$。由于$r\neq s$，故$r(r-1)s(s-1)<1/16$。从而$0<f(0)\cdot f(1)<a^2/16$。又因$a$，$b$，$c$为整数故 $1\leqslant f(0)\cdot f(1)$。所以$a^2>16$，则$a\geqslant5$。

考虑到 c 至少取1，由判别式$b^2-4ac>0$得b的最小值是5。作$5x^2-5x+1$发现它在0与1之间有两个不同零点，可见这种多项式是存在的。

A-4. 假定有一个解u。则对x从0到1积分得$\int_0^1 u(x)\,dx=\int_0^1 1\cdot dx+\lambda\int_0^1\left\{\int_x^1 u(y)\ u(y\quad x)dy\right\}dx$。后面的二次积分可改变积分顺序且设$\int_0^1 u(x)dx=a$，得$a=1+\lambda\int_0^1\left\{u(y)\int_0^y u(y-x)dx\right\}\cdot dy$。现在保持$y$不变，令$z=y-x$得$a=1+\lambda\int_0^1\left\{u(y)\int_0^y u(z)dz\right\}\cdot dy$。设$f(y)=\int_0^y u(z)dz$，则$a=1+\lambda\int_0^1 f'(y)f(y)dy=1+\lambda\left\{\frac{1}{2}\cdot f^2(1)-\frac{1}{2}f^2(0)\right\}=1+\lambda\cdot\frac{1}{2}a^2$，即有$\lambda a^2-2a+2=0$。由二次方程根的判别式可知若$\lambda>\frac{1}{2}$，则根$a$为虚数。可见这时不存在那样的解$u(x)$。

A-5. 设区域的最大直径为$2d$。用反证法，假定$d<\frac{1}{2}$.取某个最大直径为x轴并以它的中点为原点。该区域必被限于$x=-d$和$x=d$之间。这区域的上边界与下边界都是x的函数。由于凸性,可将它们记为$f(x)$及$-g(x)$，这里f与g在$-d\leqslant x\leqslant d$上为非负。我们由计算点$(x,\ f(x))$与点$(-x,\ -g(-x))$之间的距离可知当$-d\leqslant x\leqslant d$时有$f(x)+g(-x)<\sqrt{1-4x^2}$。至于该区域的面积则由

$$\int_{-d}^{d}[f(x)-(-g(x))]dx$$

$$=\int_{-d}^{d}(f(x)+g(x))dx=\int_{-d}^{d}f(x)dx+\int_{d}^{-d}g(-t)d(-t)$$

$$=\int_{-d}^{d}(f(x)+g(-x))dx<\int_{-d}^{d}\sqrt{1-4x^2}dx$$

$$<\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

这个矛盾表明$d\geqslant\frac{1}{2}$，即至少存在一对相距为1的点。

A-6. (i) 求解以x_3与x_4为自由未知量的方程组，得 $x_1=A_1x_3+B_1x_4$，$x_2=A_2x_3+B_2x_4$，$x_3=x_3$，$x_4=x_4$。其中$A_1=(a_2b_3-a_3b_2)/(a_1b_2-a_2b_1)$，等等。$x_3$，$x_4$平面内的每一点对应于唯一组解($x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$)。$x_1$的符号取决于点($x_3$，$x_4$)相对于直线$A_1x_3+B_1x_4=0$的位置，即点($x_3$，$x_4$)在此直线某一侧时$x_1$为正，另一侧时$x_1$为负。同理$x_2$，$x_3$，$x_4$的符号分别按直线$A_2x_3+B_2x_4=0$，$x_3=0$，$x_4=0$的两侧来决定。上述四条直线都过原点，至多能将平面分成八个区域，每个区域内的点对应于方程组的全不为零解确定的一个“正负号四重组”。所以不同四重组的最大可能个数为8。(ii) 当且仅当确实有四条不同直线时才有最大数8。这等价于条件$A_1\neq0$，$A_2\neq0$，$B_1\neq0$，$B_2\neq0$，$A_1B_2-A_2B_1\neq0$。它们可以简单地表为$a_ib_j-a_jb_i\neq0$(i，$j=1$，2，3，4且$i<j$)。

B-1. 将圆放在复平面(圆心在原点)来考虑。则A，B,C，D，E，F可取为模为r的复数，且$B=A\omega$，$D=C\omega$，$F=E\omega$。式中$\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$。由于$\omega^3=-1$，$\omega\neq1$，$\omega^2-\omega+1=0$。

BC，DE，FA的中点分别是 $P=\frac{1}{2}(A\omega+C)$，$Q=\frac{1}{2}(C\omega+E)$，

$R=\frac{1}{2}(E\omega+A)$。若将线段$\overline{QR}$绕Q旋转$\pi/3$，则R被搬到$Q+\omega\cdot(R-Q)$，这正是P点。所以P，Q，R确是一个等边三角形的顶点。

B-2。(a) 由题设恒等式 (i) 立得$A=p^2$，$B=2p(1-p)$，$C=(1-p)^2$. 在区间 $0\leqslant p\leqslant 1$ 上作出这三条抛物线，它们交截成公共的"最高曲线"形如"W"，其纵标即$\max\{A, B, C\}$. 从图上可看出最低点纵标为4/9.

(b) 我们考虑pr平面内的正方形区域R：$0\leqslant p\leqslant 1$，$0\leqslant r\leqslant 1$. 由(ii) 得$\alpha=pr$，$\beta=p(1-r)+r(1-p)$，$\gamma=(1-p)(1-r)$. 我们来证明R内没有一点适合$\alpha<4/9$，$\beta<4/9$，$\gamma<4/9$.

若$\alpha<4/9$，$\gamma<4/9$则点(p, r)位于双曲线$pr=4/9$与$(1-p)\cdot(1-r)=4/9$之间. 这两条双曲线各有一支穿过R内，其顶点分别为$(2/3, 2/3)$及$(1/3, 1/3)$. 它们关于点$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$对称，这提示我们作坐标轴的平移：$p'=p-\frac{1}{2}$，$r'=r-\frac{1}{2}$. 则$\beta=\frac{1}{2}-2p'r'$. 从而当且仅当$p'r'>1/36$时$\beta<4/9$. 注意双曲线$p'r'=1/36$的顶点在$(p, r)=(1/3, 1/3)$及$(2/3, 2/3)$. 观察渐近线，我们从图上看到区域$\beta<4/9$和区域$\alpha<4/9$，$\gamma<4/9$ 在R内没有叠合部分.

B-3。因为f一致连续，所以对于任意的$\varepsilon>0$存在一个正整数n，使当$|x-y|<1/n$时有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)g(nx)dx\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{m/n}^{(m+1)/n} f(x)g(nx)dx\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{m/n}^{(m+1)/n} f(m/n)g(nx)dx\\
&\quad+\sum_{m=0}^{n-1}\int_{m/n}^{(m+1)/n}(f(x)-f(m/n))g(nx)dx.
\end{aligned}$$

上面第一项等于$\sum_{m=0}^{n-1}(1/n)f(m/n)\int_0^1 g(t)dt$，当$n\to\infty$时成为$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)$。又

$$\begin{aligned}&\left|\int_{m/n}^{(m+1)/n}\{f(x)-f(m/n)\}g(nx)dx\right|\\&<\int_{m/n}^{(m+1)/n}|f(x)-f(m/n)||g(nx)|dx\\&<\int_{m/n}^{(m+1)/n}\varepsilon|g(nx)|dx<\frac{\varepsilon}{n}\int_0^1|g(t)|dt.\end{aligned}$$

于是前面第二项的绝对值小于或等于$\varepsilon\int_0^1|g(t)|dt$，当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 0。

B-4. (i) 在n步操作都执行后，第m号保险柜（$1\leqslant m\leqslant n$）当且仅当m有奇数个因子时成为开锁。设$m=p^\alpha q^\beta\cdots r^\gamma$，则$m$的因子的数目是$(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\gamma+1)$，当且仅当$\alpha$，$\beta$，$\cdots$，$\gamma$都是偶数时它为奇数。这等价于$m$是一个完全平方数的条件。

(ii) 记 T_k为对号码是$2k$ 的倍数的保险柜进行一次开锁或上锁的操作，则可得号码为 $2m^2$的柜锁都开着。而编号 m^2+1 的柜的开锁，有赖于将 T_k改为对柜号i（这里$i-1$是k的倍数）操作并且约定 1 号柜只被T_1所作用。

B-5. 设$(2-1)^{-n}$的二项展开式的前 n 项和为A_n。则

$$\begin{aligned}A_n&=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}2^{-n-i}\\&=2^{-n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\binom{n+i-2}{i}+\binom{n+i-2}{i-1}\right\}2^{-n-i}\\&=2^{-n}+\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n+i-2}{i}2^{-n-i}\right.\end{aligned}$$

$$+\binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1}-2^{-n}\Big\}+\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n+j-1}{j}2^{-n-j-1}$$

$$=2^{-n}+\frac{1}{2}A_{n-1}+\binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1}-2^{-n}$$

$$+\frac{1}{2}A_n-\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n}$$

$$=\frac{1}{2}A_{n-1}+\frac{1}{2}A_n+2^{-2n}\Big\{2\binom{2n-3}{n-1}$$

$$-\binom{2n-3}{n-1}-\binom{2n-3}{n-1}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}A_{n-1}+\frac{1}{2}A_n.$$

得$A_n=A_{n-1}$，但 $A_1=2^{-1}=\frac{1}{2}$，所以对于所有正整数 n 都有 $A_n=\frac{1}{2}$。

B-6. 考虑一个函数$g(x,\ y)=f(x,\ y)+2(x^2+y^2)$。在单位圆周上，显然$g(x,\ y)\geqslant 1$，而在原点$g(0,\ 0)\leqslant 1$。所以，或者$g(x,\ y)=$常数从而$f(x,y)=$常数$-2(x^2+y^2)$，或者$g(x,y)$在某个内点有一个极小值。当 $g(x,\ y)=$常数时，不难找到那样的内点满足题目的要求。而在第二种情形，令$(x_0,\ y_0)$是$g(x,\ y)$的极小点，则在$(x_0,\ y_0)$有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0,$$

因而 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\right|\leqslant 4|x_0|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\right|\leqslant 4|y_0|$。

也可得到题目的结论。

第二十九届(1968年12月7日)

上午试题

A-1. 求证：$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$。

A-2. 设a，b，c，d，e，f为整数，且$ad\neq bc$。求证对任何一个正数$\varepsilon>0$，必存在两个有理数r与s，使得下列两个不等式成立：

$$0<|ra+sb-e|<\varepsilon,\ 0<|rc+sd-f|<\varepsilon。$$

A-3. 求证一有限集的全体子集可用下述方法列表构成：(i) ϕ排在表内第一组；(ii) 每个子集在表内恰好出现一次；(iii) 表内第k组的每个子集，都是在前面各组的每个子集内添进一个新元素而得到的。

A-4. 设球面$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=1\}$上有$n$个定点。求证此$n$个点两两之间直线距离的平方和不超过$n^2$。

A-5. 设V是全体实系数二次多项式P所成的集。其中P在闭区间$[0, 1]$上满足不等式$|P(x)|\leqslant 1$。试确定$\sup\{|P'(0)|: P\in V\}$。

A-6. 试确定形如

$$\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i},\ a_i=\pm 1,\ 0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant n<\infty$$

的全体多项式，使每个多项式的零点都是实数。

下午试题

B-1．设芝加哥和底特律两地气温分别是华氏x°与y°．这两个温度是相关的概率数据，已知：(i) $P(x^\circ=70^\circ)$ 是芝加哥气温的概率；(ii) $P(y^\circ=70^\circ)$ 是底特律气温的概率；(iii) $P(\max(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$．试确定$P(\min(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$．

B-2．设A是乘法有限群G的一个子集，A含有G的元素的一半还要多．求证G的每个元素都是A的某两个元素的积．

B-3．已知60°角不能用尺规三等分．设n为3的整数倍，求证$360^\circ/n$角也不能用尺规三等分．

B-4．设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$存在．求证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx.$$

B-5．设p为质数，J为2×2矩阵$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，其元素属于集$\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$，且满足下列两个同余式：

$a+d\equiv1(\mathrm{mod}\,p)$，$ad-bc\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$．

试确定矩阵J的个数．

B-6．一实数集若是闭的且有界，则称之为紧集．求证不存在这样的有理数紧集序列$\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得任一有理数紧集都至少被某个K_n所包含．

解答

A-1．∵ $x^4(1-x)^4=x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4$

$$= (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2 + 1) - 4,$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^7}{7} - \frac{4}{6}x^6 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x - 4\operatorname{arc\,tg}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{22}{7} - \pi.$$

A-2. 根据实数基本理论，我们可以选择某个有理数ρ，使得$0<\rho<\varepsilon$。关于r，s解下列线性方程组

$$\begin{cases} ar + bs = e + \rho, \\ cr + ds = f + \rho. \end{cases}$$

因$ad \neq bc$，故r，s有唯一解，且皆为有理数。解得的r，s显然满足本题列出的两个不等式。

A-3. 用数学归纳法证明。对于单元素集$\{1\}$，列表可得$[\{\phi\}; \{1\}]$，命题正确。假定命题对于含$n-1$个元素的集$T=\{1, 2, \cdots, n-1\}$正确，对T的全体子集列表可得$[\{\phi\}; \{1\}; \{2\}, \{1, 2\}; \cdots; \{n-1\}, \{1, n-1\}, \cdots, \{1, 2, 3, \cdots, n-1\}]$。易见表内共$n$组总计$2^{n-1}$个子集。现在再对这$2^{n-1}$个子集内各添进一个新元素$n$，构成第$n+1$组子集。结果即得$n$个元素的$2^n$个子集，它正好是按题设方式列得的表。因此命题对任何自然数n都正确。

A-4. 将给定的n个点表成单位向量$\boldsymbol{V}_i$；$|\boldsymbol{V}_i|=1$，$i=1, \cdots, n$。于是这n个定点两两之间直线距离的平方和为

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j)\cdot(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j)$$

$$= (n-1)\sum_{1 \leq i \leq n} \boldsymbol{V}_i \cdot \boldsymbol{V}_i - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \boldsymbol{V}_i \cdot \boldsymbol{V}_j$$

$$=n\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{V}_i-\left[\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{V}_i+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{V}_j\right]$$

$$=n^2-\left(\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{V}_i\right)^2\leqslant n^2.$$

显然可见，当且仅当 $\sum_{1\leq i\leq n}\boldsymbol{V}_i=0$ 时，上面的不等式变成等式。

A-5. 设$f(x)=ax^2+bx+c$为一任意二次多项式，则 $f(0)=c$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$，$f(1)=a+b+c$，

$$f'(0)=b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-3f(0)-f(1).$$

$\because$ $\qquad |P(x)|\leqslant 1$,

$\therefore$ $\qquad |P'(0)|\leqslant 4\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right|+3|P(0)|+|P(1)|\leqslant 8.$

由于$P(x)=8x^2-8x+1\in V$，且有$|P'(0)|=8$，故得

$$\sup\{|P'(0)|:P\in V\}=8.$$

A-6. 不妨先只考虑首项系数$a_0=1$。于是$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$的$n$个零点的平方和等于$a_1^2-2a_2$，而这$n$个零点的积的平方等于 a_n^2。由于n个零点都是实数，根据算术一几何平均值不等式可得

$$\frac{a_1^2-2a_2}{n}\geqslant(a_n^2)^{\frac{1}{n}}$$

当且仅当n个零点都相等时才成立等式．对于本题，上面的不等式变成

$$\frac{1\pm 2}{n}\geqslant 1\Longrightarrow n\leqslant 3.\quad (n\leqslant -1\text{无意义。})$$

注意，$n>1$时，$a_2=-1$。$n=3$时，多项式的零点只能是± 1。(不难检验另外的三次多项式只有一个实零点。)据此即可列出符合本题要求的全体多项式如下：

$\pm(x-1)$，$\pm(x+1)$，$\pm(x^2+x-1)$，$\pm(x^2-x-1)$，

$\pm(x^3+x^2-x-1)$，$\pm(x^3-x^2-x+1)$。

B-1. 将事件$x°=70°$，$y°=70°$，$\max(x°, y°)=70°$，$\min(x°, y°)=70°$分别记为A，B，C，D，则有

$$A\cup B=C\cup D,\quad A\cap B=C\cap D.$$

于是
$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$
$$=P(C\cup D)+P(C\cap D)=P(C)+P(D).$$
$$\Longrightarrow\quad P(\min(x°, y°)=70°)=P(x°=70°)+P(y°=70°)$$
$$-P(\max(x°, y°)=70°).$$

B-2. 设g为G的任一元素，则集$\{ga^{-1}|a\in A\}$与集A有同样多的元素。若此二集的交等于ϕ，则它们的并含有的元素比G要多，这不可能。因为A与$\{ga^{-1}|a\in A\}$都是G的子集。于是

$$A\cap\{ga^{-1}|a\in A\}\neq\phi.$$

从而必定存在a_1，$a_2\in A$，使得

$$a_1=ga_2^{-1}\Longrightarrow g=a_1a_2.$$

B-3. 我们需要引用下列三点关于数域的性质及作图可能性的判别条件作为依据：

(i) 设Q为有理数域，在Q内添进元素$\cos\frac{360°}{k}$ (k为正整数)，即得一个次数为欧拉函数$\varphi(k)$的扩域，可记为

$$\left[Q\left(\cos\frac{360°}{k}\right):Q\right]=\varphi(k).$$

(ii) 若L是K的有限扩域，M是L的有限扩域，即$K\subset L\subset M$，$[L:K]<\infty$，$[M:L]<\infty$，则M也是K的有限扩域，且有

$$[M:K]=[M:L]\cdot[L:K].$$

(iii) 若给定$\cos\frac{360°}{k}$，则当且仅当

$$\left[Q\left(\cos\frac{360°}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360°}{k}\right)\right]$$

等于2的整数次幂时，$\cos\frac{360°}{3k}$才能用尺规作图．于是有

$$\left[Q\left(\cos\frac{360°}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360°}{k}\right)\right]\cdot\varphi(k)=\varphi(3k).$$

由欧拉函数的性质可知

$$\varphi(3k)=\begin{cases}3\varphi(k), & 3\mid k;\\ 2\varphi(k), & 3\nmid k.\end{cases}$$

因此当且仅当$3\nmid k$时，角$360°/k$才能用尺规三等分．

B-4. 由广义积分定义可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\lim_{b\to-0}\int_{-1}^{b}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$+\lim_{c\to+0}\int_{c}^{1}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\lim_{d\to+\infty}\int_{1}^{d}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

对I_1与I_2施行变数代换

$$x=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2+4});$$

对I_3与I_4施行变数代换

$$x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+4}).$$

这两种代换在各自的积分区间内，x关于y的函数都有连续的一阶导数，因此代换是合理的．作过这些代换之后，我们得到四

个关于变元y的广义积分．根据狄利克莱判别法可知，这四个广义积分都收敛．于是我们有

$$I_1+I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy=\int_{-\infty}^{0}f(y)dy.$$

$$I_3+I_4=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}f(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)dy=\int_{0}^{+\infty}f(y)dy.$$

$$\Longrightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx.$$

B-5． 若$a=0$，则$d=1$；若$a=1$，则$d=0$．在这两种情形下，都有$bc=0$．

当$b=0$时，$c=0, 1, 2, \cdots, p-1$；

当$c=0$时，$b=1, 2, \cdots, p-1$．

于是求得J有$2(p+p-1)=4p-2$个解．

若$a\neq 0$或1，即若

$$a=2, 3, \cdots, p-2, p-1,$$

则对应地有$d=p-1, p-2, \cdots, 3, 2$．

在此$p-2$种情形下，都有$bc\equiv ad\neq 0 \pmod{p}$，因此$bc\neq 0$．对此$p-2$种情形中任意一对$a$，$d$的取值，我们都可以取$b=1, 2, \cdots, p-1$，而$c$的取值随之可唯一确定．从而得到$J$的全部解数是

$$4p-2+(p-2)(p-1)=p^2+p.$$

B-6． 设$\{K_n\}$是任一有理数紧集序列．对任意的自然数n，必定存在某个有理数$r_n\in K_n$，并且$0\leqslant r_n\leqslant 1/n$．否则，$K_n$就会

含有$[0, 1/n]$内的全体有理数，从而含$[0,1/n]$内的某个无理数(因为K_n是闭集)。于是$S=\{0,r_1,r_2,\cdots\}$是一个有理数紧集，但S不被任何一个K_n所包含。

第三十届(1969年12月6日)

上午试题

A-1. 设$f(x, y)$是定义在整个x-y平面上的二元实系数多项式。试确定$f(x, y)$可能取得的值域范围.

A-2. 设D_n为一n阶行列式,其第i行第j列的元素为$|i-j|$, $(i, j=1, 2, \cdots, n)$。求证:

$$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

A-3. 设P是一个不自交的闭n边形，其顶点为P_1，$P_2\cdots$，P_n。在P内有m个定点Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_m。现将$n+m$个点P_1，$\cdots$，Q_m中的某些点对适当连成全部位于P内的线段，使得:

(i) 剖分得到的三角形集T内，除顶点外，边与边不相交;

(ii) 若T内两三角形有两个公共顶点，则它们有一条公共边;

(iii) T内三角形顶点所成的集等于

$$\{P_1, \cdots, P_n, Q_1, \cdots, Q_m\}.$$

试确定集T内有多少个三角形?

A-4. 设$f(x)=x^x$，且$f(0)=1$。求证:

$$\int_0^1 x^x dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}.$$

A-5. 设微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = -2y + u(t), \qquad \frac{dy}{dt} = -2x + u(t)$$

中的$u(t)$是t的连续函数．求证不管$u\ (t)$如何选择，方程组当$t=0$时，满足$x=x_0, y=y_0$的解$(x_0 \neq y_0)$，都不经过原点(0,0)。若$x_0=y_0$，求证对于t的任一正值t_0，都可以选择$u(t)$，使得方程组的解能经过原点(0，0)。

A-6. 设$y_n = x_{n-1} + 2x_n$，$n=2，3，4，\cdots$

求证当序列$\{y_n\}$收敛时，序列$\{x_n\}$也收敛。

下午试题

B-1. 设n为自然数，$n+1$能被24整除．求证n的全体约数的和也能被24整除。

B-2. 求证任一有限群都不能是两个真子群的并。若将“两”改为“三”，则结论怎样？

B-3. 设序列$\{T_n\}$满足条件：

$$T_n T_{n+1} = n，\quad n=1，2，3，\cdots；$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{T_{n+1}} = 1.$$

求证：$\pi T_1^2 = 2$。

B-4. 求证任一单位长的曲线弧都能被一面积等于1/4的矩形所复盖。

B-5. 设$a_1，a_2，a_3，\cdots$是一递增的正整数序列，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

收敛．对任一实数x，令$k(x)$表示$\{a_n\}$中不超过x的个数．求证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k(x)}{x}=0.$$

B-6. 设A，B分别是3×2及2×3矩阵，并且

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

求证：$BA=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

解答

A-1. 由$f(x, y)$的连续性可知，f的值域是连通的。即若a，b在f的值域内，且$a<c<b$，则由中间值定理知，c也在f的值域内。

若$|f(x, y)|$有界，则一元多项式$f(x, kx)$对任意实数k都只能取常数值，故必有$f(x, y)=f(0, 0)$。在此情形下，f的值域仅为一点。

若$|f(x, y)|$无界，则f的值域可有下列三种情形：(i) 全体实数。例如$f(x, y)=x$；(ii) 含有端点的半无穷区间，例如$f(x, y)=-y^2+c$的值域为$(-\infty, c]$；(iii) 不含端点的半无穷区间。这一情形的例子较难举出。我们可用下述方法获得成功：将y视为参数，在与x—z平面平行的平面上，作出对称轴与z轴平行的抛物线族，使其顶点的直坐标随$y\to\pm\infty$而单调减少趋于某个常数，例如$f(x, y)=(xy-1)^2+x^2$的值域就是$(0, +\infty)$。

A-2. 将D_n的第一列反号加到其余各列，然后将第一行加到其余各行。于是我们有

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & n-3 \\ 2 & -1 & -2 & \cdots & n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & -1 & -2 & \cdots & -n+3 \\ n-1 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2n-4 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 2n-6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

A-3. 设集T有t个三角形，则它们的$3t$个内角是P的n个内角及以Q_1，…，Q_m为顶点的m个周角组成，故有

$$t\pi=2m\pi+(n-2)\pi\Longrightarrow t=2m+n-2.$$

A-4. 我们有

$$f(x)=x^x=e^{x\log x}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m(\log x)^m.$$

由微分法可知，$\log f(x)=x\log x$在[0，1]上有

$$\max[\log f(x)]=\log f(0)=0,$$

$$\min[\log f(x)]=\log f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}.$$

因 $|x\log x|\leqslant 1/e<1$，故$f(x)$在$[0,\ 1]$上一致收敛．于是

$$\int_0^1 x^x dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m(\log x)^m dx.$$

令 $$F(m,\ k)=\int_0^1 x^m(\log x)^k dx,$$

则当$m\geqslant 0$，$k\geqslant 1$时，应用分部积分法可得

$$F(m,\ k)=-\frac{K}{m+1}F(m,\ k-1).$$

$$\Longrightarrow\quad F(m,\ m)=(-1)^m m!(m+1)^{-m}F(m,0)$$

$$=(-1)^m\frac{m!}{(m+1)^{m+1}}.$$

最后即得 $$\int_0^1 x^x dx=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)^{-m-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}.$$

A-5． 对给定的方程组消去$u(t)$得

$$\frac{d(x-y)}{dt}=2(x-y)\Longrightarrow x-y=(x_0-y_0)e^{2t}.$$

若$x_0\neq y_0$，则$x-y\neq 0$．因此方程组的解不经过原点（0，0）．若$x_0=y_0$，则$x(t)=y(t)$．因为连续函数$u(t)$可任意选定，故不妨期望$x=x_0-at$，$y=y_0-at$是给定方程组的解，这只须取

$$u(t)=2(x_0-at)-a$$

即可．再令$a=x_0/t_0$，则当$t=t_0$时，方程组的解就经过原点（0，0）．

A-6． 令$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y^*$，$\dfrac{y^*}{3}=x^*$，

则对任一$\varepsilon>0$，必存在某个N，当所有的$n>N$时，成立$|y_n-y^*|$

$<\varepsilon/2$。于是

$$\frac{\varepsilon}{2}>|y_n-y^*|=|x_{n-1}+2x_n-3x^*|=|2(x_n-x^*)+(x_{n-1}-x^*)|$$

$$\geqslant 2|x_n-x^*|-|x_{n-1}-x^*|$$

$$\Longrightarrow\quad |x_n-x^*|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{2}|x_{n-1}-x^*|.$$

据此推得 $|x_{n+m}-x^*|<\frac{\varepsilon}{4}\left(\sum_{i=0}^{m}2^{-i}\right)+2^{-m-1}|x_{n-1}-x^*|$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+2^{-m-1}|x_{n-1}-x^*|.$$

取充分大的m，使

$$2^{-m-1}|x_{n-1}-x^*|<\frac{\varepsilon}{2},$$

并记$n+m=k$，即得

$$|x_K-x^*|<\varepsilon.\quad\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}x_K=x^*.$$

B-1. 我们有

$$24|n+1\Longleftrightarrow\begin{cases}n\equiv-1 & (\bmod 3),\\ n\equiv-1 & (\bmod 8).\end{cases}$$

设$d|n$，则
$d\equiv1$或$2\pmod 3$，$d\equiv1$，3，5或7$\pmod 8$。

再由$d\cdot\frac{n}{d}=n\equiv-1\pmod 3$ 或 $\pmod 8$ 即知仅有下列几种可能情形出现：

$d\equiv1$，$\frac{n}{d}\equiv2\quad\pmod 3$，反之亦然；

$d\equiv1$，$\frac{n}{d}\equiv7\quad\pmod 8$，反之亦然；

$$d\equiv 3,\ \frac{n}{d}\equiv 5 \pmod 8)，反之亦然。$$

上列各种情形都符合

$$d+\frac{n}{d}\equiv 0 \pmod 3 \text{ 及 } \pmod 8.$$

$$\Longrightarrow \qquad d+\frac{n}{d}\equiv 0 \pmod{24}.$$

因为$d\neq\frac{n}{d}$，所以n的约数两两互异。这就证明了 n 的全体约数的和能被24整除。

B-2. 设n为有限群G的阶数，n_1为G的子群G_1的阶数，则$n_1|n$。若G_1是G的真子群，则$n_1\leqslant n/2$。G的两个真子群必有相同的单位元素，因此它们的并不可能等于G。

对于第二个问题，可以举出克莱茵四元群作肯定的回答：

设$B_4=\{e,\ a,\ b,\ ab\}$，乘法表为

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

则$\{e,\ a\}$，$\{e,\ b\}$，$\{e,\ ab\}$都是B_4的真子群，它们的并显然等于B_4。

B-3. 当n为奇数时，由$T_{n+1}=\frac{n}{T_n}$可以推得

$$T_{n+1}=\frac{n(n-2)\cdots5\cdot3}{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{1}{T_1},$$

$$T_n=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(n-2)(n-4)\cdots3\cdot1}\cdot T_1.$$

$$\Longrightarrow\qquad \frac{T_n}{T_{n+1}}=T_1^2\cdot\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdots(n-1)(n-1)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(n-2)\cdot n}$$

根据瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots$$

可知，当右边的部分积有偶数个因子时，其积小于$\pi/2$，有奇数个因子时，其积大于$\pi/2$。因此我们有

$$\frac{T_n}{T_{n+1}}<\frac{\pi}{2}T_1^2,\ n\text{为奇数}.$$

同理可得 $$\frac{T_n}{T_{n+1}}<\frac{2}{\pi}T_1^{-2},\ n\text{为偶数}.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{T_{n+1}}=1,$$

故有 $$1\leqslant\frac{\pi}{2}T_1^2\quad\text{及}\quad 1\leqslant\frac{2}{\pi}T_1^{-2}.$$

$$\Longrightarrow\qquad \pi T_1^2=2.$$

B-4. 我们来考察两端点位于x轴上的任一单位长曲线弧，令其两端点为P_0与P_5。作出一个四边分别与x,y轴平行且完全复盖此曲线弧的最小矩形。设其长与高分别为a，b。由矩形复盖曲线的最小性质可知，矩形的四边上必有曲线弧上的点，依次记为P_1，P_2，P_3,P_4。(矩形的顶点可看作两邻边重合的点；若诸P_i不唯一，则任取一个即可。)作折线$P_0P_1P_2P_3P_4P_5$,则其长至多为1，其水平分量至少为a，而垂直分量至少为$2b$，因此这条折线的长度不小于$\sqrt{a^2+4b^2}$。于是我们得到关于a，b的限制条件如下：

$$\sqrt{a^2+4b^2}\leqslant 1\Longrightarrow a^2+4b^2\leqslant 1,\ 0<a\leqslant 1,\ 0<b\leqslant 1.$$

注意

$$ab=\frac{1}{4}[(a^2+4b^2)-(a-2b)^2]\leqslant\frac{1}{4}[1-(a-2b)^2],$$

即知当且仅当$a=2b$时，$ab=\frac{1}{4}$为所求矩形面积的极大值。

B-5. $\forall\varepsilon>0$，假定存在$x_j\to\infty$，使得

$$\frac{k(x_j)}{x_j}\geqslant\varepsilon.$$

设$1\leqslant n\leqslant k(x_j)$，则由$a_n$的单调增加的性质知

$$a_n\leqslant a_{k(x_j)}\leqslant x_j\Longrightarrow\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{1}{x_j}.$$

于是$\forall N$(自然数)，可以推得

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{a_n}\geqslant\sup_j\sum_{n=N}^{k(x_j)}\frac{1}{a_n}\geqslant\sup_j\frac{k(x_j)-N}{x_j}$$

$$\geqslant\sup_j\left(\varepsilon-\frac{N}{x_j}\right)=\varepsilon,$$

这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛相矛盾．故必有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k(x)}{x}=0.$$

B-6. 我们有　秩$(AB)=2$，且

$$ABAB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}^2=9AB.$$

根据线性方程组理论，可以分别求出2×3矩阵A'及3×2矩阵

B'，使得

$$A'A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I=BB'.$$

于是有　$A'(ABAB)B'=A'(9AB)B'\Longrightarrow BA=9I$.

第三十一届（1970年12月5日）

上午试题

A-1. 试证函数 $e^{ax}\cos bx$ （$a>0$，$b>0$）的幂级数展开式中，或者没有零系数，或者有无穷多的零系数.

A-2. 考虑由实多项式方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx^3+Ex^2y+Fxy^2+Gy^3=0$$

给出的轨迹，式中$B^2-4AC<0$. 证明存在一个正数δ使得这轨迹没有一点位于穿心圆盘$0<x^2+y^2<\delta$内.

A-3. 一个具有相同非零数字的(有限)数列，能成为一个整数的平方的尾部. 试求这种数列最长的长度，并求出尾部为这种数列的最小平方数.

A-4. 给定一个序列$\{x_n\}$ （$n=1,2,\cdots$），具有性质$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n-x_{n-2}\}=0$. 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

A-5. 试确定能位于椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\qquad (a>b>c)$$

上的最大圆的半径.

A-6. 独立地随机选取三个数，它们分别从三个区间$[0, L_i]$ ($i=1,2,3$) 取得。若每个随机数关于它所选自的区间为均匀分布，试确定这三个数的最小期望值。

下午试题

B-1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}$.

B-2. 一个物体的时变温度由时间的不高于三次的多项式来给出。试证这物体在上午9点到下午3点之间的平均温度，总是能由取两个固定时刻的温度的平均值来求得，而不依赖于上面的多项式。并证明，这两个时刻（精确到分钟）是上午10点16分与下午1点44分。

B-3. R^2的一个闭子集S位于条形$a<x<b$内，试证它在y轴上的射影是闭的。

B-4. 一部汽车从静止开始沿一条直路在一分钟内驶过一英里就停下来。若该车的调速器可以防止速度超过每小时90英里，求证在行驶的某个时刻该车的加速度（或减速度）至少有6.6英尺/秒^2。

B-5. 定义u_n为"斜坡梯"函数

$$u_n(x)=\begin{cases}-n & \text{当}x\leqslant -n,\\ x & \text{当}-n<x\leqslant n,\\ n & \text{当}x>n。\end{cases}$$

又设F是实变量的某个实值函数。试证当且仅当$u_n\circ F$对于所有n连续时F是连续的。(注：$(u_n\circ F)(x)=u_n[F(x)]$)。

B-6. 一个能够内接于一圆的四边形称为可内接的或可循

环的，一个能够外切于一圆的四边形称为可外切的。证明若一个边长为a,b,c,d的可外切四边形具有面积$A=\sqrt{abcd}$，则它也是可内接的。

解答

A-1。注意$e^{ax}\cos bx$是$e^{(a+ib)x}$的实部。于是幂级数为

$$e^{ax}\cos bx=\sum_{n=0}^{\infty}R_e\{(a+ib)^n\}\frac{x^n}{n!}.$$

从这种表达式就容易看出，若x^n有零系数，则对于每个奇数k，x^{kn}都有零系数。

A-2。设$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(r>0)$是这曲线上的一点。则

$$r=\frac{|A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta|}{|D\cos^3\theta+E\cos^2\theta\sin\theta+F\cos\theta\sin^2\theta+G\sin^3\theta|}. \tag{1}$$

(1)的分母小于或等于$|D|+|E|+|F|+|G|$。另一方面，因为$B^2<4AC$，分子有正的最小值

$$N=\frac{|A+C|-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}.$$

所以 $$r\geqslant\frac{N}{|D|+|E|+|F|+|G|}=\delta,$$

因而这曲线没有一点落在$0<r<\delta$内。

A-3。如果x是一个整数，则$x^2\equiv0,1,4,5,6$或$9\pmod{10}$。$x^2\equiv0\pmod{10}$的情况由题目的假设已被排除。若$x^2\equiv11,55$或$99\pmod{100}$则$x^2\equiv3\pmod 4$，这是不可能的。同理，$x^2\equiv66\pmod{100}$蕴涵$x^2\equiv2\pmod 4$，这也是不可能的。剩下的数字只有4了，若$x^2\equiv4444\pmod{10000}$，则$x^2\equiv12\pmod{16}$，但是只要

简单核验便知这仍是不可能的。最后我们发现 $38^2=1444$，可见存在至多为三个4的这种数列。同时我们容易判断，1444正是收尾于该数列的最小平方数。

A-4. 对于 $\varepsilon>0$，设N充分大使得对所有的 $n\geqslant N$ 有 $|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon$。注意到对于任意的$n>N$，

$$
\begin{aligned}
x_n-x_{n-1}&=(x_n-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})\\
&\quad+(x_{n-2}-x_{n-3})-\cdots\pm(x_{N+1}-x_{N-1})\\
&\quad\mp(x_N-x_{N-1}).
\end{aligned}
$$

于是 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant(n-N)\varepsilon+|x_N-x_{N-1}|$ 因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

A-5. 用平行平面截这椭球面所得的截线皆为相似的椭圆，所以任何圆截线的尺寸按其到与它平行而过坐标原点的截圆的接近程度而增加。但是每个过原点的平面产生的截圆必与yz平面相交，这意味着这截圆的直径必定是椭圆$x=0,y^2/b^2+z^2/c^2=1$的一条直径。所以这圆的半径至多是b.同理可证对于xy平面而言圆的半径至少是b。这样一来，由过$(0,0,0)$的一平面形成的任何截圆必定有半径b，因而这就是要求的极大半径。为了证明半径为b的截圆确实存在，考虑所有过y轴的平面，可以验证由$a^2(b^2-c^2)z^2=c^2(a^2-b^2)x^2$给出的两个平面就分别给出半径为$b$的两个截圆。

A-6. 设x 选自$[0, L_1]$，y选自$[0, L_2]$，z选自$[0, L_3]$，且假定$L_3\geqslant L_2\geqslant L_1$。令$X=\min(x,y,z)$。

$$L_1L_2L_3E[X]=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\int_0^{L_3}Xdzdydx$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left\{\int_0^{\mu}zdz+\int_{\mu}^{L_3}\mu dz\right\}dydx,\qquad(\mu=\min(x,y)),$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_1}\left\{L_3\mu-\frac{1}{2}\mu^2\right\}dydx$$

$$=\int_0^{L_1}\left\{\int_0^x\left(L_3y-\frac{1}{2}y^2\right)dy+\int_x^{L_2}\left(L_3x-\frac{1}{2}x^2\right)dy\right\}dx$$

$$=\cdots=\frac{1}{2}L_1^2L_2L_3-\frac{1}{6}L_1^3(L_2+L_3)+\frac{1}{12}L_1^4.$$

B-1. 令 $a_n=\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}$.

则 $$\ln a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\int_1^2\ln(1+x^2)dx=2\ln5-4+2\mathrm{arctg}2$.

B-2. 设温度 $P(t)=at^3+bt^2+ct+d$. 方程

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P(t)dt=\frac{1}{2}\left\{P(t_1)+P(t_2)\right\}$$

当且仅当 $t_2=-t_1=\pm T/\sqrt{3}$时对于任何a, b, c, d的值为满足。现在 $T=3$小时，则$T/\sqrt{3}\approx1$小时43.92分.所以在所研究的情形，临界的时刻是正午前后1小时44分。

B-3. 设对于所有的n,$(x_n,y_n)\in S$,$y_n\to y$. 由波尔察诺-维尔斯特拉斯定理知一个子序列 $x_{k(n)}\to x$。则 $y_{k(n)}\to y$，且因为S是闭的,$(x,y)\in S$。于是y属于S在y轴上的射影。

B-4. 用英尺与秒作为测量单位[*]，对于所有的$t\in[0,60]$有$0\leqslant v(t)\leqslant132$。设对于所有 $t\in[0,60]$有 $|v'(t)|<6.6$。则 $v(t)=\int_0^t v'dt<6.6t$以及$v(t)=\int_t^{60}-v'dt<6.6(60-t)$ 对于所有$t\in[0,60]$成立。于是

(* 1英里 = 5280英尺。

$$5280=\int_0^{60} v(t)dt<\int_0^{60}\min\{6.6t,66(60-t),132\}dt.$$

最后的积分式子表示一个梯形的面积，且可算出等于5280，这就引出矛盾。

B-5. 显然u_n是连续的．所以，若F连续，则$u_n\circ F$是连续函数的复合，因而连续．反之，设$u_n\circ F$对于所有n是连续的．为了证明F是连续的，只要证明$F^{-1}[(a,b)]$对于每个有限区间(a,b)是开的就够了．设$n>\max(|a|,|b|)$．则$u_n^{-1}[(a,b)]=(a,b)$从而

$$F^{-1}[(a,b)]=F^{-1}[u_n^{-1}\{(a,b)\}]=(u_n\circ F)^{-1}[(a,b)],$$

根据$u_n\circ F$的连续性，这是一个开集．

B-6. 因为这四边形是可外切的，故$a+c=b+d$。设k为一条对角线的长，因而对于那样挑选的角α,β有

$$k^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta.$$

减去$(a-b)^2=(c-d)^2$，得

$$2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta).\qquad(1)$$

由 $A=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta=\sqrt{abcd}$，得

$$4A^2=4abcd=a^2b^2(1-\cos^2\alpha)+c^2d^2(1-\cos^2\beta)+2abcd\sin\alpha\sin\beta.$$

用(1)来代换上式右边，得

$$4abcd=ab(1+\cos\alpha)cd(1-\cos\beta)+cd(1+\cos\beta)ab(1-\cos\alpha)+2abcd\sin\alpha\sin\beta.$$

化简得 $4=2-2\cos(\alpha+\beta)$.

由此推出$\alpha+\beta=\pi$，所以这四边形内接于圆。

第三十二届（1971年12月4日）

上午试题

A-1. 在三维欧氏空间内任意给定9个格点（坐标皆为整数的点），求证其中至少有两点连接的线段上也存在格点。

A-2. 试确定符合下列条件的所有多项式$P(x)$：

$$P(x^2+1)=(P(x))^2+1,\ P(0)=0.$$

A-3. 设边长分别为a,b,c的$\triangle ABC$的三顶点是欧氏平面上的三个格点。$\triangle ABC$的外接圆半径为R。求证：$abc\geqslant 2R$。

A-4. 设$0<\varepsilon<1$，求证当自然数n充分大时，表达式$(x+y)^n(x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2)$是正系数多项式。若$\varepsilon=0.002$，求符合题意的最小正整数$n$。

A-5. 某人掷硬币，得正面记a分，得背面记b分，（a，b为正整数，且$a>b$。）并将每次得分进行累计。他发现不论掷多少次，总有35个分数记录不到，例如58就是其中之一。试确定a，b的大小。

A-6. 设c为实数，且对任意的正整数n，都能使n^c是整数。求证c必为非负整数。

下午试题

B-1. 设$\circ$是集S上的一个二元运算，并且满足下列两条法则：(i) $\forall x\in S, x\circ x=x$；(ii) $\forall x,y,z\in S,(x\circ y)\circ z=(y\circ z)\circ x$。求证$\circ$满足交换律与结合律。

B-2. 设 $F(x)$ 除 $x=0$与1两点外，对其余全体实数都有定义，并且满足等式

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x.$$

求符合这一条件的所有函数$F(x)$。

B-3. 甲、乙两汽车都以每小时一圈的匀速绕一轨道不停地作同向运动。甲于时刻 $t=0$从原点出发行驶任意时间 $t=T>0$后，乙再从原点出发。求证存在总计恰为1小时的时间区间内，甲绕轨道行驶的圈数是乙行驶圈数的2倍。

B-4. 设A，B为已知球面上的二定点，P为球面上的动点，$\overset{\frown}{PA}$，$\overset{\frown}{PB}$为球面距离。若$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}=$常数，则称$P$的轨迹为球面椭圆。$A,B$为其二焦点。试确定实球面椭圆变成圆的条件。

B-5. 设微分方程组

$$x''+y'+6x=0,\quad y''-x'+6y=0,\quad ('=d/dt)$$

满足初值条件 $x'(0)=y'(0)=0$。求证它的解在 $x-y$平面上的图形是两条圆内旋轮线。(一圆周沿另一固定圆周的内部滚动而无滑动时，动圆圆周任一点所经过的曲线。)试确定此二旋轮线定圆及动圆的半径。

B-6. 设$\delta(x)$是正整数x的最大奇因子。求证$\forall x$，下列不等式成立：

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}-\frac{2x}{3}\right|<1.$$

解答

A-1. 将空间格点的坐标按奇偶数分类，则只可能分成下

列八类：

(奇,奇,奇)，(奇,奇,偶)，(奇,偶,奇)，(奇,偶,偶)，

(偶,奇,奇)，(偶,奇,偶)，(偶,偶,奇)，(偶,偶,偶)，

因此，在给定9个已知点中，至少有某两点P与Q的同名坐标具有相同的奇偶性。于是线段PQ的中点显然是一个格点。

A-2. 我们有

$P(0)=0$，$P(1)=[P(0)]^2+1=1$，

$P(2)=[P(1)]^2+1=2$，$P(5)=[P(2)]^2+1=5$，

$P(5^2+1)=[P(5)]^2+1=26$，

如此等等。

由此可见，$P(x)-x$有无穷个零点，从而得知$P(x)\equiv x$。

A-3. 设 $S_{\triangle ABC}=\triangle$，则

$$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}\Rightarrow abc=4R\triangle.$$

由于$A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$是三个格点，因此$2\triangle\geqslant 1$，于是$abc=4R\triangle\geqslant 2R$。

A-4. 记 $P_n(x,y)=(x+y)^n[x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2]$，则$P_n(x,y)$的展开式中，$x^{k+1}y^{n+1-k}$的系数是

$$\binom{n}{k-1}-(2-\varepsilon)\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\left[\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1}-(2-\varepsilon)\right]. \qquad (1)$$

将n视为常数，k视为正的连续变数，令

$$\varphi(k)=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1}-(2-\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(k)=\frac{(n+1)[(k+1)^2-(n-k+1)^2]}{(n-k+1)^2(k+1)^2}.$$

由$\varphi'\left(\frac{n}{2}\right)=0$，不难确定$k=\frac{n}{2}$时，$\varphi(k)$取极小值。

易知当$n>2$时，$P_n(x,y)$的头两项及末两项的系数皆正。我们可以断定：若对于某个充分大的奇数n，$P_n(x,y)$的展开式正中间两项的系数非正，则$P_{n+1}(x,y)$的正中间一项的系数仍然非正。因此使$P_n(x,y)$的系数全部为正的最小自然数n必为奇数。

我们取整值$k=\frac{1}{2}(n\pm1)$，则得$\varphi(k)=\frac{n-1}{n+3}-1+\varepsilon$。欲使$\varphi(k)>0$，只须$n>4/\varepsilon-3$即可。当$\varepsilon=0.002$时，$n>1997$。因此应取$n=1999$。

A-5. 设某人掷硬币得正面x次，得背面y次，则累计得分为$ax+by$。若$(a,b)=d\neq1$，则对任何一个不被d整除的正整数，都将记录不到。这与题意不符。故必有$(a,b)=1$。设m为掷币能记录到的一个数，则直线$ax+by=m$上至少有一个格点位于闭的第I象限内。我们先证下面两个引理。

引理1. 若$m\geqslant ab$，(a,b互质)，则数列$m,m-a,m-2a,\cdots,m-(b-1)a$中，至少有一个是$b$的倍数。

证明： 假定结论不真、由于给定的数列有b个数，它们除以b所得的余数至少有两个相同，设为$m-ia\equiv m-ja \pmod{b}$。其中$0\leqslant i<j\leqslant b-1$。由此推得$(m-ia)-(m-ja)=(j-i)a$必为$b$的倍数，且$0<j-i\leqslant b-1$。这不可能，因为$b\nmid j-i$，$b\nmid a$。故引理1结论正确。

引理2. 设$0\leqslant m<ab$，(a,b互质)，则直线$ax+by=m$至多只有一个格点位于闭的第I象限内。

证明： 假定在I象限内有两个格点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)适合$ax_1+by_1=ax_2+by_2=m$，则有

$$\frac{b}{a}=\frac{|x_1-x_2|}{|y_1-y_2|}.$$

从$ax+by=m$的图象上看，易知

$$|x_1-x_2|<b,\quad |y_1-y_2|<a.$$

故b/a不是既约分数。这与a，b互质矛盾。从而得知引理2结论正确。

由引理1知，掷币人记录不到的数值，必满足不等式

$$0 \leqslant m < ab。 \qquad (1)$$

再由引理2知，在闭的I象限内，满足不等式

$$0 \leqslant ax + by < ab \qquad (2)$$

的格点与(1) 内可以记录到的m值一一对应。

因为闭矩形$\{0 \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant a\}$内计有 $(a+1)(b+1)$ 个格点，所以在闭的I象限内，满足(2) 的格点个数为

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1)-1],$$

从而满足(1) 的m中不能记录到的数值个数为

$$ab - \frac{1}{2}(a+1)(b+1) + 1 = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)。$$

在本题中，我们有

$$35 = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)。$$

$$\Longrightarrow \qquad 70 = (a-1)(b-1) = 1 \cdot 70 = 2 \cdot 35 = 5 \cdot 14 = 7 \cdot 10。$$

根据条件$a > b$，$(a, \ b) = 1$，易见仅有$a = 71$，$b = 2$及$a = 11$，$b = 8$适合。但是$71 \cdot 0 + 2 \cdot 29 = 58$能被记录到。故$a = 71$，$b = 2$不合要求。再考察直线

$$11x + 8y = 58 \qquad (3)$$

上的格点。由

$$y = \frac{58 - 11x}{8} = 7 - x + \frac{2 - 3x}{8}$$

可以求得 (3) 的两相邻格点 $(6, \ -1)$ 及$(-2, \ 10)$ 分别位于IV，II两象限内，因此58不能被记录到。从而$a = 11$，$b = 8$是适合本题要求的唯一解。

A-6. 取$n=2$，由2^c为整数得知$c\geqslant 0$。

令$f(x)=x^c$. 在闭区间 $[u, u+1]$ 上应用拉格朗日中值公式，必有某个$\xi\in(u, u+1)$，使得

$$c\xi^{c-1}=(u+1)^c-u^c. \qquad (1)$$

当u为任意正整数时，(1) 的右边为正整数. 另一方面，若令$c\in(0,1)$，则可取充分大的u，使得

$$u^{c-1}<\frac{1}{c}\Longrightarrow c\xi^{c-1}<1.$$

这与(1) 矛盾. 因此，$c\notin(0,1)$.

若$c\in[k-1, k)$，k为大于1的整数. 再对$f(x)=x^c$在闭区间$[u,u+k]$上应用$f(x)$的k阶导数与k阶差分间的等量关系式

$$f^{(k)}(\xi)=\frac{\Delta f(u)}{h^k},$$

其中 $h=\dfrac{(u+k)-u}{k}=1$，$\xi\in(u,u+k)$，

可得 $$c(c-1)(c-2)\cdots(c-k+1)\xi^{c-k}=\Delta^k(u^c). \qquad (2)$$

当u为任意正整数时，(2)的右边为某个整数. 但若取充分大的u，由于$c-k<0$，故ξ^{c-k}可为任意小的正数. 这样，当$c\neq k-1$时，(2)就不能成立. 因此，必有$c=k-1$，即 c 为非负整数. (这时等式(2) 化为$0=0$.)

B-1. 根据给定的运算法则，我们有

$$\begin{aligned}x\circ y&=(x\circ y)\circ(x\circ y)=[(x\circ y)\circ x]\circ y=[(y\circ x)\circ x]\circ y\\&=[(x\circ x)\circ y]\circ y=(x\circ y)\circ y=(y\circ y)\circ x=y\circ x.\end{aligned}$$

即交换律成立. 据此以及题设的第二个运算法则，易知结合律成立：

$$(x\circ y)\circ z=(y\circ z)\circ x=x\circ(y\circ z).$$

B-2. 将给定的函数方程

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \tag{1}$$

中的x改写为$\frac{x-1}{x}$，并整理得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}. \tag{2}$$

再将(1)中的x改写为$\frac{-1}{x-1}$，并整理得

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1}. \tag{3}$$

由(1)+(3)-(2)得　$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$.

因此有　$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$.　(4)

由于(1)，(2)，(3)，(4)彼此等价，从而(4)是(1)的唯一解。

B-3. 设经过了时间$t \geqslant T$，甲行驶的圈数为$[t]$，乙行驶的圈数为$[t-T]$. 问题是需求出满足等式

$$[t]=2[t-T] \tag{1}$$

中t的变化区间的长

令$T=k+\delta$，k为整数，$0 \leqslant \delta < 1$，

$t=m+\varepsilon$，m为整数，$0 \leqslant \varepsilon < 1$.

则m与k应满足下列等式

$$[t]=m=2[t-T]=2[m-k+\varepsilon-\delta].$$

由此可知，当$1>\varepsilon \geqslant \delta > 0$时，

$$m=2(m-k) \Longrightarrow m=2k \Longrightarrow t=2k+\varepsilon.$$

因此，当$t \in [2k+\delta, 2k+1]$，即t的变化区间长为$1-\delta$时，等式(1)成立。

另一方面，当$1>\delta>\varepsilon\geqslant 0$时，

$$m=2(m-k-1)\Longrightarrow m=2k+2\Longrightarrow t=2k+2+\varepsilon.$$

因此，当$t\in[2k+2,\ 2k+2+\delta]$，即t的变化区间长为δ时，等式(1)成立。

综上所述，能使等式(1)成立的t的变化区间总长为

$$1-\delta+\delta=1.$$

B-4. 不妨认为已知的球面半径为1。令

$$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}=2a\ （常数）.$$

我们不考虑平凡情形及退化情形，故可认为

$$0<\overset{\frown}{AB}<\pi,\quad \overset{\frown}{AB}<2a<2\pi-\overset{\frown}{AB}.$$

若取球面直径AA'，BB'的另二个端A'，B'作为新焦点，则易知

$$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}=2a\Longleftrightarrow\overset{\frown}{PA'}+\overset{\frown}{PB'}=2\pi-2a.$$

亦即这是两个重合的球面椭圆．因为$\min(2a,\ 2\pi-2a)\leqslant\pi$，所以我们只须研究$2a\leqslant\pi$的情形即可．

设A，B位于赤道上，则赤道上必有球面椭圆的两个顶点V_1和V_2。易知$\overset{\frown}{V_1V_2}=2a$，且$\overset{\frown}{V_1V_2}$与$\overset{\frown}{AB}$有公共的中点$C$，称之为球面椭圆的中心．

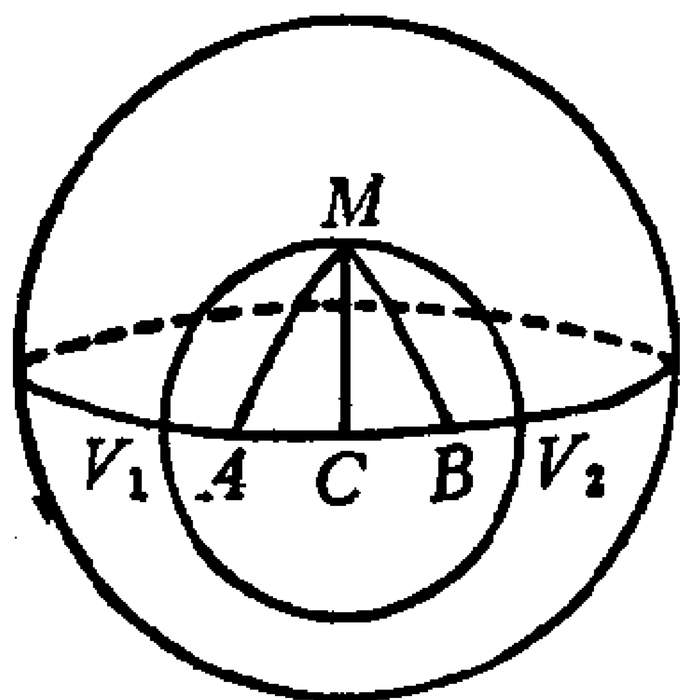


图96

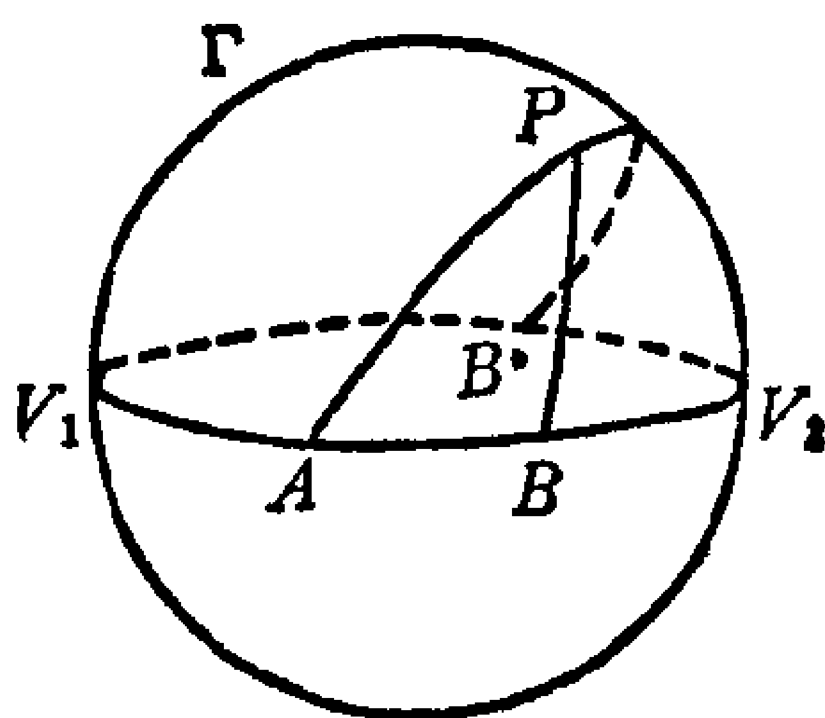


图97

我们来证明，当$2a<\pi$时，球面椭圆不可能是圆。

用反证法．假定球面椭圆是一个圆Γ(图96)，则易见Γ关于赤道平面对称．从而Γ所在平面与赤道平面垂直．由于顶点V_1，V_2位于这两个平面内，故V_1V_2是Γ的直径．而C在Γ所在平面内的投影即为Γ的圆心．令M为Γ上半圆弧$\overset{\frown}{V_1V_2}$的一个中点，则

$$\overset{\frown}{MA}+\overset{\frown}{MB}=2a=\overset{\frown}{V_1CV_2}=2\overset{\frown}{MC}.$$

$$\because\quad \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MB},\qquad \therefore\quad \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MC}=a<\frac{\pi}{2}.$$

但在球面三角形MCA中，C为直角．故必有$\overset{\frown}{MA}>\overset{\frown}{MC}$．这个矛盾表明，欲使球面椭圆变成圆，其必要条件为$2a=\pi$．

若$2a=\pi$，则V_1V_2是赤道的直径．我们可以证明，过北极N及V_1，V_2的球面大圆Γ，就是符合条件

$$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}=\pi \tag{1}$$

的球面椭圆．事实上，令B^*为B关于Γ所在平面的镜面反射点，则AB^*亦为赤道直径．(图97)过球面上任意一点P及A，B^*作大圆，则

$$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB^*}=\pi. \tag{2}$$

因此(1)$\Longleftrightarrow$(2)．亦即

$$\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}=\pi\Longleftrightarrow P\in\Gamma.$$

这就证明了Γ是符合条件(1)的球面椭圆．

上述结论表明，只有大圆才能成为球面椭圆．反之，对于任何一个球面大圆Γ，不妨将其看作是某个经线圈(仍如图97所示)，都可以成为一个球面椭圆．它的焦点A，B必位于赤道上．作垂直于Γ所在平面的球面直径CC'，则A，B只须与C(或C')保持相等距离即可．当A，C，B(或A，C'，B)重合时，即为退化情形；当

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = \frac{\pi}{2}$$

时，即为平凡情形。

B-5. 令$z = x + iy$，则给定的方程组可化为

$$z'' - iz' + 6z = 0.$$

解此常系数方程得

$$z(t) = c_1 e^{3it} + c_2 e^{-2it}. \tag{1}$$

由给定的初值条件可得$z'(0) = 0$，或$3ic_1 - 2ic_2 = 0$.

令$c_1 = 2A$，则$c_2 = 3A$，A为任一复常数．于是(1)化为

$$z(t) = 2Ae^{3it} + 3Ae^{-2it}. \tag{2}$$

再令$A = Re^{i\alpha}$，并将复平面坐标轴旋转α，(2) 即化为

$$Z(t) = 2Re^{it} + 3Re^{-2it}. \tag{3}$$

它的实直角坐标表达式是：

$$X(t) = 2R\cos 3t + 3R\cos 2t, \tag{4}$$

$$Y(t) = 2R\sin 3t + 3R\sin 2t.$$

其轨迹为定圆半径为$5R$的圆内旋轮线。

圆内旋轮线的标准方程是

$$x(t) = (a-b)\cos t + b\cos\frac{a-b}{b}t,$$

$$y(t) = (a-b)\sin t + b\sin\frac{a-b}{b}t. \tag{5}$$

将(4)与(5)比较即知：

在(4)中，若令$t = \frac{t_1}{3}$，则得动圆的半径等于$3R$；

若令$t = -\frac{t_2}{2}$则得动圆的半径等于$2R$。

B-6. 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{x} \frac{\delta(n)}{n}$.

由　$\delta(2m+1)=2m+1$，即知$S(2x+1)=S(2x)+1$。

注意 $\delta(2m)=\delta(m)$，并将$S(2x)$的和式按项的奇偶性分部相加即得

$$S(2x)=\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(x)+x.$$

再记　$F(x)=S(x)-\frac{2}{3}x$，则上式即化为

$$F(2x)=\frac{1}{2}F(x)\text{ 及 }F(2x+1)=F(2x)+\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

下面用数学归纳证明：

$$0<F(x)<\frac{2}{3}.$$

当 $x=1$时，$F(1)=S(1)-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，命题正确。

假定对于 $x\leqslant k$(某个自然数)时，$0<F(k)<\frac{2}{3}$。则由(1)可得

$$F(k+1)=\begin{cases}F(k)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{3},k\text{为偶数;}\\ \frac{1}{2}F\left(\frac{k+1}{2}\right), \qquad k\text{为奇数.}\end{cases} \qquad (2)$$

由归纳假定即知$0<F(k+1)<\frac{2}{3}$。因此命题对任意正整数 x 都正确。

事实上，我们证明了

$$0<\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}-\frac{2}{3}x<\frac{2}{3}.$$

这比求证的不等式更为精确。

第三十三届（1972年12月2日）

上午试题

A-1。求证任何四个相邻的二项式系数

$$\binom{n}{r},\ \binom{n}{r+1},\ \binom{n}{r+2},\ \binom{n}{r+3}$$

不能构成等差数列。其中n，r为正整数，$n\geqslant r+3$。

A-2。设$*$是集S上的一种二元运算，且$\forall x,y\in S$，$*$满足下列运算法则：

$$x*(x*y)=y, \qquad (1)$$

$$(y*x)*x=y. \qquad (2)$$

求证$*$符合交换律，但不符合结合律。

A-3。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 存在，则称此极限为序列$\{x_n\}$的C极限。设$f(x)$是定义在$[0,1]$上的实函数。$\forall\{x_n\}\subset[0,1]$，若$\{x_n\}$有$C$极限时，$\{f(x_n)\}$也有$C$极限，则称$f(x)$是$[0,1]$上的一个上连续函数。试求出$[0,1]$上的全体上连续函数。

A-4。求证内切于一给定正方形的所有椭圆中，以圆的周长为最大。

A-5。设n为大于1的整数，求证2^n-1不能被n整除。

A-6。设$f(x)$是$[0,1]$上的可积函数，且有

$$\int_0^1 x^k f(x)dx=0,\quad k=0,1,2,\ \cdots,\ n-1,$$

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1.$$

求证不等式 $|f(x)| \geqslant 2^n(n+1)$ 在某个具有正测度的集内成立。

下午试题

B-1. 求证无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x-1)^{2n}}{n!}$

的幂级数展开式中，不会有三个相邻的项的系数都等于零.

B-2. 一质点在直线上从静止状态开始运动，至获得末速度 v_0 时，运行距离为 s_0。已知质点在整个运动过程中，加速度都没有增加，试确定此质点运行时间的最大值。

B-3. 设 A，B 是一个群的两元素。已知

$$ABA = BA^2B, \quad A^3 = 1,$$

且对某个正整数 n，有 $B^{2n-1} = 1$。求证：$B = 1$。

B-4. 设 n 是大于 1 的整数，求证存在一个三元整系数多项式 $P(x,y,z)$，使得

$$P(x^n, x^{n+1}, x + x^{n+2}) \equiv x.$$

B-5. 设空间四边形的两双对角分别相等，求证它的两双对边也分别相等。

B-6. 设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 是一正整数集．求证多项式

$$1 + z^{n_1} + z^{n_2} + \cdots + z^{n_k}$$

在圆 $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 内没有零点。

解答

A-1. 假定存在正整数n，$r(n\geqslant r+3)$能使

$$\binom{n}{r},\ \binom{n}{r+1},\ \binom{n}{r+2},\ \binom{n}{r+3} \tag{1}$$

成等差数列，则由等差中项公式可得

$$\begin{aligned} 2\binom{n}{r+1}&=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+2},\\ 2\binom{n}{r+2}&=\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r+3}. \end{aligned} \tag{2}$$

将(2)化简并整理得

$$\begin{aligned} &n^2-(4r+5)n+4r(r+2)+2=0,\\ &n^2-(4r+9)n+4(r+1)(r+3)+2=0. \end{aligned} \tag{3}$$

将(3)的两式相减并整理得 $n=2r+3$。此等式即为(1) 构成等差数列的必要条件。

因此，所求的四个相邻的二项式系数应为

$$\binom{2r+3}{r},\ \binom{2r+3}{r+1},\ \binom{2r+3}{+2},\ \binom{2r+3}{r+3}. \tag{4}$$

但由 $$\binom{2r+3}{r}=\binom{2r+3}{r+3}<\binom{2r+3}{r+1}=\binom{2r+3}{r+2}$$

可知(4)不是等差数列。从而(1)不可能构成等差数列。

A-2. 在(2) 中将x，y互换即得

$$(x*y)*y=x. \tag{3}$$

于是由(3)与(1)可得

$$(x*y)*x=(x*y)*[(x*y)*y]=y. \tag{4}$$

再由(4)与(2)可得

$$y*x=[(x*y)*x]*x=x*y.$$

因此 * 符合交换律.

为了举出 * 不符合结合律的反例，令

$$S=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ \cdots\}.$$

$\forall x,\ y\in S$，定义 $x*y=-x-y$. (5)

于是有 $x*(x*y)=x*(-x-y)=-x-(-x-y)=y$;

$$(y*x)*x=(-y-x)*x=-(-y-x)-x=y.$$

因此定义(5)适合运算法则(1)和(2).

$\forall x,y,z\in S$，我们有

$$x*(y*z)=x*(-y-z)=-x+y+z;$$

$$(x*y)*z=(-x-y)*z=x+y-z.$$

因此 * 不符合结合律.

A-3. 我们可以证明：当且仅当

$$f(x)=Ax+B\ \ (A,B\text{为任意常数})$$

时，$f(x)$才是上连续函数.

由定义易知充分性成立. 下面分三步来证明必要性：

(i) $f(x)$若为上连续函数，则$f(x)$必为连续函数. 否则，假定x_0是$f(x)$的一个间断点. 若x_0是可去间断点，则只须补充定义$f(x_0)$即可使$f(x)$在$x=x_0$处连续. 故不妨认为x_0是$f(x)$的非可去间断点. 于是必有序列$\{x_n\}\subset(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

由施笃兹 (O.Storz) 定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_0$，即$\{x_n\}$有$C$极限. 但是$\{f(x_n)\}$无$C$极限，因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在. 这与$f(x)$是上连续函数矛盾. 命题(i)证毕.

(ii) $f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内若是上连续函数，则$\forall a,b$(实

数），恒有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$。

证明： 记$c=\frac{a+b}{2}$，假定存在a，b使得

$$f(c)\ne\frac{1}{2}(f(a)+f(b)). \tag{1}$$

考察序列

$$\{x_n\}=\{\underbrace{a,b}_{2^1},\underbrace{c,c,c,c}_{2^2},\underbrace{a,b,\cdots,a,b}_{2^3},\underbrace{c,\cdots,c}_{2^4},a,b,\cdots\},$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=c$，即$\{x_n\}$有$C$极限。但由(1)可以断定$\{f(x_n)\}$无$C$极限。这与$f(x)$是上连续函数矛盾。命题(ii)证毕。

(iii) 符合上述(i)，(ii)两条结论的函数$f(x)$必为线性函数$f(x)=Ax+B$。

$$\because\quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

$$\therefore\quad f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(0),$$

$$\Longrightarrow\quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}f(a+b)+\frac{1}{2}f(0),$$

$$\Longrightarrow\quad f(a+b)=f(a)+f(b)-f(0),$$

$$\Longrightarrow\quad f(a_1+a_2+a_3)=f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)-2f(0).$$

应用数学归纳法可得

$$f(a_1+\cdots+a_n)=f(a_1)+\cdots+f(a_n)-(n-1)f(0).$$

$$\Longrightarrow\quad f(na)=nf(a)-(n-1)f(0),$$

$$\Longrightarrow\quad f(a)=nf\left(\frac{a}{n}\right)-(n-1)f(0),$$

$$\Longrightarrow \quad f\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{1}{n}f(a)+\frac{n-1}{n}f(0),$$

$$\Longrightarrow \quad f\left(\frac{m}{n}a\right)=\frac{1}{n}f(ma)+\frac{n-1}{n}f(0)$$

$$=\frac{1}{n}(mf(a)-(m-1)f(0))+\frac{n-1}{n}f(0)$$

$$=\frac{m}{n}f(a)+\frac{n-m}{n}f(0),$$

$$=\frac{m}{n}(f(a)-f(0))+f(0),\ m \text{ 为任意自然数.}$$

另一方面，

$$\because \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

$$\therefore \quad 2f(0)=f(a)+f(-a),$$

$$\Longrightarrow \quad f\left(-\frac{m}{n}a\right)=2f(0)-f\left(\frac{m}{n}a\right)$$

$$=-\frac{m}{n}(f(a)-f(0))+f(0).$$

令 $a=1$，并记$f(0)=B$，$f(1)-f(0)=A$，$\frac{m}{n}=r$，则得

$$f(r)=Ar+B.$$

其中r为任意有理数，A,B为任意常数.

再由$f(x)$的连续性可以推知，对任一无理数a，恒有

$$f(a)=Aa+B.$$

这就证明了上连续函数必为线性函数

$$f(x)=Ax+B.$$

其中 $x\in(-\infty,\ +\infty)$.

A-4. 取四顶点 $(\pm\sqrt{2}R,\ 0)$，$(0,\ \pm\sqrt{2}R)$，作边长为$2R$的正方形。令椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (0\leqslant b\leqslant a\leqslant\sqrt{2}R) \qquad (1)$$

与正方形的四边$\pm x\pm y=\sqrt{2}R$相切，则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{2}R\pm x)^2}{b^2}=1$$

有重根。由它的判别式等于零可得

$$a^2+b^2=2R^2.$$

此等式表明，当a从R增加到$\sqrt{2}R$时，b从R减少到零。对应地，正方形的内切椭圆由圆变化到退化情形—$2a=2\sqrt{2}R$，$2b=0$。

将(1)写成参数形式

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

设此椭圆的周长为$4L$，则我们有

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}a^2(1-\cos 2t)+\frac{1}{2}b^2(1+\cos 2t)}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t}\,dt.$$

其中$c^2=a^2-b^2$。对后一积分式作变量代换$t=\frac{\pi}{2}-t_1$，化简即得（t_1仍记为t）：

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t}+\sqrt{R^2+\frac{1}{2}c^2\cos 2t}\right)dt. \qquad (2)$$

设 $u\in[o, p]$，作函数

$$f(u)=\sqrt{p-u}+\sqrt{p+u}.$$

∵ $$f'(u)=-\frac{1}{\sqrt{p-u}}+\frac{1}{\sqrt{p+u}}<0,$$

∴ $f(u)$在$[0, p]$上是减函数。

由此可知，(2) 右边的被积函数当$c=0$时取最大值。这就证明了内切于正方形的一切椭圆中，以圆的周长为最大。

上面我们直观地认为正方形的内切椭圆的长短轴必位于该正方形的对角线上。现对此事实证明如下：

在u-v平面上作出$u=\pm R$，$v=\pm R$围成的正方形。设其有一内切椭圆的方程为

$$Au^2+Buv+Cv^2+Du+Ev+F=0. \tag{3}$$

其中 $$4AC-B^2>0. \tag{4}$$

因为$u=R$ 是(3) 的切线，所以

$$Cv^2+(BR+E)v+(AR^2+DR+F)=0$$

应有重根。由此可得

$$(BR+E)^2-4C(AR^2+DR+F)=0. \tag{5}$$

同理可得 $$(-BR+E)^2-4C(AR^2-DR+F)=0. \tag{6}$$

$$(BR+D)^2-4A(CR^2+ER+F)=0 \tag{7}$$

$$(-BR+D)^2-4A(CR^2-ER+F)=0 \tag{8}$$

由(5)-(6) 及(7)-(8) 分别消去$R(\neq 0)$得

$$\begin{cases}-2CD+BE=0,\\ BD-2AE=0.\end{cases} \tag{9}$$

由(4) 知

$$\begin{vmatrix}-2C & B\\ B & -2A\end{vmatrix}\neq 0,$$

故(9) 关于D，E仅有零解$D=E=0$。于是(5) 和(7) 分别化为

$$\begin{cases} B^2R^2-4ACR^2-4CF=0, \\ B^2R^2-4ACR^2-4AF=0. \end{cases} \tag{10}$$

若$F=0$，则(10) 即化为$B^2-4AC=0$。这与(4) 矛盾. 故$F\neq 0$。于是从(10) 推得$A=C$。而(3)，(4) 化为

$$Au^2+Buv+Av^2+F=0,\ \ 4A^2-B^2>0.$$

此椭圆的长短轴显然位于$u\pm v=0$上，亦即位于已知正方形的二对角线上。

A-5. 假定对于某个$n>1$，使得$n|(2^n-1)$，则n必为奇数。设p为n的最小质因数（n为质数时，$p=n$），由欧拉定理知

$$2^{\varphi(p)}=2^{p-1}\equiv 1 \qquad (\bmod\ p). \tag{1}$$

令整数q满足不等式$0<n-(p-1)q<p-1$，则$q=\left[\dfrac{n}{p-1}\right]$.

对(1) 应用同余式性质可得

$$2^{q(p-1)}\equiv 1 \qquad (\bmod\ p). \tag{2}$$

又由$n|(2^n-1)$可得

$$2^n\equiv 1 \qquad (\bmod\ p). \tag{3}$$

记$\lambda_1=n-q(p-1)$，对(2)，(3) 应用同余式性质可推得

$$2^{\lambda_1}\equiv 1 \qquad (\bmod\ p). \tag{4}$$

因为$0<\lambda_1<p-1$，所以$\lambda_1\nmid p\Longrightarrow\lambda_1\nmid n$。 令

$$n=q_1\lambda_1+\lambda_2,$$

其中q_1为整数，且$0<\lambda_2<\lambda_1$。由(3)，(4)可以推得

$$2^{\lambda_2}\equiv 1 \qquad (\bmod\ p).$$

依此类推即可求得一系列

$$2^{\lambda_k}\equiv 1 \qquad (\bmod\ p), \qquad K=1,\ 2,\ \cdots,\ t \tag{5}$$

其中诸λ_K满足不等式 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_t>0$.

由于无限递降的结果，最后必有$\lambda_t=1$。这时(5) 式显然不能成立。因此$n\nmid(2^n-1)$。

A-6. 根据题设条件并应用二项式定理可得

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx=1.$$

假定除零测度集外，恒有

$$|f(x)|<2^n(n+1),$$

$$\Longrightarrow \quad 1=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx<2^n(n+1)\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n dx=1.$$

这一矛盾表明，在某个正测度集上，必有

$$|f(x)|\geqslant 2^n(n+1).$$

B-1. 我们来证明下述结论更强的命题：

设$p(x)$是一任意三次多项式，则$f(x)=e^{p(x)}$的幂级数展开式中，不会有三个相邻的项的系数都等于零。

证明： 应用莱布尼茨公式可得

$$f^{(k+1)}=f^{(k)}p'+\binom{k}{1}f^{(k-1)}p''+\binom{k}{2}f^{(k-2)}p''',$$

$$k\geqslant 2. \qquad (1)$$

假定存在某个实数或复数x_0，使得

$$f^{(k-2)}(x_0)=f^{(k-1)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)=0,$$

则由(1) 可推得，对于$tk=+2, k+3$，…，恒有 $f^{(t)}(x_0)=0$. 于是$f(x)$成为多项式．这不可能，故命题获证．

B-2. 依题意知$v(0)=0$，$v(t_0)=v_0$，$a=v'(t)$ 非增．因此，当$v_0>0$时，函数$v=v(t)$的图象从原点出发，下凹，上升到$(t_0, v(t_0))$终止。

t从零开始变化到t_0时刻止，质点运动的距离 S_0可由图中曲线$v=v(t)$，x轴及直线$t=t_0$包围的曲边三角形面积表示。s_0显然不小于以 (0, 0)，$(t_0, 0)$，(t_0, v_0)为顶点的直角三角形面积：

$$\frac{1}{2}v_0t_0\leqslant s_0\Longrightarrow t_0\leqslant\frac{2s_0}{v_0}.$$

取$t_0=\dfrac{2s_0}{v_0}$即得质点运动的最长时间。这时$v=v(t)$的图象即为一线段：

$$v(t)=\frac{v_0^{\ 2}}{2s_0}t,\ 0\leqslant t\leqslant t_0.$$

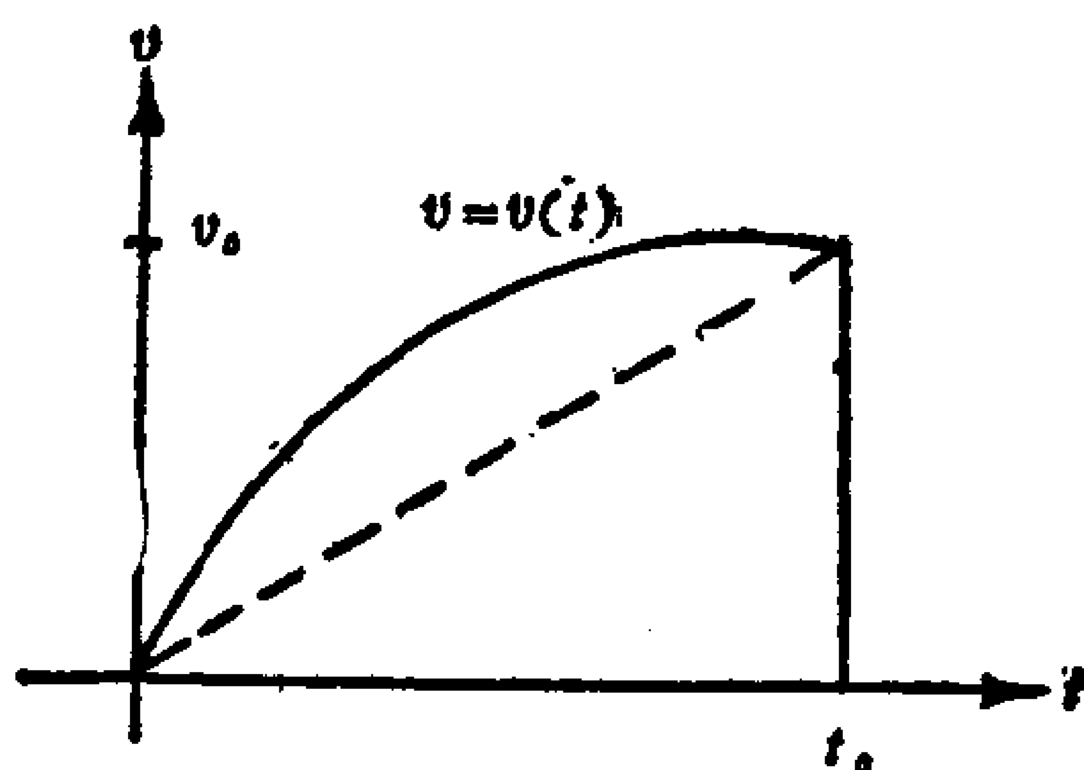


图98

若$v_0\leqslant0$，则t_0不能取得极大值。例如，取s关于t的运动方程为

$$s(t)=s_0\left[(1+\varepsilon)\left(\frac{t}{t_0}\right)^2-(2+\varepsilon)\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right],$$

$$0\leqslant t\leqslant t_0.$$

当$\varepsilon=0$时，$v_0=\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}=0$；当$\varepsilon>1$时，$v_0<0$。这两种情形都完全符合题设条件，但$t_0$可取任意正值。

B-3. 我们有

$$ABA=BA^2B=BA^2(AA^{-1})B=BA^{-1}B,$$

$$\Longrightarrow AB^2=ABA\cdot A^{-1}B=BA^{-1}BA^{-1}B=BA^{-1}\cdot ABA=B^2A.$$

应用数学归纳法即可推得$AB^{2r}=B^{2r}A$，其中r为任意正整数。再利用题设条件即得

$$AB=AB^{2^n}=B^{2^n}A=BA.$$

因此A，B符合交换律。于是

$$ABA=BA^2B\Longrightarrow A^2B=A^2B^2\Longrightarrow B=B^2\Longrightarrow B=1.$$

B-4. 令$x=t^n$，$y=t^{n+1}$，$z=t+t^{n+2}$，则我们有

$$z=t+t^{n+2}\qquad zy=t^{n+2}+t^{2n+3}$$

$$zy^2=t^{2n+3}+t^{3n+4}\cdots zy^{n-2}=t^{n^2-n-1}+t^{n^2}.$$

将此$n-1$个等式交替乘以$+1$与-1，相加得

$$z(1-y+y^2-\cdots+(-1)^{n-2}y^{n-2})=t+(-1)^{n-2}t^{n^2}$$
$$=t+(-1)^n x^n.$$

据此，若定义整系数三元多项式

$$p(x,y,z)=z\left[\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i y^i\right]+(-1)^{n-1}x^n,$$

显然可得 $p(t^n,t^{n+1},t+t^{n+2})\equiv t \Longleftrightarrow p(x^n,x^{n+1},x+x^{n+2})\equiv x$.

B-5. 设$ABCD$为给定的空间四边形：

$$\angle ABC=\angle ADC=\alpha,\ \angle BAD=\angle BCD=\beta.$$

令 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$AC=x$，$BD=y$. 对 $\triangle ABC$与$\triangle ADC$

应用余弦定理可得

$$2\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-x^2}{ab}=\frac{c^2+d^2-x^2}{cd}.\Longrightarrow$$

$$(ab-cd)x^2=(bc-ad)(ac-bd). \qquad (1)$$

同理可得 $(ad-bc)y^2=(cd-ab)(ac-bd)$. (2)

由(1)，(2)可知，若

$ab-cd=0$，则 $ad-bc=0$

$\Longrightarrow$ $a=c$，$b=d$.

因此本题论断正确. 若

$ab-cd\neq0$，则 $ad-bc\neq0$. $ac-bd\neq0$

于是由(1)，(2)可以推得

$x^2y^2=(ac-bd)^2$. $\Longrightarrow$

(3) 或 $xy+bd-ac=0$，或 $xy+ac-bd=0$.

根据（空间）托勒密定理，由等式(3) 可知A，B，C，D四点共圆，这与题设条件矛盾. 因此本题结论正确.

B-6. 设多项式 $p(z)=1+z^{n_1}+z^{n_2}+\cdots+z^{n_k}$，则有理函

数$\frac{1}{1-z}-2p(z)$的幂级数展开式的首项系数为-1，其余各项系数或为$+1$，或为-1。因此我们有

$$\left|1+\frac{1}{1-z}-2p(z)\right|\leqslant|z|+|z|^2+\cdots=\frac{|z|}{1-|z|}.$$

从而推得 $$|2p(z)|\geqslant\left|1-\frac{1}{1-z}\right|-\left|1+\frac{1}{1-z}-2p(z)\right|$$

$$\geqslant1+\frac{1}{1+|z|}-\frac{|z|}{1-|z|}=2\cdot\frac{1-|z|-|z|^2}{1-|z|^2}.$$

当 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，我们有

$$1-|z|^2>1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2>0,$$

$$1-|z|-|z|^2>1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=0.$$

因此$|2p(z)|>0$，亦即$p(z)$在圆$|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$内无零点。

第三十四届（1973年11月1日）

上午试题

A-1. (i)设ABC为任意三角形．点X、Y、Z分别在边BC，CA，AB上．若距离$\overline{BX}\leqslant\overline{XC}$，$\overline{CY}\leqslant\overline{YA}$，$\overline{AZ}\leqslant\overline{ZB}$．求证$\triangle XYZ$的面积$\geqslant\frac{1}{4}\triangle ABC$的面积．(ii) 设$ABC$为任意三角形，

点X、Y、Z分别在边BC,CA,AB上(但对距离的比,如$\overline{BX}/\overline{XC}$ 不作任何假定),用(i)或另法证明：三个三角形$\triangle AZY$,$\triangle BXZ$,$\triangle CYX$中有一个三角形的面积$\leqslant\triangle XYZ$的面积.

A-2. 考虑一个通项为$\pm(1/n)$ 的无穷级数，其$\pm$符号以八项为一段的周期重复.[有2^8种可能的范式，例如其中两种

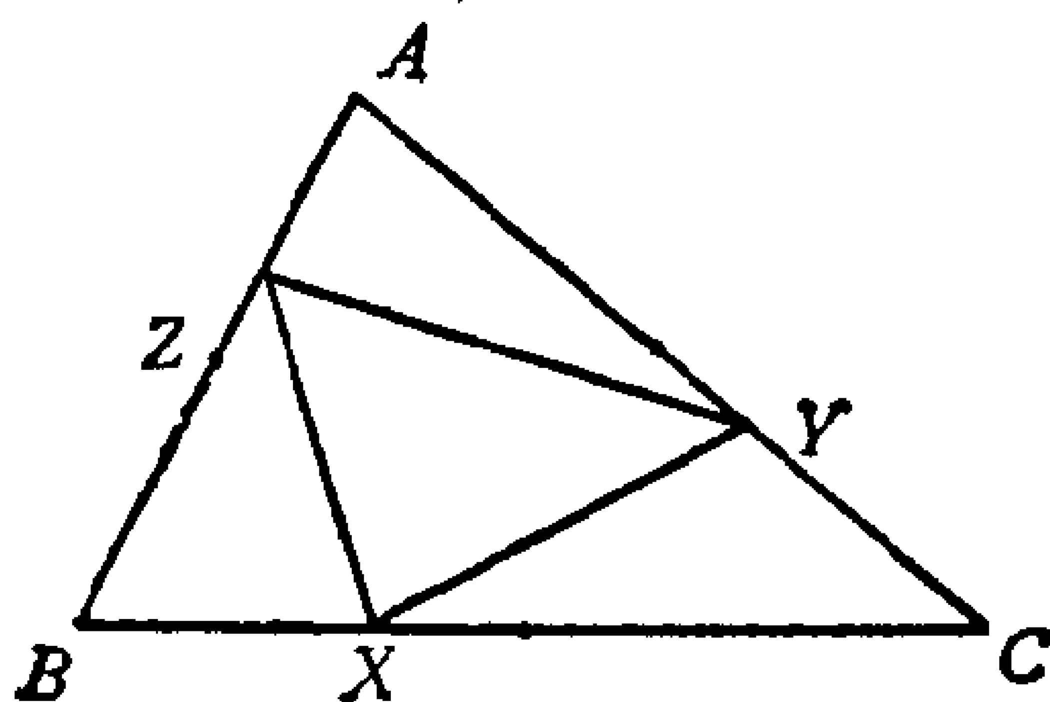


图99

$$+ + - - - - + +$$

$$+ - - - + - - - .$$

对应第一种，级数为

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$

$$-\frac{1}{12}-\cdots.]$$

(i) 证明级数为条件收敛的一个充分条件是，在每段八项里有四个“+”号和四个“-”号. (ii) 问上述充分条件是否亦为必要条件.

A-3. 设n是一个固定的正整数，$b(n)$是

$$k+\frac{n}{k}$$

关于所有正整数k的最小值. 证明$b(n)$与$\sqrt{4n+1}$ 有相同的整数部分. [实数的整数部分是不超过它的最大整数].

A-4. 函数 $f(x)=2^x-1-x^2$ 在实数轴上有多少个零点.

A-5. 在三维空间内一个质点满足方程组

$$\frac{dx}{dt}=yz \qquad \frac{dy}{dt}=zx \qquad \frac{dz}{dt}=xy$$

[这里$x(t)$，$y(t)$,$z(t)$ 是实变量t的实值函数]。证明：(i) 若 $x(0)$，$y(0)$，$z(0)$ 中有两个为零则质点不动；(ii) 若 $x(0)=y(0)=1$ $z(0)=0$，则解为

$$x=\sec t,\qquad y=\sec t\qquad z=\operatorname{tg} t$$

这里如果 $x(0)=y(0)=1$，$z(0)=-1$ 则

$$x=1/(t+1)\qquad y=1/(t+1)\qquad z=-1/(t+1)$$

(iii) 若 $x(0)$，$y(0)$，$z(0)$ 之中至少有两个不为零；则质点或者在将来的某个有限时间趋向无穷，或者在过去的某个有限时间由无穷返回。

A-6. 证明在欧氏平面上不能有这样七条不同的直线，这些直线的交点中，至少有六个点每点恰为三条直线的交点，并且至少有四个点每点恰为两条直线的交点。

下午试题

B-1. 设整数集合 a_1，a_2，…，a_{2n+1}，如果去掉其中任意一个，剩下的分为两个各含n 个整数其和相等的集合．证明 $a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$。

B-2. 设$z=x+iy$ 是一个复数，x与y是有理数而$|z|=1$。求证对于每个整数n，$|z^{2n}-1|$是有理数。

B-3. 设整数$p>1$，x是满足$0\leqslant x\leqslant p$ 的所有整数，使得二次三项式x^2-x+p 是素数．[例如 $p=5$与$p=41$就有这种性质]．证明存在唯一的整数组a,b,c满足

$$b^2-4ac=1-4p,\ 0<a\leqslant c,\ -a\leqslant b<a.$$

B-4. (i)设函数f在[0,1]上有连续导数满足$0<f'(x)\leqslant 1$。并且 $f(0)=0$。求证

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geqslant \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

(ii) 作出一个使上式等号成立的例子。

B-5. (i) 设z是二次方程

$$az^2+bz+c=0$$

的一个根。n为正整数。求证z能表示为z^n，a，b，c 的有理函数。

(ii) 用(i) 或另法将x表示为x^3与$x+(1/x)$ 的有理函数。

B-6. 在域$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$上

(i) 证明$\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta$ 在$\pi/3$与$4\pi/3$有极大值（因而在$2\pi/3$与$5\pi/3$有极小值）。

(ii) 证明

$$|\sin^2\theta\{\sin^3(2\theta)\cdot\sin^3(4\theta)\cdots\sin^3(2^{n-1}\theta)\}\sin(2^n\theta)|$$ 在$\theta=\pi/3$有极大值。

(iii) 证不等式

$$\sin^2\theta\cdot\sin^2(2\theta)\cdot\sin^2(4\theta)\cdots\sin^2(2^n\theta)\leqslant(3/4)^n.$$

解答

A-1. (i) 若 X，Y，Z 是各边中点，则 $\triangle XYZ$ 的面积为$\triangle ABC$面积的四分之一。只要$\overline{BX}\leqslant\overline{XC}$，$\overline{CY}\leqslant\overline{YA}$，与$\overline{AZ}\leqslant\overline{ZB}$，将$X$，$Y$，$Z$中的一点移到它所在边的中点，另外两点不动时，$\triangle XYZ$的面积不增。因为这时$\triangle XYZ$固定的一边上的高减少或不变。(ii) 在 (i) 的假定下，位于三个角的三个小三角形的面积的和不大于整个面积的四分之三，于是它们之中必有一个的面积小于$\triangle XYZ$的面积。所有其他情况与$\overline{XC}<\overline{BX}$与$\overline{CY}<\overline{YA}$的情形有相同的结果。考虑边 XY 上的高即可得知 $\triangle CXY$有比

$\triangle XYZ$小的面积。

A-2. 条件是充要的。设 $u_n=\pm\frac{1}{n}$，$S_n=u_1+\cdots+u_n$。因为当$n\to\infty$时$u_n\to 0$。当且仅当$\{S_{8m}\}$收敛$\{S_n\}$收敛。由于

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$$

$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，而$\sum\frac{1}{n}$发散。证得每段八项里有四个"+"号与四个"−"号的序列$\{S_{8m}\}$。正负号配对成四个收敛序列的逐项和。故$\{S_{8m}\}$收敛，否则作为一个收敛序列与一个发散序列的和而发散。

A-3. 令 $c(n)=\sqrt{4n+1}$，$[x]$表示x的最大整数部分。则要证明$[b(n)]=[c(n)]$。设 $k(n)$ 是使得 $k+\frac{n}{k}$为最小的k值，则

$$\begin{aligned}b(n-1)&\leqslant k(n)+\{(n-1)/k(n)\}\\&<k(n)+\{n/k(n)\}=b(n).\end{aligned}$$

即 $b(n-1)<b(n)$。令m是一个正整数，则

$$b(m^2)=2m \qquad b(m^2+m)=2m+1 \tag{I}$$

由(I)与$b(n)$是严格增加的，得

$$\begin{aligned}&[b(n)]=2m && \text{当}m^2\leqslant n<m^2+m\\&[b(n)]=2m+1 && \text{当}m^2+m\leqslant n<(m+1)^2.\end{aligned} \tag{II}$$

另一方面，$c(n)$也是一个增函数，并且

$$c(m^2-1)=\sqrt{4m^2-3}<2m,$$

$$c(m^2)=\sqrt{4m^2+1}>2m,$$

$$c(m^2+m)=\sqrt{4m^2+4m+1}=2m+1,$$

故用$[b(n)]$替换$[c(n)]$时(II)仍然成立。

A-4. 有三0：，1与某个$x>1$. 前两个显然. 后面$x>1$从$f(4)<0$与$f(5)>0$或当$x\to+\infty$时$f(x)\to+\infty$从$f'(1)<0$推得. 因为根据罗尔定理若f有四个零点则f'''有一个零点，但是$f'''(x)=(\log 2)^3 2^x\neq 0$，对所有的$x$，故没有更多的零点.

A-5. (i) 若$x(0)$，$y(0)$，$z(0)$中有两个为零，则$x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$. 由唯一性定理即得证（方程显然是"李普希兹"）.

(ii) 显然（它是(iii)的一个提示）.

(iii) 现将方程组写为对称的形式：

$$xx'=yy'=zz'=xyz.$$

于是$x^2-c_1=y^2-c_2=z^2-c_3$，c_i为常数. 不失一般性，设$c_1\geqslant c_2\geqslant c_3$并令$c_3=0$. 得$z^2\leqslant y^2\leqslant x^2$ 并且

$$z^2=x^2-c_1=y^2-c_2\qquad c_i\geqslant 0,$$

$$\frac{dz}{dt}=\pm\sqrt{(z^2+c_1)(z^2+c_2)}.$$

令时间t按照让$|z|$增加的方向变动（依赖z的符号与平方根前的±号）.

简言之，当$z(0)\geqslant 0$，且平方根前的符号为+，则让时间向正向变动. 因为

$$t=\int dz/\sqrt{(z^2+c_1)(z^2+c_2)}.$$

关于z的积分收敛，即存有限的时间t使得z可取无穷大.

A-6. 平面上任何两条不同的直线至多有一个交点，现共有$\binom{7}{2}=21$直线对. 一个三重交点算作三对不同的直线的交点. 一个简单交点算作一对直线的交点，故由$6\cdot 3+4\cdot 1=22>21$得出矛盾.

B-1. 所有a_i一定有以下性质：无论去掉那个a_i，剩下的$2n$

个整数的和总是偶数．一个类似的论断它们都是同余的（mod 4）。并且每个a_i能成立的这种性质对于整数$a_i/2$（a_i是偶数）或对于整数$(a_i-1)/2$（a_i是奇数）仍然成立，继续用这种方法，对于每个k，所有的a_i是同余的（mod2^k）。这仅当它们相等时才成立。

B-2。设$z=e^{\theta i}$与$z^n=w=u+iv$（u与v是实数）。则
$|z^{2n}-1|=|w^2-1|=[(u^2-v^2-1)^2+(2uv)^2]^{1/2}=2|v|$，这里用到$u^2+v^2=1$。[$|z^{2n}-1|=2|\sin n\theta|$ 可由几种方法，利用一个等边三角形即易证出]。故当$x=\cos\theta$ $y=\sin\theta$为有理数时，$v=\sin n\theta$为有理数．当$n\geqslant 0$时，可从$(x+iy)^n=u+iv$或对于正弦与余弦的加法公式用归纳法来证明.而当$n<0$时可由$\sin(-\alpha)=\sin\alpha$来证明。

B-3。满足条件的一个三数组（a,b,c）是（1，-1，p）；还要证明它是唯一的解。因为$b^2\equiv 1(\bmod 4)$显然b一定是奇数。又$b^2=(-b)^2$记$|b|=2x-1$则由$b^2-4ac=1-4p$得$x^2-x+p=ac$。

若$0\leqslant x<p$，由假设可知ac是素数，则由$0<a\leqslant c$得$a=1$。从$-a\leqslant b<a$与b的奇性得$b=-1$。又由$1-4p=b^2-4ac=1-4c$得$c=p$。因为$x=(|b|+1)/2\geqslant 0$ 利用它来证 $x<p$。由$|b|\leqslant a\leqslant c$，$b^2-4ac=1-4p$和$p\geqslant 2$，利用

$$3a^2=4a^2-a^2\leqslant 4ac-b^2=4p-1$$

$$|b|\leqslant a\leqslant\sqrt{(4p-1)/3}\,.$$

$$x=(|b|+1)/2<\sqrt{p/3}+1/2<p$$

即得$x<p$。

B-4。(i) 即下面的定理。

定理：如果f在$[0,1]$上连续，$f(0)=0$。又在（0,1）内有

$0\leqslant f'(x)\leqslant 1$。则除了在$[0,1]$上或者$f(x)=x$或者$f(x)=0$外，有

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1 [f(x)]^3dx$$

证明：定义$G(t)=2\int_0^t f(x)dx-[f(t)]^2$，这里$t\in[0,1]$。则 $G(0)=0$与 $G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]\geqslant 0$，所以$G(t)\geqslant 0$并且 $f(t)G(t)\geqslant 0$。

定义 $F(t)=\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2-\int_0^t [f(x)]^3dx$这里 $t\in[0,1]$。则 $F(0)=0$ 与 $F'(t)=f(t)G(t)\geqslant 0$。所以 $F(t)\geqslant 0$，特别是$F(1)\geqslant 0$。

仅当对于所有的t，$f(t)G(t)=F'(t)=0$ 时，等号成立，那末对于某个k，在$[0,k]$上$f=0$且在$(k,1)$ 上$G'=0$时$f>0$.故仅当$k=0$或$k=1$时在 $(k,1)$ 上$f'=1$，因为否则 $f'(k)$ 同时有定义又没有定义。

(ii) 唯一的答案是$f(x)=x$。

B-5. (i) 令 $r=-b/a$与$s=-c/a$。由初始条件 $p_0=0$，$p_1=1$，$q_0=1$或 $q_1=0$ 以及递归公式 $p_n=rp_{n-1}+sp_{n-2}$ 与 $q_n=rq_{n-1}+sq_{n-2}$（当$n>1$）。定义r与s的多项式为p_n与q_n。利用$z^n=rz^{n-1}+sz^{n-2}$并由数学归纳法可证 $z^n=p_nz+q_n$ 并可证$p_n(r,s)$的所有系数是正的，那么

$$z=[z^n-q_n(-b/a-c/a)]p_n(-b/a,\ -c/a)$$

的右端分子分母同乘以a适当的幂，得

$$z=F(z^n,\ a,\ b,\ c)/G(a,\ b,\ c)$$

这里F与G是整系数多项式。因为$p_n(r,s)$ 的所有系数是正的。这对于$G(a,b,c)$ 同样正确。故 $G(a,b,c)$ 不恒等于零，因而

F/G为所求。

(ii) 令 $v=x+1/x$，则 $x^2-vx+1=0$。由(i)用x替换z得 $x^3=p_3x+q_3$，这里$p_3=v^2-1$，$q_3=-v$。故

$$x=(x^3-q_3)/p_3=(x^3+v)(v^2-1)。$$

B-6. (i) 用简单微分法。

(ii) 用归纳法。当$n=1$时即(i)

现在当$n+1$时的表达式与当n时的表达式的比为 $|\sin^2 2^n\theta\cdot\sin 2^{n+1}\theta|$。因为$\theta=\pi/3$得$2^n\theta\equiv 2\pi/3$或$4\pi/3(\bmod 2\pi)$。这比值当$\theta=\pi/3$时为极大。由归纳法，则全体表达式为极大。

(iii) 置$\theta=\pi/3$，(ii) 的表达式恰好等于 $(3/4)^{3n/2}$；它的2/3次幂为 $(3/4)^n$，这是极大值；通常(ii)的表达式的2/3次幂$\leqslant(3/4)^n$。为了从这里导出 (iii) 的表达式，增加两端因子$\sin\theta$与$\sin 2^n\theta$的幂次；因为$|\sin\theta|\leqslant 1$，这只能使乘积减少。

第三十五届（1974年11月7日）

上午试题

A-1. 如果一个正整数集合中没有三个数是两两互素则称之为“异质”的。问从1到16的整数的集合中“异质”的子集合的元素的最大数目是多少？

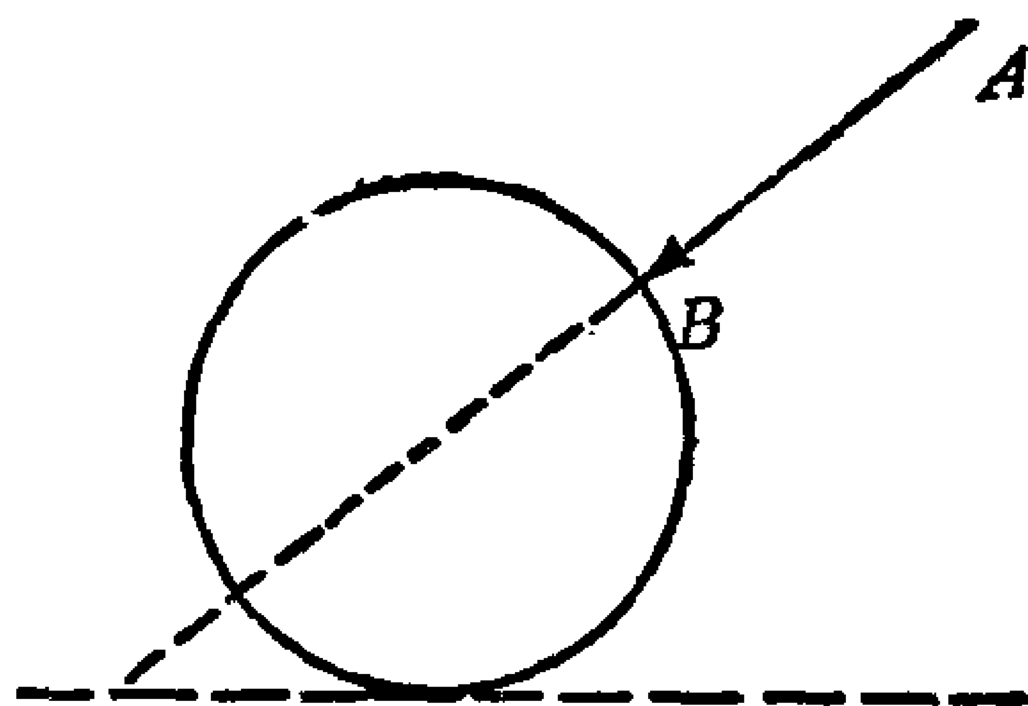


图100

起点A及圆是固定的；终点B可以沿着圆上变动。

A-2. 竖立于地面的平面内有一圆，并在此平面内有一点 A 位于圆外且高于圆的底

(最低的一点)．一质点从A出发沿倾斜直线无摩擦地滚下，直到与圆周相碰．问哪条直线能使得下降时间为最短？〔假定重力在这区域内为常数,不计相互作用等等〕．

A-3．根据下面的定理：

一个素数$p>2$当且仅当$p\equiv 1(mod 4)$时，能写为两个完全平方数的和(即$p=m^2+n^2$，m，n是整数)．

求出那些素数，使之能写为下列两种形式之一

$$(i)\ x^2+16y^2, \qquad (ii)\ 4x^2+4xy+5y^2.$$

这里x与y是整数，但不一定是正的．

A-4．将一个均匀的硬币上抛n次；用H表示出现正面的次数，用T表示出现反面的次数．求$|H-T|$的期望值？即求闭式

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k<n/2}(n-2k)\binom{n}{k}$$

的值.(问题中“闭式”意指不包含级数的形式．已知级数能化为仅仅包含二项式系数、n和2^n的有理函数,以及最大整数函数〔x〕的一个单一的项)．

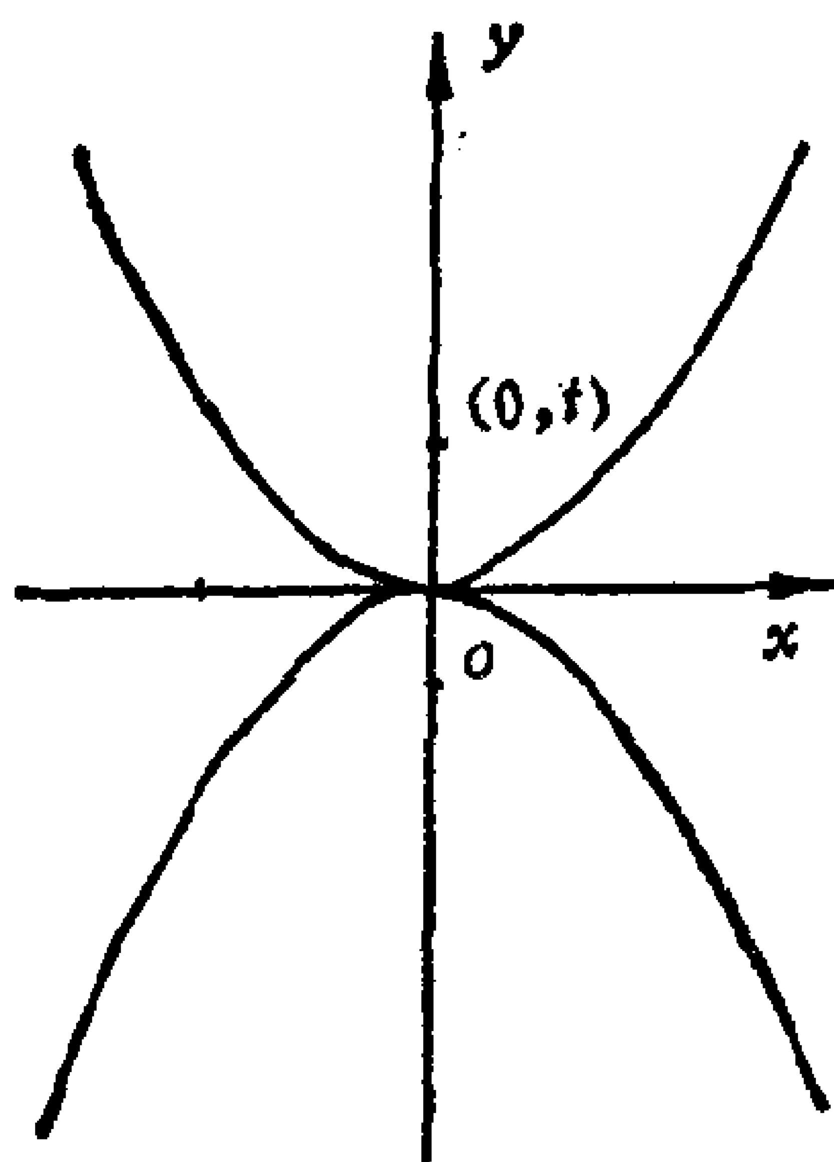


图101

A-5．两条抛物线$y=x^2$与$y=-x^2$彼此相切．(它们分别有焦点(0,1/4)与(0,-1/4),分别有准线$y=-1/4$与$y=1/4$)．上面的抛物线无滑动地围绕下面固定的抛物线滚动．求动的抛物线的焦点的轨迹，(0,1/4)是动的焦点的初始位置．

A-6．对于每个整数x，多项式$(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$的值显然能被n整除．已知n，令$k=k(n)$是首一整多项式(即

首项系数为1其余系数为整数)。

$$f(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$$

中，使得$f(x)$的值对于每一个整数x都能被n整除的最低次数求n与$k=k(n)$的关系式。并求对应于$n=1,000,000$。的k的值。

下午试题

B-1. 在圆周$x^2+y^2=1$上,有哪些位置(不一定不同)的五个点$p_1,p_2,\cdots p_5$，使得矩离的和

$$\sum_{i<j}d(p_i,p_j)$$

为最大？(这里$d(p,q)$表示点p与q之间的直线距离)。

B-2. 设$y(x)$是实变量x的一个连续可微的实值函数，证明若当$x\to+\infty$时，$(y')^2+y^3\to0$，则当$x\to+\infty$时$y(x)$与$y'(x)\to0$。

B-3. 求证若a是使得

$$\cos\pi a=\frac{1}{3}$$

的实数，则α是无理数(这里角πa用弧度制)。

B-4. 定义：两个实变量的实函数g：$R^2\to R$连续,如果对于每个点$(x_0,y_0)\in R^2$和每个$\varepsilon>0$存在相应的$\delta>0$,使得当$[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}<\delta$时,有$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$。

此外，函数f：$R^2\to R$分别对于每个变量连续，如果对于y的每个固定值y_0，函数$f(x,y_0)$作为x的函数在通常意义下连续。类似地，$f(x_0,y)$作为y的函数在通常意义下连续。

设f：$R^2\to R^1$分别对于每个变量连续，求证存在一个连续

函数序列g_n: $R^2 \to R$，使得

$$f(x, y)=\lim_{n\to\infty} g_n(x, y)$$

对于所有$(x, y)\in R^2$成立。

B-5. 求证

$$1+(n/1!)+(n^2/2!)+\cdots+(n^n/n!)>e^n/2$$

对于每个整数$n\geqslant 0$成立。(可以假定已知台劳余项式

$$e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

以及 $$n!=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt.)$$

B-6. 对于一个有n个元素的集合，基数(即集合的元素的个数)分别为$0(mod3)$，$1(mod3)$，$2(mod3)$。计算

$$S_{i,n}=\sum_{k\equiv i\,(mod\,3)}\binom{n}{k} \qquad 当 i=0,1,2。$$

并对于所有的整数n表明$S_{0,n}$与$S_{1,n}$，与$S_{2,n}$的相互关系，特别在$n=1000$的情形，证明这三个和数之间的关系。[$S_{i,n}$的定义的一个例子是$S_{0,6}=\binom{6}{0}+\binom{6}{3}+\binom{6}{6}=22$]。

解答

A-1. 在$\{1,2,\cdots,16\}$中的任何一个异质的子集(CS)，至多有两个数取自两两互素的集合$\{1,2,3,5,7,11,13\}$。因而至多有$16-(7-2)=11$个数字。而

$$\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$$

是一个有11个元素的CS，故答案为11。

A-2. 设 C 是直线 AB 与圆的另一个交点，又设 θ 是直线 AB 的倾斜角。设 $AB=b$ 与 $AC=c$。下降的时间的平方与 $b/\sin\theta$ 成比例，因而与 $1/c\sin\theta$ 成比例。因为 bc 关于 θ 是常数，当 $c\sin\theta$ 极大时时间为极小。故应取 C 点为圆周的底。

A-3. 如果 $p\equiv 1(mod4)$ 或是（A）：$p\equiv 1(\bmod 8)$ 或是(B)：$p\equiv 5(mod8)$。兹证(A)与(B)分别是(i)与(ii)的充要条件。若 $p=m^2+n^2$ 且 p 是奇数，不妨设 m 是奇数 n 是偶数。则 $p=m^2+4v^2$，而且 $m^2\equiv 1(mod8)$。由(A)，v 是偶数并且 $p=m^2+16w^2$。反之由 $p=m^2+16w^2$ 得 $p=m^2=1(mod8)$，由(B)，v 是奇数，对于某些整数 u，$m=2u+v$，并且 $p=(2u+v)^2+4v^2=4u^2+4uv+5v^2$。反之，由 $p=4u^2+4uv+5v^2$，并且 p 为奇数得 $p=(2u+v)^2+2v^2$ 而 v 为奇数，故 $p\equiv 5(mod8)$。

A-4 因为

$$\begin{aligned}\sum_{k<n/2}(n-2k)\binom{n}{k} &= \sum_{k<n/2}\left\{(n-k)\binom{n}{k}-k\binom{n}{k}\right\}\\ &= \sum_{k<n/2}\left\{n\binom{n-1}{k}-n\binom{n-1}{k-1}\right\}\\ &= n\sum_{k<n/2}\left\{\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1}\right\}\\ &= n\binom{n-1}{[(n-1)/2]}\end{aligned}$$

为所求。

A-5. 令 F 为固定的焦点，M 为变动的焦点，T 为变动的彼此相切的点。由抛物线的反射性，在 T 点的切线交 FT 所成的角与交竖线所成的角相等。由此及两抛物线的全等性 MT 是竖线并且线段 $\overline{FT}$ 与 $\overline{MT}$ 相等。由抛物线的焦点与准线的定义得知，M 一定是在水平的固定的准线 $y=\frac{1}{4}$ 上。

A-6. 设 $p(k, x)$ 是首一多项式 $(x+1)(x+2)\cdots(x+k)$，并设 m 是一个整数。则 $p(k, m)$ 被 $k!$ 整除。这是因为这个商的绝对值（即使 m 是负数）是一个二项式的系数。因此，如果 $n|k!$ 则有一个 k 次首一整多项式 $f(x)$。对于所有整数 m 有 $n|f(m)$。反之，条件 $n|k!$ 是必要的，因为一个 k 次首一整多项式的 k 阶差分 $k!$ 是可以被所有的值 $f(m)$ 的任何公因子所除尽的。

因为使 $5^6|s!$ 的最小 s 是 $s=25$，所以 $k(10^6)=k(5^6 2^6)=25$。

B-1. 因为 p_i 不必不同，故这和数是在紧致集合 $C\times C\times C\times C\times C$ 上的连续函数，这里 C 是圆周。故极大值存在。由证明

$$S=d(p_1p_2)+d(p_2p_3)+d(p_3p_4)+d(p_4p_5)+d(p_5p_6)$$

$$T=d(p_1p_3)+d(p_2p_4)+d(p_3p_5)+d(p_4p_1)+d(p_5p_2)$$

有相同的极大化，来证明当 p_i 是正五边形的顶点时达到极大。对于 S 或 T 确定四个点，则这和数的变化部分为

$$D=d(p, a)+d(p, b) \qquad a, b \text{ 固定}$$

用正弦定理可证明 D 是 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的常数倍，这里 $\alpha=\angle pab$，$\beta=\angle pba$，$\alpha+\beta$ 是常数。则不难证明除非 p 关于 a 与 b 对称，否则 D 不是一个极大值。

B-2. 如果对于一个趋向 $+\infty$ 的序列 $\{x_n\}$ 有 $y'(x_n)=0$。由假设得 $y(x_n)\to 0$。因此，当 $x\to\infty$ 时一定 $y(x)\to 0$。由于这些 x_n 可能包括一些相对极大与极小值，故当 $x\to\infty$ 时也有 $y'(x)\to 0$。

此外存在一个 x_0，使得当 $x>x_0$ 时有 $y'\neq 0$，所以 $(y')^2>0$，令 $x>x_0$ 并分两种情形讨论：(i) $y'>0$。若 y 无上界，y^3 及 $(y')^2+y^3$ 也无上界。这与假设 $x\to\infty$ 时 $(y')^2+y^3\to 0$

矛盾．若 y 有上界，趋于有限的极限，则 y^3，$(y')^2$，y' 均有极限．因 y 有界 y' 的极限为 0， 则 y 也以 0 为极限．(ii) $y' < 0$．除非 y 没有下界，否则不存在问题．则可以假设 $y<0$并且比较 y 与微分方程

$$y' = -\frac{1}{2}|y|^{3/2} \qquad y<0$$

的解．在一个有限区间内每个解发散，趋于 $-\infty$．$y(x)$也如此，与对于所有的十分大的 x 假设 y 有定义且光滑相矛盾．

B-3. 若 $\alpha=r/s$，这里 r 和 s 为整数，且 $s>0$，则选取任何整数 n，$\cos(n\pi\alpha)$ 至多有$2s$ 个不同的值．当$\cos\pi\alpha=\frac{1}{3}$时，利用公式 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$和数学归纳法证得

$$\cos(2m\pi\alpha)=t/3^{2^{m-1}} \qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

这里 t 是不能被 3 除尽的整数．所以这些余弦值形成一个相异的值的无限集合，故 α 是无理数．

B-4. 对于每个 n，构造函数 $g_n(x,\ y)$如下：首先用直线族 $\{x=m/n\}$将 xy- 平面分为宽 $1/n$ 的不同的垂直带（这里m是整数）．沿着每个竖线 $x=m/n$， 令 $g_n(x,\ y)=f(x,\ y)$，并且在其间作线性插值（y 保持一定而让 x 变动）． 则因 $f(x_0,\ y)$关于 y 连续而有 $g_n(x,\ y)$ 连续；因 $f(x,\ y_0)$ 关于 x 连续而有 $g_n(x,\ y)\longrightarrow f(x,\ y)$．

B-5. 要证

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n(n-t)^n e^t dt>\frac{e^n}{2}.$$

即等价地证明

$$n!>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^n e^t dt$$

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt > 2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$$

令 $u=n-t$ 上式化为

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt > 2\int_0^n u^n e^{-n} du$$

等价于 $\int_n^\infty u^n e^{-u} du > \int_0^n u^n e^{-u} du$.

设 $f(u)=u^n e^{-u}$ 则只要证明下式即可，

$$f(n+h) \geqslant f(n-h) \qquad \text{当} 0 \leqslant h \leqslant n.$$

即等价于 $(n+h)^n e^{-h} \geqslant (n-h)^n e^h$.

$$n\ln(n+h)-h \geqslant n\ln(n-h)+h.$$

设 $g(h)=n\ln(n+h)-n\ln(n-h)-2h$. 则 $g(o)=0$. 并且对于 $0<h<n$

$$\frac{dg}{dh}=\frac{n}{n+h}+\frac{n}{n-h}-2=\frac{2n^2}{n^2-h^2}-2>0.$$

所以当 $0<h<n$ 时，$g(h)>0$ 得证。

B-6. 设 $n \equiv r(mod 6)$ 这里 r 取自{0, 1, 2, 3, 4, 5}. 则有下表.

r	0	1	2	3	4	5
$S_{0,n}$	$a+1$	b	c	$d-1$	e	f
$S_{1,n}$	a	b	$c+1$	d	e	$f-1$
$S_{2,n}$	a	$b-1$	c	d	$e+1$	f

这可由公式

$$S_{i,n}=S_{i-1,n-1}+S_{i,n-1} \quad (\text{这里} 0-1 \equiv 2(mod 3))$$

用数学归纳法得出. 而此公式可从

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

立即得到，和数可用上表及

$$S_{0,n}+S_{1,n}+S_{2,n}=2^n$$

来计算，当 $n=1000$则 $r=4$且

$$S_{0,1000}=S_{1,1000}=S_{2,1000}-1=(2^{1000}-1)/3.$$

第三十六届(1975年11月6日)

上午试题

A-1. 设整数n是两个三角数的和

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$$

将$4n+1$表示为两平方数的和$4n+1=x^2+y^2$，并且 x 与 y 可用 a与 b 表示。反之，证明若$4n+1=x^2+y^2$,则n是两个三角数的和（这里a、b、x,y为整数)。

A-2. 有那些实数对 b、 c 使得二次方程$z^2+bz+c=0$的两个根都在复平面的单位圆盘$\{|z|<1\}$之内？

在实bc一平面上作使得上述条件成立的区域的图形（即确定区域的边界线)。

A-3. 设常数a, b, c,$0<a<b<c$。在三维空间R^3的集合

$$\{x^b+y^b+z^b=1 \quad x\geqslant 0 \quad y\geqslant 0 \quad z\geqslant 0\}$$

的什么点处，函数$f(x,y,z)=x^a+y^b+z^c$取极大值与极小值？

A-4. 设$n=2m$，这里m是大于 1 的奇数， 令$\theta=e^{2\pi i/n}$，将$(1-\theta)^{-1}$表示为θ的多项式

$$a_k\theta^k+a_{k-1}\theta^{k-1}+\cdots+a_1\theta+a_0,$$

这里a_i是整数。

A-5. 设$y_1(x)$与$y_2(x)$ 是微分方程 $y''=f(x)\ y$在实轴的某

个区间I上的线性无关的解。其中$f(x)$是实值连续函数。 设在I上$y_1(x)>0$ $y_2(x)>0$。证明存在一个正常数c，使得在I上函数

$$z(x)=c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$$

满足方程 $z''+\frac{1}{z^3}=f(x)z$。

A-6. 设P_1，P_2，P_3是三维空间的一个锐角三角形的顶点。求证总可以加上两点P_4与P_5，使得没有三点共线，并且通过这五点中任何两点的直线垂直于由其他三点所定的平面。

解答中要说明所加点P_4与P_5的位置。

下午试题

B-1. 在有序整数对(m,n)的加群内三个元素$(3,8)$ $(4,-1)$ $(5,4)$[这里加法定义为$(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$]，生成子群$H$。则$H$有$(1,b)$ $(0,a)$生成的子集（a，b为整数且$a>0$）。求a。

B-2. 在三维欧氏空间内， 定义处于两平行平面间的点的开集为一板块。两平面之间的距离称为板块的厚度。已知厚度分别为d_1，d_2，…的板块的无穷叙列s_1，s_2，…， 使得$\sum_{i=1}^{\infty}di$收敛。

证明在这空间有某个点，它不包含于任何一个这样的板块内。

B-3. 设$S_k(a_1,\cdots,a_n)$表示a_1，…，a_n的第k个初等对称函数。这里k一定。对任意的$n\geq k$以及任意的正实数a_1，…，a_n的n数组，求

$$S_k(a_1,\ \cdots,\ a_n)/[S_1(a_1,\ \cdots,\ a_n)]^k$$

的上确界（即最小上界）Mk。

B-4. 是否存在单位圆$x^2+y^2=1$的一个子集合B，使得

(i) B是拓扑闭的．(ii) B恰含圆的每条直径的一个端点(一个集合B是拓扑闭的，如果它包含B内的每个收敛序列的极限点)。

B-5. 设$f_0(x)=e^x$，$f_{n+1}(x)=xf'_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$。证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=e^e.$$

B-6. 证明，若$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$则

(i) $n(n+1)^{1/n}<n+S_n$，当$n>1$。

(ii) $(n-1)n^{-1/(n-1)}<n-S_n$。

解答

A-1. 设$n=[(a^2+a)/2]+[(b^2+b)/2]$，$a$，$b$为整数．则

$$\begin{aligned}4n+1&=2a^2+2a+2b^2+2b+1\\&=(a+b+1)^2+(a-b)^2.\end{aligned}$$

反之，令$4n+1=x^2+y^2$，x，y为整数，则x与y之一恰为奇数。从而$a=(x+y-1)/2$，$b=(x-y-1)/2$ 是整数．容易验证

$$\begin{aligned}&[(a^2+a)/2]+[(b^2+b)/2]\\&\qquad=(x^2+y^2-1)/4=n.\end{aligned}$$

A-2. 顶点为$(0,\ -1)$，$(2,1)$，$(-2,1)$；以直线$L_1: c=1$，$L_2: c-b+1=0$，$L_3: c+b+1=0$ 为边的三角

形内部为所求区域. 事实上，令$f(z)=z^2+bz+c$,设它的零点为r与s，则$-b=r+s$，$e=rs$。又

$$(r+1)(s+1)=rs+r+s+1=e-b+1=f(-1)$$
$$(r-1)(s-1)=rs-r-s+1=e+b+1=f(1)$$

在L_2上或下面，至少有一个零点是实的，且不大于-1。这或者由$(r+1)(s+1)\leqslant 0$,或者由$f(-1)\leqslant 0$并且$y=f(x)$的图形是一向上开口的抛物线而得. 同理，在L_3上或下面一个零点为实的且至少是1.在L_1上或上面至少一个零点绝对值大于或等于1。故所求的点(b,c)一定在这个三角形内。

反之，若(b,c)在这三角形内，$|c|<1$从而$|r|<1$或$|s|<1$或两者都成立。若零点为复数，它们是共轭的且$|r|=|s|$，则由$|c|<1$得$|r|=|s|<1$。若零点为实数，由$|c|<1$得至少一个零点是在$(-1,1)$内，则由$(r+1)(s+1)=f(-1)>0$与$(r-1)(s-1)=f(1)>0$得其他的零点也在$(-1,1)$内。故此区域为所求。

A-3。设$h(x)=x^a-x^b$与$k(z)=z^c-z^b$，所求的点即函数

$$g(x,z)=(x^a+y^b+z^c)-(x^b+y^b+z^b)=h(x)+k(z)$$

在由立体区域在xz一平面的投影所得的区域上的极大与极小值，其坐标x与z都在$[0,1]$内。由求导数得知$h(x)$在$x=0$为0，增加到在$x_0=(a/b)^{1/(b-a)}$得极大值，然后减少在$x=1$时为0。(用上假设$0<a<b$)。同样$k(z)$在$z=0$为0，减少到在$z_0=(b/c)^{1/(c-b)}$得极小值,然后增加在$z=1$时为零。因为$(1,z_0)$与$(x_0,1)$不在$g(x,z)$的定义域内，所以函数f仅在$(x,y,z)=(x_0,[1-x_0^b]^{1/b},0)$取得极大值. 而仅在$(0,[1-z_0^b]^{1/b},z_0)$取得极小值。

A-4 当$k>0$时设$n=4k+2$则

$$0=\theta^n-1=\theta^{4k+2}-1=(\theta^{2k+1}-1)(\theta^{2k+1}+1)$$

$$0=(\theta^{2k+1}-1)(\theta+1)(\theta^{2k}-\theta^{2k-1}+\theta^{2k-2}-\cdots-\theta+1).$$

因为当$n>2k+1$并且$n>2$时，θ是1的n次原根，故

$$(\theta^{2k+1}-1)(\theta+1)\neq 0.$$

因此 $$\theta^{2k}-\theta^{2k-1}+\theta^{2k-2}-\cdots+\theta^2-\theta+1=0 \qquad (A)$$

$$1=\theta-\theta^2+\theta^3-\cdots-\theta^{2k}=(1-\theta)(\theta+\theta^3+\theta^5+\cdots+\theta^{2k-1})$$

$$(1-\theta)^{-1}=\theta+\theta^3+\cdots+\theta^{2k-1}\quad (\text{其中}2k-1=(n-4)/2)$$

同理由(A)，另一解为

$$(1-\theta)^{-1}=1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2k}$$

A-5. c的答案是$\sqrt{2/w}$，这里w为郎司基$y_1y_2'-y_2y_1'$。下面要证明它是一个常数。

设$c^2=2k$，则$z^2/2=ky_1y_2$。微分两次得

$$zz'=k(y_1y_2'+y_2y_1').$$

$$zz''+(z')^2=k(y_1y_2''+y_2y_1''+2y_1'y_2')$$

因为 $y_1''=fy_1$，$y_2''=fy_2$，得

$$zz''+(z')^2=2k(fy_1y_2+y_1'y_2')$$

$$=f(2ky_1y_2)+2ky_1'y_2'$$

$$=fz^2+2ky_1'y_2'$$

现在 $$z^3z''+(zz')^2=fz^4+2kz^2y_1'y_2'$$

$$z^3z''+k^2(y_1y_2'+y_2y_1')^2=fz^4+4k^2(y_1'y_2')^2$$

$$z^3z''+k^2(y_1y_2'-y_2y_1')^2=fz^4$$

$$z^3z''-fz^4=-k^2(y_1y_2'-y_2y_1')$$

$$=-k^2w^2=-c^4w^2/4. \qquad (1)$$

因为$w'=(y_1y_2'-y_2y_1')'=y_1y_2''-y_2y_1''$

$$=y_1(fy_2)-y_2(fy_1)=0$$

故w是一个常数。由$c^4w^2/4=1$解出$c=\sqrt{2/w}$，代入(1) 得$z''-fz=-z^{-3}$即$z''+z^{-3}=fz$。

A-6. 设λ表示通过所求的点P_4与P_5的直线。π是过P_1，

P_2，与P_3的平面。H是λ与π的交点。

设v_u是向量HP_u，长度为$|v_u|$。拟证点积

$$d = P_hP_k \cdot P_iP_j = (v_k - v_h)(v_j - v_i)$$
$$= v_kv_j - v_k \cdot v_i - v_h \cdot v_j + v_h \cdot v_i \quad (1)$$

为零，对于所有选自{1，2，3，4，5}的不同下标h,k,i,j都成立。

因为λ垂直于π，一定

$$v_h \cdot v_i = 0 \quad 当 h \in \{4,5\}, i \in \{1,2,3\} \quad (2)$$

如果$h,k \in \{4,5\}$而$i,j \in \{1,2,3\}$。由(2)得知(1)中的点积d是零。如果$h \in \{4,5\}$而i，$j \in \{1,2,3\}$由(2)得(1)中d为

$$d = v_kv_j - v_kv_i$$
$$= v_k(v_j - v_i) = HP_k \cdot P_iP_j \quad (3)$$

显然当且仅当H是$\triangle P_1P_2P_3$的垂心(3)的d为零。由(3)的d等于零选取的H，得

$$v_2v_3 = v_1v_3 = v_1v_2 \quad (4)$$

现在设h，$i \in \{4, 5\}$ k，$j \in \{1,2,3\}$，则由(2)有

$$d = v_kv_j + v_4v_5 \quad (5)$$

由(4)，若$v_4v_5 = -v_1v_2$，(5)的所有d将为零。由$\triangle P_1P_2P_3$是锐角三角形的假设，H在这个三角形内，则$\angle P_1HP_2$，$\angle P_2HP_3$，$\angle P_3HP_1$至少有一个（实际上是全部）一定是钝角。故而(4)的几个相等的点积一定为负。所以v_4v_5一定为正。这意味着P_4与P_5一定是在由H确定的λ的同一条半直线上。

下面给定P_4与P_5的位置。设H是$\triangle P_1P_2P_3$的垂心而μ是在H垂直于平面$P_1P_2P_3$的两条半直线。则P_4可以是M上的使得$|v_4|$既非零又非$(-v_1 \cdot v_2)^{1/2}$的任何点。而P_5一定是在μ上使得$|v_5| = -v_1 \cdot v_2/|v_4|$的唯一的点。则(1)的每个$d$是零并且设有三个$P_i$是共线的。

B-1．答案是$a=7$，同时一定有$b\equiv5(\bmod 7)$。

证明：子群H必包含$4(3,8)-3(4,-1)=(0,35)$，$4(5,4)-5(4,-1)=(0,21)$。而$2(0,21)-(0,35)=(0,7)$。当且仅当$(1,b)$是在H内，$(0,7)$与$(1,b)$将生成H。当且仅当$8=3b+7u$，$-1=4b+7v$与$4=5b+7w$，存在整数u，v与w使得

$$(3,8)=3(1,b)+u(0,7),(4,-1)=4(1,b)+v(0,7),$$
$$(5,4)=5(1,b)+w(0,7).$$

由于$b=5+7k$，k为任意整数，所求的系数u，v，w为

$u=-1-3k$，$v=-3-4k$　$w=-3-5k$。

只要令$k=0$，并且注意到$(1,5)=(4,-1)-(3,8)+2(0,7)$是在$H$内。

B-2．设$\Sigma d_i=d$，S是半径为$r>d/2$的球面，它的面积包含在板块S_i内的部分不大于$2\pi d_i$，因此S的面积，包含在板块S_i的并集内的部分不大于$2\pi d<4\pi r=(S$的面积)．所以有S的点不在任何板块内。

B-3．在$S_1^k=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k$的展开式内，$S_k$的每项以$k!$为系数，且别的系数非负．所以$S_k/S_1^k\leqslant1/k!$。

若令每个$a_i=1$，则

$$\frac{S_k}{S_1{}^k}=\binom{n}{k}\Big/n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\ n^k}$$
$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

当k一定而n趋向无穷大时，上式趋于$1/k!$故证得上确界M_k是$1/k!$。

B-4．否．因映射$(x,y)\to(-x,-y)$是单位圆在它自身上面的一个同胚映射．子集B的补集$-B$也是闭的，如果有这样的B存在将使C为不相交的非空闭子集的并集$-B\cup B$．与C是连

通的事实矛盾。

B-5. 因为$f_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$，容易用数学归纳法 证 明 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k^n x^k/k!)$. 则因为所有的项为正，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}=e^e.$$

B-6. 两部分都利用平均不等式证明. 对于(i)，有

$$\frac{n+S_n}{n}=\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+(1+(1/n))}{n}$$

$$>\sqrt[n]{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots(1+(1/n))}$$

$$=\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots(n+1)/n}=(n+1)^{1/n}.$$

故得$n-S_n>n(n+1)^{\frac{1}{n}}$

对于(ii)，有

$$\frac{n-S_n}{n-1}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+(1-(1/n))}{n-1}$$

$$>\sqrt[n-1]{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots(1-(1/n))}$$

$$=\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots(n-1)/n}=n^{-1/(n-1)}$$

故得$n-S_n>(n-1)n^{-1/(n-1)}$。

第三十七届（1976年11月4日）

上午试题

A-1. P是射线OA与OB为边的角的内点。置点X于OA上，点Y于OB上，使得线段$\overline{XY}$含有P，并使得积$(PX)(PY)$最小。

A-2. 设$P(x,y)=x^2y+xy^2$　$Q(x,y)=x^2+xy+y^2$。对于$n=1, 2, 3, \cdots$设$F_n(x,y)=(x+y)^n-x^n-y^n$及$G_n(x,y)=(x+y)^n+x^n+y^n$有$G_2=2Q, F_3=3P$，$G_4=2Q^2, F_5=5PQ$，$G_6=3Q^3+3P^2$。求证对于每个n或者F_n或者G_n都可以表示为一个整系数P与Q的多项式。

A-3. 求方程　$|p^r-q^s|=1$的所有整数解，这里p、q为素数而r、s是大于1的正整数．证明没有别的解。

A-4. 设r是$P(x)=x^3+ax^2+bx-1=0$的根，　而$r+1$是$y^3+cy^2+dy+1=0$的根，式中a，b，c与d是整数。又设$P(x)$在有理数域上是不可约的。表示$P(x)=0$的另一根s为不显含a、b、c或d的r的函数。

A-5. 在(x,y)平面内，如果R是在凸多边形内及其上的一个集，设$D(x,y)$是从(x,y)到R的最近的点的距离。

(i) 证明存在不依赖于R的常数a，b，c使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-D(x,y)}dxdy=a+bL+cA.$$

这里L是R的周长而A是R的面积。

(ii) 求a、b、c的值。

A-6. 设$f(x)$是一个对所有实数x有定义的二次连续可微的实值函数，且对于所有的x，$|f(x)|\leqslant 1$，又$(f(0))^2+(f'(0))^2=4$。求证存在一个实数x_0，使得$f(x_0)+f''(x_0)=0$。

下午试题

B-1. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$。

答案用$\log a-b$的形式表示。这里a与b为正整数。

B-2. 设G是一个由元素A与B生成的群，即G的每个元素能写为一个有限的"字码"A^{n_1}、B^{n_2}、A^{n_3}，$\cdots B^{n_k}$，其中n_1，$\cdots$，n_k为任意整数。并且$A^0=B^0=1$，$A^4=B^7=ABA^{-1}B=1$，$A^2\neq 1 B\neq 1$。(i) G有多少元素形为c^2？这里c在G内。(ii) 写出每个A与B的"字码"的二次幂。

B-3. 有n个事件$A_1,\cdots,A_n$。其中每个事件发生的概率至少是$1-a$，这里$a<1/4$。又设当$|i-j|>1$时，A_i与A_j彼此独立。然而A_i与A_{i+1}可互依。设正实数u_k，$k=0,1,\cdots$，由递推式$u_{k+1}=u_k-au_{k-1}$，$u_0=1$ $u_1=1-a$所定义。求证，所有$A_1,\cdots,A_n$全发生的概率至少是u_n。

B-4. 对于在椭圆上的一点P，设d是从椭圆的中心到在P点的切线的距离。证明当P在椭圆上变动时，$(PF_1)(PF_2)d^2$是常数。这里PF_1与PF_2是从P到椭圆的焦点F_1与F_2的距离。

B-5. 计算$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n$。

B-6. 设$\sigma(N)$为N的所有正整数因子的和（其中包含1与N自身），例如p是一个素数，则$\sigma(p)=p+1$。当$\sigma(N)=2N+1$称

正整数N为拟完全的。证明每个拟完全数是一个奇数的平方。

解答

A-1. 设μ是$\angle AOB$的角平分线，λ是过P点μ的垂线，将λ与OA、OB的交点分别选为X与Y。据此$OX=OY$。并且有圆Γ切OA于X切OB于Y。设$\overline{X_1Y_1}$是另一含P点的线段，X_1与Y_1分别在OA、OB上。设X_2与Y_2是$\overline{X_1Y_1}$与Γ的交点。因为$(PX)\cdot(PY)=(PX_2)(PY_2)$，显然$(PX_2)(PY_2)$小于$(PX_1)(PY_1)$。故$(PX)\cdot(PY)$为最小。

A-2. 容易验证

$$(x+y)^n=(x+y)^{n-2}Q+(x+y)^{n-3}P$$
$$x^n+y^n=(x^{n-2}+y^{n-2})Q-(x^{n-3}+y^{n-3})P$$

将两式相减或相加，得

$$F_n=QF_{n-2}+PG_{n-3},\quad G_n=QG_{n-2}+PF_{n-3}\qquad (R)$$

再利用已知的G_2，F_3，G_4，F_5，G_6与(R)，按完全归纳法即可证得所求结果。

A-3. 我们证明仅有一解由$3^2-2^2=1$得出，即$(p,r,q,s)=(3,2,2,3)$或$(2,3,3,2)$。

显然p或q总有一为2。设$q=2$，则p是一个奇素数，有$p^r\pm1=2^s$。当r是奇数，则$(p^r\pm1)/(p\pm1)$是奇数．$p^{r-1}\mp p^{r-2}+p^{r-3}\mp p^{r-4}+\cdots+1$。因为$r>1$它大于1。因$2^s$没有这样的因子，得矛盾。

当r是一个偶数$2t$，则$p^r+1=2^s$，导致

$$2^s=(p^t)^2+1=(2n+1)^2+1=4n^2+4n+2$$

那是不可能的．因为对于$s>1$有$4|2^s$与$4\nmid(4n^2+4n+2)$。又$r=2t$与$p^r-1=2^s$导致$(p^t)^2-1=(2n+1)^2-1=4n^2+4n=4n(n+$

$1)=2^s$因为n或$n+1$为奇数。这仅当$n=1$，$s=3$，$r=2$时是可能的。

A-4. 一个答案是$s=-1/(r+1)$，另一个答案是$s=-(r+1)/r=-1-(1/r)$。因为$P(x)$是不可约的，所以$M(x)=P(x-1)$亦不可约。故$M(x)$是有理数域上以$r+1$为零点的唯一的首一三次多项式。即$M(x)=x^3+ex^2+dx+1$。如果P的零点是r，s，t则M的零点是$r+1$，$s+1$，$t+1$。在P与M内x^0的系数分别为-1与1。得$rst=1$，$(r+1)(s+1)(t+1)=-1$。则

$$st=1/r$$

$$\begin{aligned}s+t&=(s+1)(t+1)-st-1\\&=-1/(r+1)-1/r-1\\&=-(r^2+3r+1)/r(r+1)\end{aligned}$$

数s为$x^2+[(r^2+3r+1)/r(r+1)]x+(1/r)=0$的两根之一。由公式得$s$是$-1/(r+1)$或$-(r+1)/r$。

A-5. 下面将证明$a=2\pi$，$b=1$，$c=1$用$I[S]$表示$e^{-D(x,y)}$在域S的积分。因为在R上$D(x,y)=0$，$I[R]=A$。令σ是R的一边，s是σ的长度而$S(\sigma)$是平面的点组成的一个半条形，这些点与R的最近点在σ上变到(u,v)坐标，u平行于σ而v垂直于σ。得

$$I[S(\sigma)]=\int_0^s\int_0^\infty e^{-v}dvdu=s$$

故关于R的所有边的积分的和Σ_1是L。

如果v是R的一个顶点，则以v作为R的最近点的那些点，位于一个角$T(v)$的内部，此角的两条边界是从v发出的两条射线。它们分别垂直于在v点相交的两条边。设$a=\alpha(v)$是这个角的量。用极坐标有

$$I[T(v)]=\int_0^a\int_0^\infty re^{-r}drd\theta=a$$

$I[T(v)]$关于R的所有顶点的和$\sum_2$是2π。则原来的二重积分等于$\sum_2+\sum_1+A=2\pi+L+A$。因此$a=2\pi$，$b=1=c$。

A-6. 设$G(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$.$H(x)=f(x)+f'(x)$。因为H连续,只要证明H改变符号就可得证了。即假定对于所有的x，$H(x)>0$或者$H(x)<0$会得出矛盾。

因为$|f(0)|\leqslant 1$，$G(0)=4$.故或者$f'(0)\geqslant\sqrt{3}$或者$f'(0)\leqslant-\sqrt{3}$。现在讨论对于所有x，$H(x)>0$并且$f'(0)\geqslant\sqrt{3}$的情形。其他的情形类似。

假定满足$f'(x)<1$的正数x的集合S非空，又设g是S的最大下界。则由$f'(0)\geqslant\sqrt{3}$及$f'(x)$的连续性得$g>0$。对于$0\leqslant x\leqslant g$有$f'(x)\geqslant 0$及$H(x)\geqslant 0$导致。

$$G(g)=4+(1/2)\int_0^g f'(x)[f(x)+f''(x)]dx\geqslant 4$$

因为$|f(g)|\leqslant 1$得$f'(g)\geqslant\sqrt{3}$。则由$f'(x)$的连续性，有一个$a>0$，使得对于$0\leqslant x<g+a$有$f'(x)\geqslant 1$。与g的定义矛盾。所以S是空的。现在对于所有的x有$f'(x)\geqslant 1$而得$f(x)$是无界的。与$|f(x)|\leqslant 1$矛盾。矛盾说明$H(x)$一定改变符号。故对某个实x_0有$H(x_0)=0$。

B-1. 下面证明$a=4$，$b=1$。设$f(x)=[2/x]-2[1/x]$。则所求的极限等于$\int_0^1 f(x)dx$。对于$n=1,2,\cdots$在$2/(2n+1)<x\leqslant 1/n$上$f(x)=0$。在$1/(n+1)<x\leqslant 2/(2n+1)$上$f(x)=1$。故

$$L=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\cdots$$

$$=-1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)$$

$$=-1+2\int_0^1 dx/(1+x)$$

$= -1 + 2\ln 2 = \ln 4 - 1$

B-2。答案(i)8；(ii)1，A^2，B，B^2，B^3，B^4，B^5，B^6，因为$B=(B^4)^2$，$B^3=(B^5)^2$，$B^5=(B^6)^2$。故(ii)的答案中的元素G内所有的二次幂它们彼此互异，这是因为B有7阶而A有4阶。为了证明没有别的二次幂，首先注意到由$ABA^{-1}B=1$得$AB=B^{-1}A$。则

$$AB^2=(B^{-1}A)B=B^{-1}(AB)=B^{-1}(B^{-1}A)=B^{-2}A$$

同理对于另外有$\{0,1,\cdots,6\}$内的n，$AB^n=B^{-n}A$因而对于所有的整数n，此式亦成立。故得

(P) $$(B^iA^j)(B^hA^k)=B^uA^v$$

这里$u=i+(-1)^jh$，$v=j+k$。于是形为B^iA^j的元素的集合S对乘法封闭。因为i与j满足$0\leqslant i\leqslant 6$，$0\leqslant j\leqslant 3$，S有限，故S是一个群。从而得$S=G$。那么从(P)得G内的二次幂为B^uA^v，$u=i(1+(-1)^j)$ $v=2j$。如果j为奇数$u=0$ $v\equiv 2(mod 4)$；如果j为偶数$v\equiv 0(mod 4)$。所以除上述列出的以外，无其他平方数。

B-3。当$n\geqslant 5$结论不成立，除非假设A_i与A_1，A_2，$\cdots A_{i-2}$ $(3\leqslant i\leqslant n)$的合取是独立的。

当$n=5$有下面的反例。设$h=33/37$，$k=1/(64+h)$。A_i发生的情况在下表的第一行。设$P(A_i)$是下表中第二行对应A_i的数字的和。

$A_1A_2A_4A_5$	A_4	$A_1A_3A_4A_5$	$A_1A_2A_3A_4A_5$
$12k$	$3k$	$6k$	$7k$

$A_1A_2A_3A_4$	$A_2A_3A_4A_5$	$A_1A_3A_5$	$A_1A_2A_3A_5$
$12k$	$6k$	$3k$	$9k$

$A_2A_3A_5$	$A_3A_4A_5$
$3k$	$3k$

则每一个$P(A_i)$是$49k$而对于所有的i，$j(|i-j|>1)$有$P(A_i\wedge$

$A_i)=37k$。因为$(49k)^2=37k$，原先的无关的假设成立。同时$P(A_i)=1-a$，这里$a=(15+h)k<1/4$。然而对于任意的$a\leqslant 1/4$，有比$\geqslant 7/64$。并且$P(A_1\wedge A_2\wedge A_3\wedge A_4\wedge A_5)=7k<7/64$。

B-4. 设$P=(x,y)$，椭圆的方程为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad 这里a>b>0。$$

则$F_1=(-c,\ 0)$ $F_2=(c,\ 0)$ 其中$c^2=a^2-b^2$。设$r_1=PF_1$，$r_2=PF_2$，则$r_1+r_2=2a$。并且

$$r_1r_2=\left(\frac{1}{2}\right)[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)[4a^2-(x+c)^2-y^2-(x-c)^2-y^2]$$

$$=2a^2-x^2-y^2-c^2=a^2+b^2-x^2-y^2。$$

过椭圆上P点的切线上一点(u,v)满足

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1。$$

可化为$u\cos\theta+v\sin\theta=d$，得

$$d^2=\frac{1}{(x/a^2)^2+(y/b^2)^2}=\frac{a^4b^4}{b^4x^2+a^4y^2}$$

但是$b^4x^2+a^4y^2=b^2(a^2b^2-a^2y^2)+a^2(a^2b^2-b^2x^2)=a^2b^2\cdot(a^2+b^2-x^2-y^2)=a^2b^2r_1r_2$，故$d^2r_1r_2=a^4b^4r_1r_2/a^2b^2r_1r_2=a^2b^2$为常数。

B-5. 因为它是一个n次首一多项式x^n的n阶差分，故和数是$n!$

B-6. 设$N=2^{\alpha}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$，这里$\alpha$与$\beta$是非负整数，并且$p_i$是不同的奇素数，则

$$\sigma(N)=\sigma(2^{\alpha},\ \sigma(p_1^{\beta_1})\cdots\sigma(p_k^{\beta_k})。$$

因为$\sigma(N)=2N+1$是奇数，得$\sigma(p_i^{\beta_i})$是奇数$1\leqslant i\leqslant k$。当且仅当β_i是偶数时，

$$\sigma(p_i^{\beta_i})=1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\beta_i}.$$

是奇数，因为若β_i为奇数，右边是偶数个的奇数的和，为偶数。推得N的奇数部分一定是一平方数，

$$N=2^{\alpha}M^2 \qquad \alpha\geqslant 0 \tag{1}$$

这里M是奇数，剩下是证明$\alpha=0$。

因为N是拟完全数，$\sigma(N)=2^{\alpha+1}M^2+1$，然而从（1）推出$\sigma(N)=\sigma(2^{\alpha})\sigma(M^2)=(2^{\alpha+1}-1)\sigma(M^2)$。所以$2^{\alpha+1}M^2+1=(2^{\alpha+1}-1)\sigma(M^2)$。得

$$M^2+1\equiv 0(mod 2^{\alpha+1}-1) \tag{2}$$

如果$\alpha>0$，$2^{\alpha+1}-1\equiv 3(mod 4)$。所以$2^{\alpha+1}-1$有一素因子$p\equiv 3(mod 4)$。由方程(2)得

$$M^2+1\equiv 0\ (mod\ p) \tag{3}$$

但因为$p\equiv 3(mod 4)$，-1是一个摸p二次非剩余数，（3）是不可能的，故$\alpha=0$。

第三十八届（1977年12月3日）

上午试题

A-1. 考虑所有与曲线$y=2x^4+7x^3+3x-5$交于四个不同点$(x_i, y_i)(i=1,2,3,4)$的直线。证明

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

与直线无关，并求它的值。

A-2. 求出方程组
$$\begin{cases} x+y+z=w, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} \end{cases}$$
的所有实数解x,y,z,w。

A-3. 设u，f和g是对所有实数x均有定义的函数，且满足条件
$$\frac{u(x+1)+u(x-1)}{2}=f(x)\text{和}\frac{u(x+4)+u(x-4)}{2}=g(x)。$$
试用f和g来表示$u(x)$。

A-4. 设$0<x<1$，试将 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ 表为x的有理函数。

A-5. 证明 $\dbinom{pa}{pb}\equiv\dbinom{a}{b}\pmod{p}$

对所有整数p，a和b成立，这里$p>0$为一素数，$a\geqslant b\geqslant 0$。

A-6. 设$f(x,y)$在域$S=\{x,y\}:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y 1\}$上连续.对任意$(a,b)\in S$，设$S(a,b)$是以$(a,b)$为中心且全含于$S$内且各边与$S$的边平行的最大正方形.若总有$\iint\limits_{S(a,\ b)}f(x,\ y)dxdy=0$，问$f(x,y)$在$S$上恒等于零吗？

下午试题

B-1. 求无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$。

B-2. 给定一凸四边形 $ABCD$ 和不在 $ABCD$ 平面上的一点O。试分别在直线OA，OB，OC 和OD上找出点A'，B'，C'和D'，使得$A'B'C'D'$为一平行四边形。

B-3. 考虑正无理数的一个有序的三数组$(x_1,\ x_2,\ x_3)$，这里$x_1+x_2+x_3=1$，若每个$x_i<1/2$，则这个三数组称为"平

衡”的。如果一个三数组不平衡，比如$x_j>1/2$，则进行如下的“平衡调整” $B(x_1, x_2, x_3)=(x_1', x_2', x_3')$，其中若 $i\neq j$ 则 $x_i'=2x_i$，而$x_j'=2x_j-1$。如果新的三数组仍不平衡，则对它再进行平衡调整。试问连续经过有限次平衡调整后是否总能得到一个平衡的三数组？

B-4. 设C是平面内一条自身不相交的连续闭曲线，又设Q是C内的一点。试证在C上存在点P_1和P_2，使得Q是线段P_1P_2的中点。

B-5. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n(n>1)$均为实数，且

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

证明对于$1\leqslant i<j\leqslant n$有$A<2a_ia_j$。

B-6. 设H是群G的具有h个元素的一个子群。又设G有一个元素a，使得对于所有的$x\in H$，成立恒等式$(xa)^3=1$。在G内，设P是所有乘积$x_1ax_2a\cdots x_na$所成的子集，这里n为正整数，$x_i\in H$。(a) 证明P是一个有限集合。(b) 证明P的元素事实上不多于$3h^2$个。

解答

A-1. 设直线$y=mx+b$交曲线于四点。则x_i是方程$2x^4+7x^3+(3-m)x-(5+b)=0$的根，它们的和为$-7/2$，从而它们的算术平均值$(\Sigma x_i)/4$为$-7/8$，与直线自身无关。

A-2. 我们证明w必等于x，y，z中的一个，而且留下的两个未知数必然互为相反数。令$s=x+y$及$p=xy$。则由已知方程组可推出$w-z=s$及

$$\frac{s}{p}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{w}-\frac{1}{z}=\frac{z-w}{zw}=-\frac{s}{zw}.$$

于是由$s/p=s/(-zw)$又推知或者$s=0$，或者$p=-zw$。如果$s=0$，则有$y=-x$及$w=z$。如果$-zw=p=xy$，则$-z$与w是二次方程$T^2-sT+p=0$的根，而这个方程有根x和y，这就表明或者有$w=x$及$-z=y$，或者有$w=y$及$-z=x$。

A-3. 我们证明：用f和g来表示$u(x)$的式子有无数多个；其中较简单的几个如

$$\begin{aligned}u(x)&=g(x)-f(x+3)+f(x+1)+f(x-1)-f(x-3)\\&=-g(x+2)+f(x+5)-f(x+3)+f(x+1)+f(x-1)\\&=g(x+4)-f(x+7)+f(x+5)-f(x+3)+f(x+1).\end{aligned}$$

设E是关于函数A的位移算子，由$EA(x)=A(x+1)$定义。则已给条件为$(E+E^{-1})u(x)=2f(x)$和$(E^4+E^{-4})u(x)=2g(x)$。于是有$(E^2+1)u(x)=2Ef(x)$及$(E^8+1)u(x)=2E^4g(x)$。因为E^2+1与E^8+1是E的互素多项式，故可求得

$$1=\frac{1}{2}(E^8+1)-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)(E^2+1),$$

$$u(x)=\frac{1}{2}(E^8+1)u(x)-\frac{1}{2}(E^6-E^4+E^2-1)\cdot(E^2+1)u(x),$$

$$u(x)=E^4g(x)-(E^6-E^4+E^2-1)Ef(x),$$

$$u(x)=E^4g(x)+(-E^7+E^5-E^3+E)f(x),$$

$$u(x)=g(x+4)-f(x+7)+f(x+5)-f(x+3)+f(x+1).$$

其他表示式则可由

$$\begin{aligned}g(y)&=-g(y-2)+f(y+3)+f(y-5)\\&=-g(y+2)+f(y+5)+f(y-3)\end{aligned}$$

得到。

A-4. 因为$|x|<1$，故当$N\to\infty$时有

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\to\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

A-5. 众所周知，$\binom{p}{i}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$对$i=1,2,\cdots,p-1$成立；或者等价地，在$Z_p[x]$内$(1+x)^p=1+x^p$成立，这里$Z_p$是对于模$p$的整数域。于是在$Z_p[x]$内有

$$\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k=(1+x)^{pa}=[(1+x)^p]^a=[1+x^p]^a$$

$$=\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{jp}.$$

因为在等式 $\sum_{k=0}^{pa}\binom{pa}{k}x^k=\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}x^{jp}$

中同次幂的系数必对于模p同余，所以在$Z_p[x]$内对$b=0,1,\cdots,a$成立

$$\binom{pa}{pb}\equiv\binom{a}{b}(\mathrm{mod}\,p).$$

A-6. 对于在S内的$(a,\ b)$，令$I(a,b)$是矩形$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$上的二重积分$\iint f(x,y)dxdy$。又由$(a,b)$归纳地定义一个序列$(a_n,\ b_n)$如下：$a_1=a$，$b_1=b$，当$0\leqslant b_n\leqslant a_n$时$a_{n+1}=a_n-b_n$，$b_{n+1}=b_n$；当$0\leqslant a_n<b_n$时$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=b_n-a_n$。则从此规定可知对于所有$n$都有$I(a,b)=I(a_n,\ b_n)$。因为在$S$上$f$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，所以对$S$内的所有$(a,b)$都得到$I(a,b)=0$。

如果$f(x,y)$在S内不恒为零，则在某个矩形$R=\{(x,y);\ c\leqslant x\leqslant d,\ h\leqslant y\leqslant k\}$上$f$必为正(或负)值，因而$I=\iint\limits_R f(x,y)dxdy$也必为正(或负)值。但这与

$$I=I(h,k)-I(h,d)-I(c,k)+I(c,d)=0$$

相矛盾。所以f在S上恒为零。

B-1.
$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{k^3-1}{k^3+1}\right]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1\cdot7}{3\cdot3}\cdot\frac{2\cdot13}{4\cdot7}\cdot\frac{3\cdot21}{5\cdot13}\cdots\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]=\frac{2}{3}.$$

B-2. 设O'是平面AOC与BOD的交线上不同于O的任一点，例如O'可以是直线AC与BD的交点。设A'是直线OA与过O'且平行于OC的直线的交点，设C'是直线OC与过O'且平行于OA的直线的交点。则$OA'O'C'$为一平行四边形，且其对角线OO'与$A'C'$在点M互相平分。用同样方法选取B'与D'，可得平行四边形$OB'O'D'$，且其对角线OO'与$B'D'$也互相平分于线段OO'的中点M。所以线段$A'C'$与$B'D'$互相平分于点M，$A'B'C'D'$是一平行四边形(这种平行四边形不是唯一的)。

B-3. 设$x_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}2^{-j}$，$a_{ij}\in\{0,1\}$是$x_i$的二进制展开式。如果$a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$，则三数组是平衡的。否则，恰有一个$i$使$a_{i1}=1$，平衡调整将导致$x_i'=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j+1}2^{-j}$。经任意有限次平衡调整后仍不平衡的一个三数组可如此构造：选择a_{ij}，使对

每个j在a_{1j},a_{2j},a_{3j}中恰有一个等于1，同时每个序列$a_{i1},a_{i2},\cdots$的每一段均不出现重复，即要每个x_i均是无理数。这样的一个解为

$$a_{1j}=1 \quad 当且仅当 j\in\{1,9,25,49,\cdots\},$$
$$a_{2j}=1 \quad 当且仅当 j\in\{4,16,36,64,\cdots\},$$
$$a_{3j}=1 \quad 当且仅当 j\in\{2,3,5,6,\cdots\}.$$

B-4. 可以假定$Q=O$为原点。设$-C$是在反射$P\to -P$下C的象。$-C$是又一条围绕O的连续闭曲线，且$C\cap -C\neq\Phi$，因为它们有相同的直径且都围绕O(因此两者都不能在对方之外部)。设$P_1\in C\cap -C$。则存在$P_2\in C$，使得$P_1=-P_2$。这就是所要求的两点。

B-5. 由柯西-许瓦尔兹不等式，有

$$[(a_1+a_2)+a_3+a_4+\cdots+a_n]^2\leqslant[1^2+1^2+\cdots+1^2]\cdot[(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2]$$

或 $(\Sigma a_i)^2\leqslant(n-1)[(\sum a_i^2)+2a_1a_2]$ 或

$$[1/(n-1)](\sum a_i)^2\leqslant(\sum a_i^2)+2a_1a_2.$$

由假设，就有

$$A<-(\sum a_i^2)+\frac{1}{n-1}(\sum a_i)^2\leqslant-(\sum a_i^2)+(\sum a_i^2)+2a_1a_2=2a_1a_2.$$

类似地可知对$1\leqslant i<j\leqslant n$有$A<2a_ia_j$。

B-6. 显然$1\in H$。又$x\in H$蕴涵$x^{-1}\in H$。则由假设可知当$x\in H$时有$a^{-1}=a^2$及$xaxaxa=1=x^{-1}ax^{-1}ax^{-1}a$。于是不难证明

(i)$axa=x^{-1}a^2x^{-1}$，　(ii)$a^2xa^2=x^{-1}ax^{-1}$。

令 $A=\{xay;\ x,y\in H\}$，$B=\{xa^2y;\ x,y\in H\}$，

$C=\{xa^2ya;\ x,y\in H\}$，以及$Q=A\cup B\cup C$。

A，B，C中每一个至多有h^2个元素；因而Q至多有$3h^2$个元素。

于是只要证明当每一$x_i \in H$时有 $x_1 a x_2 a \cdots x_n a \in Q$ 就行了。这可以对n用归纳法来证明。

当$n=1$时，有$x_1 a = x_1 a \cdot 1 \in A \subseteq Q$。现令$x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in H$；$x_1 a x_2 a \cdots x_k a = q$，$x_{k+1} = z$及$qza = p$。假设$q \in Q$而欲证$p \in Q$。由归纳假设可知$q$在$A$,$B$或$C$内。如果$q = xay \in A$,则利用(i) 有

$$p = (xay)za = xa(yz)a = x(yz)^{-1}a^2(yz)^{-1} \in B \subseteq Q.$$

如果$q = xa^2y \in B$，则有$p = xa^2yza \in C \subseteq Q$。如果$q = xa^2ya \in C$，则利用(i)和(ii)有

$$\begin{aligned} p &= xa^2y(aza) = xa^2y(z^{-1}a^2z^{-1}) = x[a^2(yz^{-1})a^2]z^{-1} \\ &= x(yz^{-1})^{-1}a(yz^{-1})^{-1}z^{-1} \in A \subseteq Q. \end{aligned}$$

第三十九届(1978年12月2日)

上午试题

A-1. 设A为从等差级数1,4,7,$\cdots$,100 中任意选取20个相异整数所成之集合.证明在A中必有两个相异整数,其和为104.

A-2. 设 $a, b, p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为实数，且 $a \neq b$。定义$f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x)(p_3 - x)\cdots(p_n - x)$。证明

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & a & a & a & \cdots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \cdots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \cdots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \cdots & b & p_n \end{pmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

A-3. 设 $p(x)=2+4x+3x^2+5x^3+3x^4+4x^5+2x^6$，对于适合 $0<k<5$ 之每一个 k，定义

$$I_k=\int_0^\infty \frac{x^k}{p(x)}dx.$$

问对应于哪一个 k 的 I_k 为最小？

A-4. 在集合S上的一个"旁路"(*bypass*)运算是从 $S\times S$ 到S的映射，它具有下列性质：对于所有的$w,x,y,z\in S$ 均有

$$B(B(w,x),B(y,z))=B(w,z)\ .$$

(*a*) 若B是一个旁路运算，证明由$B(a,b)=c$可得$B(c,c)=c$。

(*b*) 若B是一个旁路运算，证明由 $B(a,b)=c$ 可推得 $B(a,x)=B(c,x)$对于所有的$x\in S$都成立。

(*c*) 对于有限集合S 上的旁路运算B作一表格，使得B具有下列三个性质：(i) $B(x,x)=x$ 对于所有的 $x\in S$ 都成立。(ii) 在S中存在d和e，使得 $B(d,e)=d\neq e$。(iii) 在S中存在f和g，使得$B(f,g)\neq f$。

A-5. 设 $0<x_i<\pi, i=1,2,\cdots,n$。且令

$$x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证明

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

A-6. 给定平面上n个相异点。证明其中距离为单位长的点对少于$2n^{3/2}$对。

下午试题

B-1. 求一个圆内接凸八边形的面积，它有四个接连边的

长皆为3单位，而其余四边之长皆为2单位。答案要以$r+s\sqrt{t}$之形式表示，其中r,s,t皆为正整数。

B-2. 将 $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$
表示成一个有理数。

B-3. 多项式序列$\{Q_n(x)\}$定义为

$$Q_1(x)=1+x,\quad Q_2(x)=1+2x,$$

且当$m\geqslant 1$时，为

$$Q_{2m+1}(x)=Q_{2m}(x)+(m+1)xQ_{2m-1}(x),$$

$$Q_{2m+2}(x)=Q_{2m+1}(x)+(m+1)xQ_{2m}(x).$$

设 x_n为$Q_n(x)=0$ 的最大实数解。证明 $\{x_n\}$ 为递增数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

B-4. 证明对于每个实数N，方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$$

有一解x_1,x_2,x_3,x_4都是大于N的整数。

B-5. 求出一个最大的数A，使得存在一个实系数多项式

$$P(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E,$$

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时满足$0\leqslant P(x)\leqslant 1$。

B-6. 令p和n为正整数。设数$C_{h,k}(h=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,ph)$满足$0\leqslant C_{h,k}\leqslant 1$。证明

$$\sum\left(\frac{C_{h,k}}{h}\right)^2\leqslant 2p\sum C_{h,k},$$

其中求和是对于所有可能的数对来进行。

解　答

A-1. 将$1,4,7,\cdots,100$分成18个不相交的集合如下：

{1},{52},{4,100},{7.97},…,{49,55}。

则从1,4,7,…,100中任取20个整数构成 A，必会取到18个集合中后面16个中之某一个，因此A中必有一对整数，其和为104。

A-2。令M_t为由给定矩阵之各元减去t后得到的矩阵，$G(t)$为M_t的行列式。不难看出，$G(t)$是t的线性函数，$G(a)=f(a)$，$G(b)=f(b)$。再利用线性插值可知所求之行列式$G(0)$等于

$$\frac{bG(a)-aG(b)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

A-3。当 $-1<k<5$ 时积分收敛，故在这个开区间上I_k有定义。令$x=1/t$，则

$$I_k=\int_{\infty}^{0}\frac{t^{-k}}{t^{-6}p(t)}\left(\frac{-dt}{t^2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{t^{4-k}dt}{p(t)}=I_{4-k}\ .$$

由算术平均数≥几何平均数，知

$$\frac{x^k+x^{4-k}}{2}\geqslant\sqrt{x^k\cdot x^{4-k}}=x^2\ .$$

故 $$I_k=\frac{I_k+I_{4-k}}{2}=\int_0^{\infty}\frac{[(x^k+x^{4-k})/2]dx}{p(x)}\geqslant\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{p(x)}=I_2$$

即当$k=2$时，I_k为最小。

A-4。(a) 考虑$[w,x,y,z]=[a,b,a,b]$。因为$B(a,b)=c$，则

$$B(c,c)=B(B(a,b),B(a,b))=B(a,b)=c.$$

(b) 考虑$[w,x,y,z]=[a,b,x,x]$。因为$B(a,b)=c$，则

$B(C,B(x,x))=B(B(a,b),B(x,x))=B(a,x)$。

再对$[w,x,y,z]=[c,c,x,x]$应用(a)之结果，则

$$B(C,B(x,x))=B(B(c,c),B(x,x))=B(c,x).$$

于是$B(a,x)=B(c,x)$对所有的$x\in S$都成立。

(c) 设I,J分别为有多于一个元素的有限集合，$S=I\times J$，

用

$$B((i,j),(h,k))=(i,k)$$

定义运算B，则B,S满足性质(i),(ii),(iii)。当取$S=\{a,b,c,d\}$或取$S=\{u,v,w,x,y,z\}$时，对应表格如下：

	a 或c	b 或d
a 或 b	a	b
c 或 d	c	d

	u 或 x	v 或 y	w 或 z
u或v或w	u	v	w
x或y或z	x	y	z

A-5. 设$g(x)=\ln[(\sin x)/x]=\ln(\sin x)-\ln x$，因为当$x>0$时$x>\sin x$，故

$$g''(x)=-\csc^2 x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}<0,\quad 0<x<\pi .$$

所以$g(x)$的图形向下凹，因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\leqslant g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=g(x),$$

即$\sum g(x_i)\leqslant ng(x)$。又$e^x$为增函数，所以

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}=e^{\Sigma g(x_i)}\leqslant e^{ng(x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

A-6. 对于平面上的点集$\{p_1,\cdots,p_n\}$，令e_i表示与p_i相距为单位长的点p_j的个数。则相距为单位长的点对的对数是$E=(e_1+\cdots+e_n)/2$。设C_i表以p_i为圆心，1为半径的圆。因为每对圆至多有2个交点，故所有C_i至多有$2\binom{n}{2}=n(n-1)$个交点。只需讨论每一$e_i\geqslant 1$的情形就够了。

点p_i作为C_j的交点出现$\binom{e_i}{2}$次。因此

$$n(n-1)\geqslant\sum\binom{e_i}{2}=\sum e_i(e_i-1)/2\geqslant(1/2)\sum(e_i-1)^2. \quad (A)$$

(A) 中及下面的$\sum$都是对于 $i=1,2,\cdots,n$来求和．由柯西一许瓦尔兹不等式及(A)得知

$$[\sum(e_i-1)]^2\leqslant[\sum 1][\sum(e_i-1)^2]\leqslant n\cdot 2n(n-1)<2n^3 .$$

于是 $\sum(e_i-1)<\sqrt{2}\,n^{3/2}$，所以

$$E=(\sum e_i)/2\leqslant(n+\sqrt{2}\,n^{3/2})/2<2n^{3/2}.$$

B-1． 一个圆内接八边形，如果它的边分别为3单位长与2单位长相间出现，则它的面积与所求的八边形面积相等．这个新八边形的每一内角均为$3\pi/4$．现将长为3单位的边向两端各延伸$\sqrt{2}$单位，则得到一个边长为$3+2\sqrt{2}$单位的正方形．换言之，在八边形的长为2单位的边各加上一个腰长为$\sqrt{2}$单位的等腰直角三角形，便可得到上述的正方形．因此，所求八边形之面积为

$$(3+2\sqrt{2})^2-(4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2)=13+12\sqrt{2}.$$

另解：设r为圆之半径，α和β分别是长为3和2之弦所对圆心角的一半．则$8\alpha+8\beta=2\pi$，从而$\beta=(\pi/4)-\alpha$．又

$$\frac{3}{2r}=\sin\alpha,\quad \frac{1}{r}=\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2r}{3}\cdot\frac{1}{r}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\sqrt{2}}.$$

故 $\operatorname{ctg}\alpha=(3+2\sqrt{2})/3=[(3+2\sqrt{2})/2]/(3/2)$．因此圆心与长为3之弦相距为$h_3=(3+2\sqrt{2})/2$；同理圆心与长为2之弦相距为$h_2=(2+3\sqrt{2})/2$．所以八边形之面积为

$$4(3h_3+2h_2)/2=(9+6\sqrt{2})+(4+6\sqrt{2})=13+12\sqrt{2}.$$

B-2． 令S为所求之和．则

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots\right].$$

因此

$$2S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right.$$

$$\left.-\cdots-\frac{1}{k+n+1}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\right.$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left[1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+2}\right)$$

$$\left.-\frac{1}{h+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h-1}\right)-\frac{1}{h+2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\right]$$

$$=\frac{6+3+2}{6}+\frac{12+6+4+3}{2\cdot12}+\left(\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{2}.$$

故$S=7/4$。

B-3．显然，$x_1=-1$，$x_2=-\frac{1}{2}$．利用归纳法容易证出当$x\geqslant 0$时每个Q_n都为正数．因此，若$Q_n(x)=0$有解，则$x_n<0$。

由归纳假设，$x_1<x_2<\cdots<x_{2m-1}<x_{2m}$。故当$x>x_{2m-1}$时有$Q_{2m-1}(x)>0$。特别有$Q_{2m-1}(x_{2m})>0$。因此

$$\begin{aligned}Q_{2m+1}(x_{2m})&=Q_{2m}(x_{2m})+(m+1)x_{2m}Q_{2m-1}(x_{2m})\\&=(m+1)x_{2m}Q_{2m-1}(x_{2m})<0.\end{aligned}$$

所以存在$x=x_{2m+1}>x_{2m}$，使得$Q_{2m+1}(x)=0$.同理可找到$x_{2m+2}>x_{2m+1}$.

令$a=-1/(m+1)$。利用$Q_n(x)$的递推定义可得

$$Q_{2m+2}(a)=Q_{2m+1}(a)-Q_{2m}(a)=-Q_{2m-1}(a).$$

因此，$Q_{2m+2}(a)$和$Q_{2m-1}(a)$中至少有一个为非正数．所以$x_{2m+2}\geqslant a$或$x_{2m-1}\geqslant a$，但无论那种情形都导致$x_{2m+2}\geqslant -1/(m+1)$和$x_{2m+3}\geqslant -1/(m+1)$，由此得知对所有自然数$n$成立$-2/n\leqslant x_n<0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

B-4．显然$(1,1,1,1)$是一个解．固定x_1，x_2，x_3，则原式为x_4的一个二次式．若x_4为此二次式的一个解，则$x_4'=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-x_4$在$x_4'\neq x_4$时给出一个新解.因为原式关于$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$是对称的，所以$x_4'$中之$x_i$可以任意置换.故可设$x_4\leqslant m=\min(x_1,x_2,x_3)$，若又设$x_i\geqslant 1$，则$x_4'\geqslant 3m^2-m>m$。这表明，从解$(1,1,1,1)$开始，通过运用上述程序就可得到一个解$(x_1,x_2,x_3,x_4)$，其中每个$x_i$都大于$N$。

B-5．如果知道下述结论：在满足条件$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$的所有四次多项式$f(x)$中，切比雪夫多项式$C_4(x)=$

$8x^4-8x^2+1=\cos(4\text{Arccos}x)$ 具有最大的首项系数。则取 $P(x)=[C_4(x)+1]/2$，就知A的最大值为4。

如果不知道这个结论，先令 $Q(x)=[P(x)+P(-x)]/2$，则原来的条件可改写为

$$0\leqslant Q(x)=Ax^4+Cx^2+E\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

令$x^2=y$，则化为

$$0\leqslant R(y)=Ay^2+Cy+E\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

令$y=(z+1)/2$，$S(z)=R[(z+1)/2]$，则为

$$0\leqslant S(z)=(A/4)z^2+Fz+G,\quad -1\leqslant z\leqslant 1.$$

对于$T(z)=[S(z)+S(-z)]/2$，得到

$$0\leqslant (A/4)z^2+G\leqslant 1,\quad -1\leqslant z\leqslant 1.$$

再令$z^2=w$，最后得到

$$0\leqslant (A/4)w+G\leqslant 1,\quad 0\leqslant w\leqslant 1.$$

显然，当$G=0$，即当

$$T(z)=z^2,\quad R(y)=(2y-1)^2,\quad Q(x)=4x^4-4x^2+1$$

时，得出A的最大值为4。

B-6. 令$a_h=\left(\sum\limits_{k=1}^{ph}C_{h,k}\right)/h$。显然$0\leqslant a_h\leqslant p$。对$n$用归纳法，可以证明原命题的等价命题：

$$\left(\sum_{h=1}^{n}a_h\right)^2\leqslant 2p\sum_{h=1}^{n}(ha_h).$$

事实上，当$n=1$时，显然成立 $a_1{}^2\leqslant pa_1\leqslant 2pa_1$。设命题当$n=m$时成立。则

$$\left(\sum_{h=1}^{m+1}a_h\right)^2=\left(\sum_{h=1}^{m}a_h\right)^2+2a_{m+1}\sum_{h=1}^{m}a_h+a_{m+1}^2$$

$$\leqslant 2p\sum_{h=1}^{m}(ha_h)+2a_{m+1}pm+2pa_{m+1}$$

$$\leqslant 2p\left[(m+1)a_{m+1}+\sum_{h=1}^{m}(ha_h)\right]$$

$$=2p\sum_{h=1}^{m+1}(ha_h),$$

即命题当$n=m+1$时也成立。证毕。

第四十届（1979年12月1日）

上午试题

A-1. 求出正整数n及a_1，a_2，…，a_n的值，使得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1979,$$

且乘积$a_1a_2\cdots a_n$为最大。

A-2. 建立常数k所应满足的充要条件，使得存在一连续实函数$f(x)$，对于所有实数x均成立$f(f(x))=kx^9$。

A-3. 设x_1，x_2，x_3，…是非零实数序列，并且满足

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}},\quad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots.$$

建立关于x_1及x_2的充要条件，使得对于n的无穷多个值，x_n为整数。

A-4. 设A为平面上$2n$个点构成的集合，其中任意三点不共线。现将n点涂红色，n点涂蓝色。试证明或否定：可找到两两不共点的n条直线段，其中每条线段的二端点均为A中异色

的点。

A-5. 用$[x]$表示不超过x的最大整数，用 $S(x)$ 表示序列$[x]$，$[2x]$，$[3x]$，…. 证明方程$x^3-10x^2+29x-25=0$有相异二实根α与β，使得 $S(\alpha)$与$S(\beta)$ 的交集中有无穷多个正整数。

A-6. 设$0\leqslant p_i\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$. 证明可有$x$，$0\leqslant x\leqslant 1$，满足

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x-p_i|}\leqslant 8n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

下午试题

B-1. 证明或否定：至少存在有一条直线，既是 $y=\cosh x$ 的图形在某点$(a,\cosh a)$的法线，也是$y=\sinh x$ 的图形在某点$(c,\sinh c)$的法线。(所谓图形在其某点的法线，即为垂直于该点的切线的直线. 又 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$，$\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$。)

B-2. 设$0<a<b$. 试求

$$\lim_{t\to 0}\left\{\int_0^1[bx+a(1-x)]^t dx\right\}^{1/t}$$

的值。(答案除加，减，乘，除和指数外，不许涉及其他运算。)

B-3. 设F是有m个 (m为奇数) 元素的有限域，设 $p(x)=x^2+bx+c$，$b,c\in F$是F上的不可约(即不可分解因式) 多项式. 问有多少个F中的元素k可使$p(x)+k$在F上为不可约？

B-4. (a) 找出齐次线性微分方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+(18x+3)y=0$$

不恒等于零的一个解 (若能猜出解的形式，会有所帮助)。

(b) 设$y=f(x)$是非齐次微分方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+(18x+3)y$$
$$=6(6x+1)$$

之解，且 $f(0)=1$，$(f(-1)-2)(f(1)-6)=1$。试求出整数 a，b，c，使得$(f(-2)-a)(f(2)-b)=c$。

B-5. 设C是平面上的闭凸集，C除了包含(0，0)外不包含其他坐标为整数的点；又设C分布在四个象限中的面积相等，试证C之面积$A(C)\leqslant 4$。

B-6. 令$z_k=x_k+iy_k$，$k=1$，2，…，n，其中x_k和y_k为实数，$i=\sqrt{-1}$。用r表示 $\pm\sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$ 实部之绝对值。证明 $r\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$。

解答

A-1. 我们证明$n=660$，所有的a_i除一个等于2外，其余的均等于3。因为用2·3代替5，3·3代替6，3·4代替7，…，对应的乘积增大，所以任一$a_i\leqslant 4$；因为$2\cdot 4<3\cdot 3$，$2\cdot 2\cdot 2<3\cdot 3$，所以在a_i中不会同时有2和4或出现三个2；因为$4\cdot 4<2\cdot 3\cdot 3$，所以也不会有二个4；又显然$a_i\neq 1$。故a_i除可能取一个4或一个2或二个2外，所有其余的a_i均为3。再由$1979=3\cdot 659+2$，知a_i中只有一个2，并且$n=660$。

A-2. 我们证明充要条件是$k\geqslant 0$。若$k\geqslant 0$，定义$f(x)=\sqrt[4]{k}x^3$，则$f(f(x))=kx^9$。反之，令$f(x)$为满足$f(f(x))=kx^9$之连续实函数。若$k\neq 0$，则由于$f(a)=f(b)\Longrightarrow f(f(a))=f(f(b))\Longrightarrow ka^9=kb^9\Longrightarrow a=b$，故$f$为一对一函数。又由于$kx^9$为映成函数（即从实数$R$到自身上的函数），故对任何实数值$t$，存在$x$使$f(f(x))=t$。令$f(x)=y$，则$f(y)=t$，故$f$本身亦为映成函数。由假设，$f$为连续函数，故$f$必为严格单调函数，且无

论f为递增函数或为递减函数，$f(f(x))$总为递增函数，即kx^9为递增函数。所以$k>0$（如果$k<0$，则kx^9为递减函数）。

A-3. 首先用归纳法证明下式成立：对所有$n\geqslant 3$，有

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}. \qquad (*)$$

当$n=3$时，由已给条件，$x_3=x_1x_2/(2x_1-x_2)$，故$(*)$式成立，假设对所有满足$k\leqslant n(n\geqslant 3)$之$k$均有$x_k=x_1x_2/[(k-1)x_1-(k-2)x_2]$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}}&=\frac{2x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}x_n}=\frac{2}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}\\&=\frac{2[(n-1)x_1-(n-2)x_2]}{x_1x_2}\\&-\frac{(n-2)x_1-(n-3)x_2}{x_1x_2}\\&=\frac{nx_1-(n-1)x_2}{x_1x_2},\end{aligned}$$

故$x_{n+1}=x_1x_2/[nx_1-(n-1)x_2]$，于是$(*)$式得证。令$x_2/x_1=a$，则由$(*)$式得到

$$x_n=\frac{x_1}{(n-1)-(n-2)a}=\frac{x_1}{(1-a)n+(2a-1)}.$$

若$a\neq 1$，则此式分母之绝对值随n无限增大；因x_1之值固定，故x_n不可能对无限多之n均为整数。反之，若$a=1$，则$x_n=x_1$，故若x_1为整数，则对一切之n，x_n均为整数。故所求之充要条件是对某个整数m有$x_1=x_2=m$。

A-4. 因为总共只有有限个点，故将红点与蓝点一一配对的方法也只有有限个（实际为$n!$个）。对每个配对的方法p，我们考虑所得到的n个线段的长度和$s(p)$。其中必然有某个

$s(p)$为最小。假设在p中有线段RB和$R'B'$相交（此处R，R'表红点，B，B'表蓝点），则将此二线段用RB'和$R'B$代替。由于三角形任意两边之和大于第三边，它所对应的配对方法p'之线段长度和$s(p')$必较$s(p)$为小，这是矛盾。故p中之n条线段，两两不相交。

A-5. 令$f(x)=x^3-10x^2+29x-25$，则由下表知

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	-5	1	-1	-5	5

$f(x)=0$有三实根a，b，c满足$1<a<2$，$2<b<3,5<c<6$。令$N=\{1,2,\cdots,n\},S_1=N\cap S(a),S_2=N\cap S(b)$，$S_3=N\cap S(c)$。则$|S_1|=[n/a]$，$|S_2|=[n/b]$，$|S_3|=[n/c]$。由

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,$$

可知 $$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{n}{a}\right]+\left[\frac{n}{b}\right]+\left[\frac{n}{c}\right]-n\right\}=\infty. \qquad (1)$$

由 $$n=|N|\geqslant\left[\frac{n}{a}\right]+\left[\frac{n}{b}\right]+\left[\frac{n}{c}\right]-|S_1\cap S_2|-|S_2\cap S_3|-|S_3\cap S_1|,$$

可知 $$|S_1\cap S_2|+|S_2\cap S_3|+|S_3\cap S_1|\geqslant\left[\frac{n}{a}\right]+\left[\frac{n}{b}\right]+\left[\frac{n}{c}\right]-n. \qquad (2)$$

于是由(1)，(2)式即得$\lim\limits_{n\to\infty}|S_1\cap S_2|=\infty$，或$\lim\limits_{n\to\infty}|S_2\cap S_3|=\infty$，或$\lim\limits_{n\to\infty}|S_3\cap S_1|=\infty$。若假定$\lim\limits_{n\to\infty}|S_1\cap S_2|=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|S(a)\cap S(b)|=\infty$。换言之，$S(a)$与$S(b)$的交集中含有无穷多个正整数。

A-6. 对$k=0$，1，…，$2n-1$，考虑$2n$个开区间$I_k=(k/2n,(k+1)/2n)$，其中至少有n个I_k不包含任何p_i，用$x_j(j=1$，2，

…，n)表这些区间的中点。令$|x_j-p_i|=d_{ij}$；又令

$$\beta=8n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

对任何固定的i，$d_{ij}\geqslant 1/4n$均成立，而且对至多两个j，$d_{ij}\geqslant 3/4n$不成立，对至多4个j，$d_{ij}\geqslant 5/4n$不成立，等等。于是不难证明

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\leqslant 2\sum_{h=0}^{n-1}\frac{4n}{1+2h}=B.$$

从而有
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\right)\leqslant nB.$$

所以对某个j，$\sum_{i=1}^{n}(1/d_{ij})\leqslant B$成立，故选这个$j$所对应之$x_j$为$x$即可。

B-1. 假设存在有一条公共法线，则下式成立：

$$-\frac{a-c}{\cosh a-\sinh c}=\cosh c=\sinh a. \qquad (1)$$

因为$\cosh c>0$，由(1)知$\sinh a>0$，故$a>0$。若$a<c$，则由$0<a<c$及$\cosh x$和$\sinh x$之定义得 $\sinh a<\cosh a<\cosh c$，此与(1)矛盾；故$a\geqslant c$，从而(1)式的左边$\leqslant 0$，不能等于$\cosh c$，此为矛盾。故所求之公共法线不存在。

B-2. 令$u=bx+a(1-x)$；则

$$I(t)=\int_0^1[bx+a(1-x)]^t dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b u^t du=\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(1+t)(b-a)}.$$

应用求未定式极限的罗必塔法则，可知当$t\to 0$时有

$$[I(t)]^{1/t}\to e^{-1}(b^b/a^a)^{1/(b-a)}.$$

B-3. 令$r=(m-1)/2$。我们证明有r个F中的元素k使$q(x)=p(x)+k$在F上为不可约。由于$|F|=m$为奇数，F的特征值$\neq 2$，$1+1=2\neq 0$，故$h=2^{-1}b\in F$，F的$2r+1$个元素可表为0，f_1，$-f_1$，…，f_r，$-f_r$之形式，且$\{0, f_1^2, \cdots, f_r^2\}$为$F$中$r+1$个相异平方之集合。因为

$$q(x)=(x+h)^2-(h^2-c-k)$$

在F上为不可约当且仅当在F中$q(x)\neq 0$，即当且仅当h^2-c-k不属于F中$r+1$个相异平方f^2所成之集合，F中去掉形如h^2-c-f^2的$r+1$个元素后还余r个元素，故k必是这余下的r个元素中之一个。

B-4. (*a*) 尝试形如e^{mx}之特解，可知$y=e^{3x}$为齐次方程之一特解。再尝试形如$x^d+\cdots$之多项式特解，可知$d=2$，$y=x^2+x$为方程之另一特解。因此，当常数h和k中至少有一个不为零时，任一线性组合$he^{3x}+k(x^2+x)$均为所求齐次方程的一个解。

(*b*) 显然，$y=2$为非齐次方程之一特解。故$f(x)$可表成$2+he^{3x}+k(x^2+x)$的形式。由于

$$f(0)\Longrightarrow 2+h=1,\ h=-1\Longrightarrow f(x)=2-e^{3x}+k(x^2+x)$$
$$\Longrightarrow f(-1)=2-e^{-3}\text{及}f(1)=2-e^3+2k,$$

故 $(f(-1)-2)(f(1)-6)=1\Longrightarrow -e^{-3}(2+2k-e^3-6)=1$
$$\Longrightarrow (2k-4)e^{-3}=0\Longrightarrow k=2.$$

因而$f(x)=2-e^{3x}+2(x^2+x)$，$f(-2)=6-e^{-6}$，$f(2)=14-e^6$。故若令$a=6$，$b=14$，$c=1$，则$(f(-2)-a)\cdot(f(2)-b)=c$显然满足。

B-5. 如果直线L与C相交，而L的某一边不含任何C中之点，则称L为C的一条支撑线。因为C是凸集合，故通过$(0,1)$点必有一条支撑线；令其斜率为m。若$m\geqslant 1/2$或$m\leqslant -1/2$，则C在第四象限中之部分面积$\leqslant 1$。故可以假定$-1/2<m<1/2$，

对于通过(1, 0), (0, -1)和(-1, 0)三点的三条支撑线亦可作类似假定．在这四条支撑线所围成的四边形中，至少有一个内角不是锐角，不妨设这个角α的顶点(h,k)在第一象限．则由$\alpha\geqslant\pi/2$可知$h+k\leqslant 2$，从而可知C在第一象限之面积$\leqslant 1$．所以$A(C)\leqslant 4$．

B-6. 令$X=(x_1, \cdots, x_n)$, $Y=(y_1, \cdots, y_n)$; 令$a+bi$为$z_1^2+\cdots+z_n^2$两个平方根中的任意一个。则有$ab=X\cdot Y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$及

$$a^2-b^2=\|X\|^2-\|Y\|^2=(x_1^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+\cdots+y_n^2).$$

由柯西-许瓦尔兹不等式得 $|a||b|=|X\cdot Y|\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|$，因此，若假定$|a|>\|X\|$，则$|b|\leqslant\|Y\|$；从而由$a^2=\|X\|^2-\|Y\|^2+b^2$又将得$|a|<\|X\|$，此为矛盾。故$r=|a|\leqslant\|X\|$．而$\|X\|^2\leqslant(|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$，所以$r\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$．

第四十一届（1980年12月6日）

上午试题

A-1. 设b和c为固定实数，设(j,y_j), $j=1,2,\cdots,10$是抛物线$y=x^2+bx+c$上的十个点。对$j=1,2,\cdots,9$，又设I_j是给定抛物线在(j,y_j)和$(j+1,y_{j+1})$两点处的切线的交点．试求出一个最低次的多项式函数$y=g(x)$，使得它的图形经过所有的九个点I_j．

A-2. 设r与s为给定正整数．设由四个正整数作成之有序四数组(a,b,c,d)满足条件

$$3^r\cdot 7^s=\mathrm{lcm}[a,b,c]=\mathrm{lcm}[a,b,d]=\mathrm{lcm}[a,c,d]$$

$$=\mathrm{lcm}[b,c,d].$$

试导出计算这种四数组的个数的公式。所得公式应是r与s的一个函数。

（注意，记号$\mathrm{lcm}[x,y,z]$表示x,y,z的最小公倍数。）

A-3. 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{2}}}$.

A-4. (a) 证明：存在不全为零的三个整数a,b,c，其中每一个的绝对值均小于10^6，使得

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}$$

成立。

(b) 设a,b,c是不全为零的整数，且每一个的绝对值均小于10^6。试证

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

A-5. 设$P(t)$是一非常值的实系数多项式。证明联立方程组

$$0=\int_0^x P(t)\sin t\,dt=\int_0^x P(t)\cos t\,dt$$

只有有限多个实数解x。

A-6. 设C是区间$0\leqslant x\leqslant 1$上满足$f(0)=0$和$f(1)=1$的所有实值连续可微函数f所组成的函数类。试确定一个最大的实数u，使得对所有$f\in C$恒有

$$u\leqslant\int_0^1|f'(x)-f(x)|dx.$$

下午试题

B-1. 对于哪一些实数c，不等式

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\leqslant e^{cx^{2}}$$

对所有实数 x 都成立?

B-2. 设S是由三维空间中同时满足下述六个条件的所有点(x,y,z)作成的立体:

$$x\geqslant0,\quad y\geqslant0,\quad z\geqslant0,\qquad x+y+z\leqslant11,$$

$$2x+4y+3z\leqslant36,\qquad 2x+3z\leqslant24.$$

(a) 确定S的顶点数v; (b) 确定S的棱数e; (c) 设$(2,5,4)$是线性函数$bx+cy+z$在S上取得其极大值的一个点. 试在bc平面内画出由点(b,c)作成的集合的图形.

B-3. 当a为怎样的实数时, 由起始条件 $u_0=a$ 及递推式 $u_{n+1}=2u_n-n^2$定义之序列对于一切$n\geqslant0$恒有$u_n>0$?
(答案要求表成最简单的形式.)

B-4. 设$A_1,A_2,\cdots,A_{1066}$均是有限集X的子集, 且$|A_i|>\frac{1}{2}|X|$, $1\leqslant i\leqslant1066$. 证明必存在$X$的十个元素$x_1,\cdots,x_{10}$, 使得每个$A_i$至少含有$x_1,\cdots,x_{10}$中的一个元素.
(这里$|S|$表示集合S含有的元素个数.)

B-5. 对每一$t\geqslant0$, 设S_t是定义在闭区间$[0,1]$上所有非负的, 递增的, 凸的, 连续的实值函数$f(x)$构成的集合, 满足

$$f(1)-2f(2/3)+f(1/3)\geqslant t[f(2/3)-2f(1/3)+f(0)].$$

要使S_t对乘法为闭合, 试确定关于t的充要条件. (所谓对乘法闭合是指若$f(x)\in S_t$, $g(x)\in S_t$, 则其乘积$f(x)g(x)$也$\in S_t$. 又$f(x)$为凸函数的充要条件是$f(su+(1-s)v)\leqslant sf(u)+(1-s)f(v)$, 其中$0\leqslant s\leqslant1$.)

B-6. 设d和n为整数, $1\leqslant d\leqslant n$, 定义无穷有理数列$G(d,n)$

如下：

$$G(1,n)=\frac{1}{n},\quad G(d,n)=\frac{d}{n}\sum_{i=d}^{n}G(d-1,i-1),\quad d>1.$$

若$1<d\leqslant p$，p为素数，试证明$G(d,p)=s/t$，其中s和t均为整数，且t不是p的整倍数。（例如$G(3,5)=7/4$，其分母4不是5的倍数。）

解答

A-1. 我们证明$g(x)=x^2+bx+c-(1/4)$。容易看出，给定抛物线在点$P_j=(j,y_j)$处的切线方程是$y=L_j$，这里$L_j=(2j+b)x-j^2+c$。联立求解$y=L_j$和$y=L_{j+1}$，可得$x=(2j+1)/2$，因而在I_j处有$j=(2x-1)/2$。把j的这一表示式代入L_j即得出$g(x)$的上述形式。

A-2. 我们证明，计算四数组个数的公式为$(1+4r+6r^2)(1+4s+6s^2)$。a,b,c,d必都具有形式3^m7^n，其中$m\in\{0,1,\cdots,r\}$，$n\in\{0,1,\cdots,s\}$。而且这四个数中至少有二个数其$m=r$，又至少有二个数其$n=s$。因为对所有四个数都取$m=r$只有一种方法；对其中三个数取$m=r$，一个数取$m\in\{0,1,\cdots,r-1\}$有$4r$种方法；对其中二个数取$m=r$，二个数取$m\in\{0,1,\cdots,r-1\}$有$\binom{4}{2}r^2=6r^2$种方法，所以m的容许取法共有$1+4r+6r^2$种。同样地，n的容许取法共有$1+4s+6s^2$种。故得欲证。

A-3. 令I表示给定的定积分，记$\sqrt{2}=r$。我们证明$I=\pi/4$。利用代换$x=(\pi/2)-u$，有

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\frac{-du}{1+\mathrm{ctg}^r u}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^r u\,du}{\mathrm{tg}^r u+1}.$$

因此 $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\mathrm{tg}^r x}{1+\mathrm{tg}^r x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\pi/2,$$

所以$I=\pi/4$。

A-4. (a) 设S是由10^{18}个实数$r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}$所作成的集合，其中$r,s,t\in\{0,1,\cdots,10^6-1\}$；又设$d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})10^6$。则属于$S$的每一个$x$都属于区间$0\leqslant x<d$。把这个区间分成$10^{18}-1$个"小"区间 $(k-1)e\leqslant x<ke$，此处$e=d/(10^{18}-1)$，k取值$1,2,\cdots,10^{18}-1$。根据抽屉原则，S的10^{18}个数中必定有两个数属于同一个小区间，它们之差$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$就给出所要求的三个整数a，b，c。(b) 令 $F_1=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$，令$F_2,F_3,F_4$为形如 $a\pm b\sqrt{2}\pm c\sqrt{3}$的另外三数。利用$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的无理性以及 a,b,c 不全为零这一事实，易证F_i均不为零（参看第十五届竞赛的A-1题）。又易看出乘积 $P=F_1F_2F_3F_4$为一整数。因此$|P|\geqslant1$。由于对每一i有$|F_i|<10^7$，从而 $1/|F_i|>10^{-7}$，所以$|F_1|\geqslant1/|F_2F_3F_4|>10^{-21}$成立。

A-5. 令$Q=P-P''+P^{iv}-\cdots$。利用累次分部积分法，给定的联立方程组可化为

$$\int_0^x P(t)\sin t\,dt=-Q(x)\cos x+Q'(x)\sin x+Q(0)=0,$$

$$\int_0^x P(t)\cos t\,dt=Q(x)\sin x+Q'(x)\cos x-Q'(0)=0.$$

由此得 $$Q(x)=Q'(0)\sin x+Q(0)\cos x. \tag{E}$$

因为P是（因而Q亦是）一有正次数的多项式，且(E)的右边有界，所以方程(E)的全部解都含于某个区间$|x|\leqslant M$内。在这样的一个区间内，$P(x)\sin x$只有有限多个零点，由罗尔定理即知$\int_0^x P(t)\sin t\,dt=0$的零点至多还加一个。证毕。

A-6. 我们证明$u=1/e$。因为$f'-f=(fe^{-x})'\cdot e^x$及$x\geqslant0$时

$e^x\geqslant 1$，故有

$$\int_0^1|f'-f|dx=\int_0^1|(fe^{-x})'e^x|\,dx\geqslant\int_0^1(fe^{-x})'dx$$
$$=[fe^{-x}]_0^1=1/e。$$

为了断定$1/e$是最大下界，我们利用如下定义的函数$f_a(x)$：

当$0\leqslant x\leqslant a$时$f_a(x)=(e^{a-1}/a)x$，

当$a\leqslant x\leqslant 1$时$f_a(x)=e^{x-1}$。

令$m=e^{a-1}/a$。则有

$$\int_0^1|f_a'(x)-f_a(x)|dx=\int_0^a|m-mx|dx$$

$$=m\left(a-\frac{a^2}{2}\right)=e^{a-1}\left(1-\frac{a}{2}\right).$$

当$a\to 0$时，这个表示式趋近于$1/e$。函数$f_a(x)$虽无连续导数，但可以磨除其隅角，使积分值的变化保持为任意小，这即表明比$1/e$更大的数不可能成为一个上界。

B-1。所给不等式当且仅当$c\geqslant 1/2$时成立。设$c\geqslant 1/2$，因为$(2n)!\geqslant 2^n n!$ $(n=0,1,\cdots)$，故对一切x有

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{x^2/2}\leqslant e^{cx^2}.$$

反之，若不等式对一切x成立，则

$$0\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{e^{cx^2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+cx^2+\cdots)-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)}{x^2}=c-\frac{1}{2},$$

所以$c\geqslant 1/2$。

B-2. (a) $v=7$. 这七个顶点是$V_0=(0,0,0)$, $V_1=(11,0,0,)$, $V_2=(0,9,0)$, $V_3=(0,0,8)$, $V_4=(0,3,8)$, $V_5=(9,0,2)$, $V_6=(4,7,0)$.

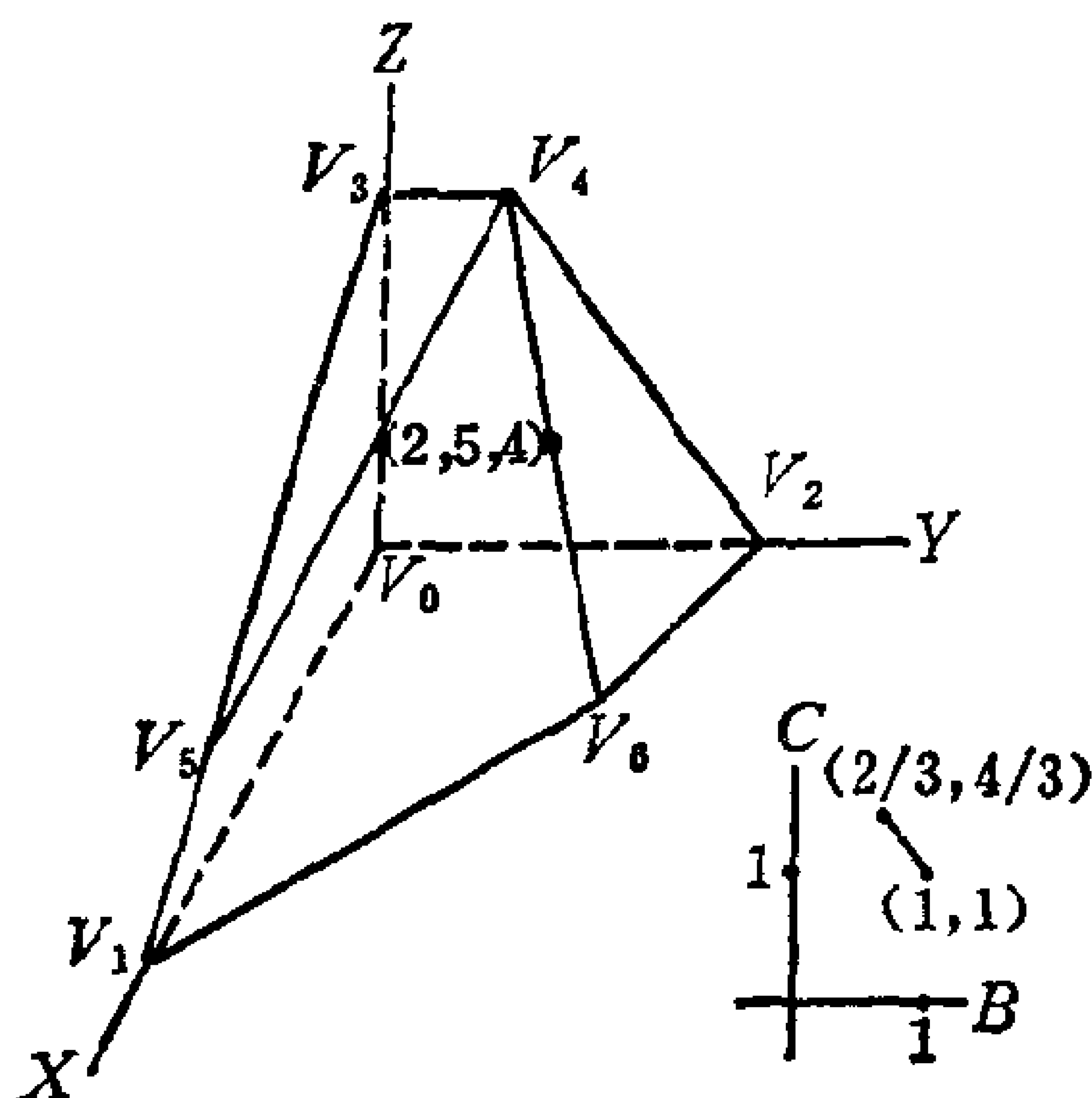


图102

(b) $e=11$. 这十一条棱是V_0V_1, V_0V_2, V_0V_3, V_1V_5, V_1V_6, V_2V_4, V_2V_6, V_3V_4, V_3V_5, V_4V_5和V_4V_6.

(c) 所求之点(b,c)应满足条件$b+c=2$及$2/3\leqslant b\leqslant 1$. 令$L(x,y,z)=bx+cy+z$. 因为$L$是线性的，点$(2,5,4)$在棱$V_4V_6$上，所以$L$在$V_4$和$V_6$处必取得它在$S$上的极大值，$b$和$c$应满足的条件由$L(0,3,8)=L(4,7,0)\geqslant L(x,y,z)$即可得出，这里$(x,y,z)$取值于其余五个顶点.

B-3. 我们证明，对一切$n\geqslant 0$恒有$u_n>0$的充要条件是$a\geqslant 3$. 设$\Delta u_n=u_{n+1}-u_n$. 则递推式（即差分方程）取得形式$(1-\Delta)u_n=n^2$. 因为n^2为一多项式，故

$$u_n=(1-\Delta)^{-1}n^2=(1+\Delta+\Delta^2+\cdots)n^2$$
$$=n^2+(2n+1)+2=n^2+2n+3$$

是一个特解（可用代入法验证）. 又因为$v_n=k\cdot 2^n$是连带齐次差

分方程$v_{n+1}-2v_n=0$之解，故$u_n=n^2+2n+3+k\cdot 2^n$为全解．于是所要求的满足$u_0=a$的解是$u_n=n^2+2n+3+(a-3)2^n$．由于$\lim\limits_{n\to\infty}[2^n/(n^2+2n+3)]=+\infty$，如果$a-3<0$，则对充分大的$n$，$u_n$将为负．反之，如果$a-3\geqslant 0$，显然有每一$u_n>0$。

另一方面，因为$u_0=a$和$u_1=2a$，用数学归纳法便能证明

$$u_n=2^n a-\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-1-k}k^2,\quad n\geqslant 2.$$

因此，对$n\geqslant 0$恒有$u_n>0$的充要条件是$a>\sum\limits_{k=1}^{n-1}2^{-1-k}k^2$成立，而$a>\sum\limits_{k=1}^{n-1}2^{-1-k}k^2$成立的充要条件是$a\geqslant L$成立，这里$L=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-1-k}k^2$。令$D=d/dx$。则当$|x|<1$时，有

$$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,$$

$$D(1-x)^{-1}=(1-x)^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1},$$

$$D(1-x)^{-2}=2(1-x)^{-3}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}.$$

设$g(x)=2x^3(1-x)^{-3}+x^2(1-x)^{-2}$。则$L=g(1/2)=3$,故答案是所有的$a\geqslant 3$。

B-4. 如果$|X|<10$，欲证之结果显然不真。因此假定$|X|\geqslant 10$或者A_j互不相同，后者蕴涵$|X|\geqslant 10$。

设$X=\{x_1,\cdots,x_m\}$，$m=|X|$；设n_i是使得$x_i\in A_j$之下标j的个数，设N是使得$x_i\in A_j$之有序对(i,j)的个数。则

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_m=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{1066}|$$
$$>1066(m/2)=533m.$$

所以必有一个n_i，比如说n_1，超过533.

设$B_1,\cdots,B_s$是所有不包含x_1的子集A_i，设 $Y=\{x_2,x_3,\cdots,x_m\}$。则$s=1066-n_1\leqslant 532$，且每一$|B_j|>|Y|/2$。含有x_2的B_j的个数可以假定不少于含有任一其他x_i的 B_j 的个数．设 $C_1,\cdots,C_t$是所有不包含x_2的B_j，仿照上述方法，可知$t\leqslant 265$.

继续采用这种方法。则第4次所考察的集合序列 $D_1,\cdots,D_u$中所含集合的个数将不多于132。第5次至第10次所考察的序列中所含集合的个数将分别不多于65,32,15,7,3和1.这样我们便得到了所要求的元素$x_1,\cdots,x_{10}$，除非 X 所包含的元素少于10个。

B-5. 答案是$1\geqslant t$（或 $0\leqslant t\leqslant 1$）。两个非负、递增、连续的实值函数之乘积fg仍具有相同的性质．利用 $0\leqslant a\leqslant c$和 $0\leqslant b\leqslant d$蕴涵$ad+bc\leqslant cb+cd$，又可证明当f和g为凸函数时，fg也是凸函数。函数$f(x)=x$对所有的t都属于S_t.如果S_t对乘法是闭合的，则 x^2又属于 S_t，因此 $2/9=1-2(4/9)+(1/9)\geqslant t[4/9-2(1/9)]=2t/9$或$1\geqslant t$．反之，当$1\geqslant t$时，通过较长的直接计算可验证$S_t$是闭合的。

B-6. 令$F_d(x)=\sum\limits_{n=d}^{\infty}G(d,n)x^n$。则有 $F_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n$ 及

$F_1'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.找出两边$x^{n-1}$的系数并利用$nG(d,n)=d\sum\limits_{i=d}^{n}G(d-1,i-1)$，可以看出$F_d'(x)=dF_{d-1}(x)F_1'(x)$。然后用归纳法便得出$F_d(x)=[F_1(x)]^d$。于是，对于 $1<d\leqslant p$，$F_d(x)$ 中 x^p 的系数 $G(d,p)$与$\left[\sum\limits_{n=1}^{p-d+1}x^n/n\right]^d$中$x^p$的系数相等，因此，$G(d,p)=s/t$，其中$s$和$t$为整数，且$t$是小于$p$之素数的一个乘积。

[General Information]
□□=□□□□□□□ □1938-1980□
□□=□□□ □□□□
□□=491
SS□=10501527
□□□□=1983□05□□1□

□□□
□□□
□□□
□□□
□□□
□□□(1938□4□16□)
□□□(1939□3□4□)
□□□(1940□3□2□)
□□□(1941□3□1□)
□□□(1942□3□7□)
□□□(1946□6□1□)
□□□(1947□5□24□)
□□□(1948□3□20□)
□□□(1949□3□26□)
□□□(1950□3□25□)
□□□□(1951□3□31□)
□□□□(1952□3□22□)
□□□□(1953□3□23□)
□□□□(1954□3□6□)
□□□□(1955□3□5□)
□□□□(1956□3□3□)
□□□□(1957□3□2□)
□□□□(1958□2□8□)
□□□□(1958□11□22□)
□□□□(1959□11□21□)
□□□□□(1960□12□3□)
□□□□□(1961□12□2□)
□□□□□(1962□12□1□)
□□□□□(1963□12□7□)
□□□□□(1964□12□7□)
□□□□□(1965□11□20□)
□□□□□(1966□11□19□)
□□□□□(1967□12□2□)
□□□□□(1968□12□7□)
□□□□(1969□12□6□)
□□□□□(1970□12□5□)
□□□□□(1971□12□4□)
□□□□□(1972□12□2□)
□□□□□(1973□11□1□)
□□□□□(1974□11□7□)
□□□□□(1975□11□6□)
□□□□□(1976□12□4□)

□□□□□(1977□12□3□)
□□□□□(1978□12□2□)
□□□□(1979□12□1□)
□□□□□(1980□12□6□)
□□□